

李儼

中國古代數學史料

上海科學技術出版社

基 礎

中国古代数学史料

(第二版)

李 儼 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书1954年初版本原由中国科学社主编,为中国科学史料丛书古代之部第一辑,专述我国古代至北宋为止之数学文献及各著作人之成就与史蹟,为研究我国古代数学富有价值之参考文献。茲經扩充增补,包括宋元类书中有关中国古代数学史料等部分,年代亦延至公元1250年左右,内容更为丰富。本书可供教学及研究参考之用。

中国 古代 数 学 史 料

(第二版)

李 儼 著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业许可证出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷四厂印刷

*

开本 850/1168 1/32 印张 7 14/32 字数 208,000

(原中科院、科技版印12,500册 1954年5月第1版)

1963年1月第2版 1963年1月第1次印刷

印数 1—2,250 (其中精裝 50册)

统一书号:13119·30

定 价:(十四)1.25元

初 版 序

中國有悠久的歷史，不獨政治如此，即各項科學在中國也有久遠的歷史。以往雖有不少科學家和歷史家，有志研究科學歷史的進展，以歷史範圍過廣，分別深入鑽研，逐漸積累，綜合起來，工作十分繁重，此項資料又散見於各方面。關於中國數學史三十年來發展情況，雖曾於1947年介紹一次，題為「三十年來之中國算學史」(註1)，但中國各項歷史研究的造就，至今尚未成熟，其中以古代為特甚。

1953年十月中國科學社為整理我國古代科學發明，發揚其悠久而豐富的寶藏，以供教學及研究工作參考起見，決定編輯中國科學史料叢書，暫分現代之部與古代之部兩編，而本書即為古代之部首先出版的第一冊：「中國古代數學史料」。

中國原始文化為黑陶文化，約在公元前一千年左右。再經某一階段即為殷文化。黑陶文化時期，陶器花紋已具有菱形、方形以及圓內容方各項幾何圖案。殷文化時期，甲骨文已有數字大小及十進數位概念。而數學專門著作，則始於漢代，後來代有作者。因其原作未必一一保存，收集史料，實為必要；至歷代數學家的收穫，尚須各方集錄，而數學家事跡，正史未必都有專傳，亦須多方採集，以補遺缺。

至中國數學，在北宋以後另有創作。中國古代數學，則止於五代。因以五代周顯德己未之明年(公元960年)禪位於宋以前之中國數學，稱為中國古代數學。

1954年中國科學院決定擴充並加強歷史研究機構，除現有的近代史研究所外，增設兩個歷史研究所，這樣共有三個歷史研究所。第一所研究從遠

(註1) 見李儼，「三十年來之中國算學史」，科學，二十九卷四期(1947)，第101—108頁；並見：李儼，中算史論叢第五集，第一版，第146—167頁，北京，科學出版社(1955)。

古到南北朝的歷史，第二所研究從隋唐到鴉片戰爭這段時期的歷史。現有的近代史研究所，改為第三所，仍研究中國近代史，宗旨亦與前相同(註2)。

[中國古代數學史料]既應上述需要而編輯，而工作又相當繁重，且有與前此噶人傳各書有相出入之處。查中算舊無專史，而中國數學家傳記，則有阮元噶人傳四十六卷(公元1799年)，羅士琳續噶人傳六卷(公元1840年)，華世芳近代噶人著述記一卷(公元1884年)，諸可寶噶人傳三編七卷(公元1886年)，黃鍾駿噶人傳四編十一卷(公元1898年)。前後百年，集錄六十餘萬言，引用書籍四百餘種。就中續噶人傳以後所有補傳，多係清代算家。而噶人傳本身，又多部分傳錄各家著書序文，作為本傳；而於各時代數學史事發展所需其他史料，則未加記錄。[中國科學史料叢書]即為適應上述需要而編輯。不過工作是屬創舉，即舉本書[中國古代數學史料]為例，因集錄係屬草創，徵引有時失之冗長，有時失之簡略。在中國古代數學史方面，尚可看到中國與亞洲各邦，即日本、朝鮮、越南、印度各國的文化交流。至分數論、句股弦定理、大衍求一術、方程論、幾何學、圓周率計算，在中國古代都有貢獻，因另有論文，此處亦未曾一一詳列。

此書雖經上海中國科學社編輯委員會和嚴敦傑同志提供意見，兩次多加校補；而全面修補，尙留待修訂本再行辦理。深望讀者隨時多加指教是幸。

一九五四年二月李儼序於蘭州

(註2) 參看“中國科學院積極準備進一步加強歷史研究工作”，科學通報，1954年1月號，第52頁。

第二版序

1954年曾應中國科學社之約，寫成中國古代數學史料一冊，共十四萬字。該書在1955, 1956, 1957各年疊經重印，前後共印出13,000冊，未及多加增訂。經過八年，史料續有收集，其中有資料重要，需要傳達的；有以前存疑，需要訂正的，因於今年(1962)初，全部重加增訂，保存原名，稱為中國古代數學史料(第二版)，以符事實。

查八年前輯錄中國古代數學史料，因係試作，諸多不備。又有各書記載互有不同，或由版本不一，或由傳錄錯誤，都要一一詳加考訂，期與史實相符。亦有書冊史料，未記時期，必須間接尋求時代背景，使明真相。所以有時較多資料，採取祇及一二事。又古代史事，多半由後人追記，所以此類史料，雖如前例，祇記到公元十世紀，而宋元類書所記錄的史料，亦逐一臚列，以便取用。

此次增補和訂正事項，較前約多三分之一，不備之處尚望讀者多加指教是幸。

此書曾經嚴敦傑同志，北京中國佛教協會和日本平山諦博士及兒玉明人先生提供意見，得以順利完成第二版增訂工作，特此誌謝。

一九六二年四月李儼序於北京

目次

初版序

第二版序

1. 古代數字和數的發展	1
2. 規矩和古代幾何學	6
3. 黃帝隸首作數	11
4. 九九	12
5. 古九九表	14
(一)[敦煌漢簡]九九表	16
(二)[居延漢簡]九九表	17
6. 記數方法	19
7. 算學教育	21
8. 算術	22
9. 敦煌千佛洞算書和算表	23
(一)敦煌千佛洞[算書]	23
(二)敦煌千佛洞(田積)算表	27
(三)敦煌千佛洞[算經一卷[并序]]	28
(四)敦煌千佛洞立成算經	36
10. 九宮	40
11. 魏劉徽註九章	42
12. 中國古代數學家(一)	44
(一)張蒼 (二)耿壽昌 (三)許商 (四)杜忠	
(五)尹咸 (六)劉歆 (七)張衡 (八)劉洪	
(九)馬續 (十)鄭玄 (十一)蔡邕 (十二)徐岳	

(十三)關澤 (十四)趙爽 (十五)陸績 (十六)王蕃 (十七)陳熾 (十八)王榮 (十九)劉徽	
13. 南宋祖冲之著綴術	56
14. 梁祖暅之開立圓術	59
15. 中國古代數學家(二)	62
(一)孫子 (二)張丘建和夏侯陽 (三)趙歐 (四)何承天 (五)皮延宗 (六)祖冲之 (七)祖暅之	
16. 後周甄鸞撰註算經	69
17. 中國古代數學家(三)	72
(一)庾曼倩 (二)張續 (三)元延明 (四)殷紹(附成公興) (五)高允 (六)信都芳 (七)甄鸞	
18. 古算解釋	76
(一)隋,劉焯的招差術	76
(二)唐,王孝通分析仰觀臺等體積	78
19. 中國古代數學家(四)	81
(一)劉焯 (二)劉炫 (三)劉祐 (四)韓延 (五)王孝通 (六)李淳風 (七)僧一行 (八)邊岡 (九)劉孝孫	
20. 唐李淳風註十部算經	87
21. 宋刊算經十書	89
22. 算經十書佚文	93
23. 九章算術補註(一)	99
24. 九章算術補註(二)	107
25. 孫子算經補註	112
26. 海島算經新註	126
27. 夏侯陽算經新註	135
28. 緝古算術佚文校補	154
29. 籌算制度	156

30. 佛教與中國曆數	161
31. 七曜名義	169
32. 九執名義	177
33. 三等數法	181
34. 天竺小數記法	191
35. 瞿曇氏曆	193
附：古代三角函數表	197
36. 中國古代數學家(五)	201
(一)陳從運 (二)江 本 (三)龍受益 (四)宋延美	
(五)薛崇譽	
37. 中國古代數學家之成就	203
38. 宋元類書(公元 977 年—)內中算史料	206
(一)數(太平御覽) (二)明算(冊府元龜) (三)算術[竺國算法]	
(通志) (四)九九數等(玉海) (五)曆算等(文獻通考)	
39. 日本口遊(公元 970 年)書內的中國古代數學史料	220

1. 古代數字和數的發展

殷墟甲骨文字 從 1899 年起，在河南，安陽縣發現了甲骨文，內有二、三、五諸字，殷墟陶器文字有一、三、四、五、七諸字(註1)。殷墟甲骨文字著錄數字始為齊備。今知除一、二、三、四、五、六、七、八、九、十諸單位數外，還包含有十一、十二、十三、十四、十五、二十、二十五、三十、三十三、三十七、四十、四十一、五十、五十六、六十等數。百以上的數字有(註2)：

- 一百 殷墟文字乙編 3024: [方登人百。]
- 二百 殷墟燕遺續編 62: [二百人王。]
- 三百 殷墟書契前編 3, 31, 2: [左右中人三百。]
- 四百 殷墟卜辭 1517: [四百。]
- 五百 殷墟書契前編 7, 92: [殷貞五百宰。]
- 六百 殷墟書契後編下 43: [六百。]
- 八百 殷契粹編 1079: [呂方征……八百。]
- 九百 殷墟卜辭 832: [乎……九百人。]
- 一千 殷契佚存 324: [丁未卜……王登千人。]
- 三千 殷契粹編 1078: [……三千，乎伐呂。]
- 四千 鐵雲藏龜 258: [四千。]
- 五千 殷墟書契續編 1, 13, 5: [貞登人五千。]
- 八千 殷契粹編 119: [口人八千在厥。]
- 一萬 庫方藏甲骨卜辭 310: [登婦好三千，登旅萬。]
- 三萬 殷契粹編 1171: [癸卯卜……其口三萬。]

(註1) 均為前中央研究院歷史語言研究所發掘殷墟所得；見胡厚宣，五十年來甲骨文發現的總結，第 73—74 頁（1951 年）。

(註2) 引見朱芳圃，甲骨學文字編（1933 年）。

甲骨文的數字記載，三萬是最高的記錄，又甲骨文三位以上複位數的記載，如：

卜辭通纂 19: [允戈伐二千六百五十六人。]

又 24: [允罕三百又卅八。]

殷墟文字乙編 2908: [玆一百六十四，兔一百五十七。]

又 764: [王申允狩……獲……兔……一百卅九卅九。]

這些數字有的連寫，如上所引[二千六百五十六]寫作[𠄎𠄎𠄎𠄎]，有的分寫，如殷墟文字甲編 2491的[三十]寫作[三]，殷墟書契編 4.28的[五十]寫作[𠄎]，卜辭通纂 34的[五千]寫作[𠄎]，又有的在數字中間加又或卅字，如上面所舉兩例(註3)。

周官: [十夫有溝，……百夫有洫，千夫有澮，……萬夫有川]，也是十進。

金文內記載的複位數如(註4)：

孟鼎銘: [自馭至於庶人六百又五十又九夫。]

齊侯鐘: [釐侯三百又五十家。]

子仲姜罍: [二百又九十又九邑。]

小孟鼎: [……孚人萬三千八十一人。]

記數法和甲骨文相同，如上[六百又五十又九]寫作[𠄎𠄎𠄎𠄎]。金文的[五十]和甲骨文的[五十]形體不同。

自然數產生後，必然要運算，運算離不了加減乘除，減不了便產生負數，除不盡便產生分數、正整數。分數、負數構成了有理數系，在中國周、秦間已具備了這個數系的雛型，其發展程序大概是先有正整數的運算，其次產生了分數，在後期產生了負數。上舉的甲骨文和金文，祇是數字的記錄，當然這些複位數的記錄，也說明是通過運算得來的。

殷墟書契前編 3, 23, 6:

(註3) 參看管燮初殷墟甲骨刻辭的語法研究，中國科學院(1953年10月)。

(註4) 引見郭沫若兩周金文辭大系圖象考釋(六)，第35—36頁。郭沫若，中國古代社會研究(1947年)。侯外廬，中國古代社會史論，第105頁(1955年6月)。

[五十犬 五十羊 五十豚
三十犬 三十羊 三十豚
二十犬 二十羊 二十豚
十五犬 十五羊 十五豚]

這一片甲骨文內的數字都是五的倍數，並且

$$50 - 30 = 4 \times 5 = 2^2 \times 5$$

$$30 - 20 = 2 \times 5 = 2^1 \times 5$$

$$20 - 15 = 1 \times 5 = 2^0 \times 5$$

含有等比的概念。金文內智鼎銘：「東宮酉曰：償智禾十秭，遺十秭爲廿秭。
(如)來歲弗償則倍冊秭。」(郭沫若奴隸制時代，人民(1952年)，卷首插圖和
釋文。)這裏有兩個運算，一是加法，一是乘法：

$$10 + 10 = 20$$

$$20 \times 2 = 40$$

爲金文中很少見的記錄。

金文中已有分數記載，如商鞅量(同註4)：

[十八年齊遣卿夫二衆來聘，冬十二月乙酉大良造鞅爰，積十
六尊五分尊(之)一爲升。]

尊卽爲寸字，此以

$$1 \text{ 升} = 16 \frac{1}{5} (\text{立方}) \text{ 寸。}$$

運算的記載 見於周、秦諸子百家的書籍中，如：

魏李悝法經盡地力之教，說：「今一夫挾五口，治田百畝，歲收畝一石半，
爲粟百五十石，除十一之稅十五石，餘百三十五石；食：人月一石半，五人終
歲爲粟九十石，餘有四十五石，石三十爲錢千三百五十，除社閭嘗新春秋之
祠用錢三百，餘千五十；衣：人率錢三百，五人終歲用千五百，不足四百五
十。」這一節內把加減乘除都敘述了。

墨子卷十五：雜守第七十一「升食終歲三十六石，參食終歲二十四石，四
食終歲十八石，五食終歲十四石(四)升，六食終歲十二石；升食食五升，參食
食三升(少半)，四食食二升半，五食食二升，六食食一升大半。」這說明了比

例運算。

$$36:24:18:14.4:12=5:3\frac{1}{3}:2\frac{1}{2}:2:1\frac{2}{3}$$

管子地員篇：「蕃殖果木，不若三土以十分之二，……以十分之三，……以十分之四，……以十分之五，……以十分之六，……以十分之七，……」又海王篇：「終月大男食鹽五升少半 $(5\frac{1}{3})$ ，大女食鹽三升少半 $(3\frac{1}{3})$ ，吾子食鹽二升少半 $(2\frac{1}{3})$ ，……令鹽之重，升加分疆 $(\frac{0.5}{10})$ 釜五十也，升加一疆 $(\frac{1}{10})$ 釜一百也，升加二疆 $(\frac{2}{10})$ 釜二百也。」這說明分數運算。古代音樂的三分損一，三分益一，都是分數運算。

這些都是很典型的例子，把運算過程鉅在著作內，說明當時能運算也是一種藝術。居延漢簡有許多履歷簡內都有「能書，會計」字樣，也說明了注重會計這一點。

管子卷十九地員篇，稱：「先主一，而三之，四開，以合九九。」即是 $1 \times 3^4 = 9 \times 9 = 81$ ，淮南子卷三，天文訓，稱：「故置一，而十一，三之爲積分，十七万七千一百四十七。」即是 $1 \times 3^{11} = 177,447$ ，却有了指數的初步概念。

負數的出現，大約在秦、漢間，九章算術已有正負術，可知在正負術前負數已存在。九章的正負術，在劉徽註九章（公元263年）前一百年，劉洪（公元158—183年時人）乾象曆亦有引稱，知必出於同源。

古代無理數的觀念，還未成立。 $\sqrt{2}$ 用方五斜七的分數來表示 $(\sqrt{2} = \frac{7}{5})$ 。漢張衡（公元78—139年）算 $\sqrt{3}$ 用 $\frac{26}{15}$ 替代。九章內的加借算和不加借算，都是算數的近似值公式。

漢簡數字 敦煌漢簡有（見流沙墜簡二屯成叢殘考釋）

巨斧三

守御器簿長椎三

□□三

木三

居延漢簡有（見居延漢簡考釋）

— — = = =

≡ ≡ ≡ ≡ =

⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥

四作三，五作≡，六作⊥，和孫子算經：「六不積，五不隻」，夏侯陽算經：「六不積聚，五不單張」都合。

又敦煌千佛洞卷子內數字：二十作卅，三十作卅，四十作卅，都是合書。見下敦煌千佛洞算書和算表（本書第 23 頁至 39 頁）。又敦煌千佛洞卷子內還有大寫數字（註 5）。

（註 5）參看李儼，「唐代算學史」，西北史地（西安），一卷一號（1938 年 2 月），第 63—95 頁；並見李儼，中算史論叢第五集，第一版，第 15—56 頁，北京，科學出版社（1955 年）。

2. 規矩和古代幾何學

根據地下發掘資料，古代勞動人民已知道如何在用器上飾以幾何圖案，從新石器時代石斧、石鏟所鑿圓形孔的整齊來看，知當時必定有畫圓形的工具。

上古應用規矩兩器製作方圓，其源很遠。甲骨文有規字作，象手執規畫圓(註1)，矩作，象曲尺形(兩個直角三角形)；又甲骨文石字作，象直角三角形。石崖石巖都是這個形象，當是矩的原來意義。兩足規畫圓，直角矩畫方，和後世(1)山東歷城孝堂山郭氏墓石祠(129年)；山東嘉祥縣漢武梁祠石室(145—167年)；山東沂南漢畫像石墓，都有[伏羲手執矩，女媧手執規]圖(註2)，(2)漢規矩磚圖(註3)，(3)東漢石刻(註4)，(4)高昌墳墓內神像圖(註5)，(5)吐魯番絹畫伏羲女媧神像圖(註6)，(6)隋高昌故址阿斯塔那墓室彩色絹畫(註7)所附規矩原形都同。長沙發掘出土的楚器有一柄兩足形木器，兩頭都尖形，現稱為木剪，或者即是古代的圓規(註8)。

(註1) 見朱芳圃，甲骨學文字編(1933年)引郭沫若說。

(註2) (一)山東歷城縣孝堂山，郭氏墓石祠[伏羲手執矩，女媧手執規]的畫像。看羅哲文，“孝堂山郭氏墓石祠”，文物，1961年4—5期，第48頁。(二)山東嘉祥縣漢武梁祠石室造像見金石索。摺片，北京圖書館有藏本。(三)山東沂南漢畫像石墓[東柱上段刻着手持矩和規的人首蛇身的伏羲女媧像，中間還夾個人。]見華東文物工作隊山東組，“山東沂南漢畫像石墓”，文物參考資料，1954年第8期，第40頁。

(註3) 原圖見嚴敦傑，“漢規矩磚考”，1941年9月8日時事新報，學燈。並見常任俠，民俗藝術考古論集，第55—59頁，正中書局(1943年9月)。

(註4) 聞一多全集第一冊，四版，開明書店(1949年)。

(註5) 見日本太谷光瑞西域考古圖譜上冊，圖版第53，第54。

(註6) 見黃文弼，吐魯番考古記，圖版第59，圖41，北京(1954年4月)。

(註7) 見斯坦因亞洲腹地考古記，圖C，IX。

(註8) 原器現藏北京歷史博物館。

關於規矩兩字，古書上引的很多，如宋李昉太平御覽（977年）工藝部九；如事物紀原七，引：墨子、孟子、荀子、莊子、韓非子、尸子、周禮，述規矩稱：宋墨翟，墨子卷七，天文志上第二十六：「輪匠執其規矩，以度天下之方圓。」孟子卷四離婁章句上：「孟子曰：離婁之明，公輸子之巧，不以規矩，不能成方圓。」孟子卷七盡心章句上：「孟子曰：梓匠輪輿，能與人規矩，不能使人巧。」周荀況荀子，賦篇第二十六：「圓者中規，方者中矩。」周莊周莊子徐無鬼第二十四：「方者中矩，圓者中規。」周韓非韓非子卷二，有度第六：「巧匠目意中繩，然必先以規矩爲度。」周禮冬官輿人：「圓者中規，方者中矩。」周尸佼尸子卷下：「古者倕爲規矩，準繩，使天下倣焉。」

又墨子經上，經說上：「（經）圓，一中同長也。（說）圓，規寫交也。（經）方，柱隅四維也。（說）方，矩寫交也。」又「我有天志，譬若輪人之有規，匠人之有矩。」

禮記卷之十五，經解第二十六：「禮之正國也，猶衡之於輕重也，繩墨之於曲直也，規矩之於方圓也。故衡誠縣，不可欺以輕重；繩墨誠陳，不可欺以曲直；規矩誠設，不可欺以方圓。」又禮深衣，稱：「古者深衣蓋有制度，以應規矩繩權衡。」

淮南子一原道訓：「規矩不能方圓，鉤繩不能曲直。」

淮南子十繆稱訓：「圓乎規，方乎矩。」

淮南子十一齊俗訓：「故天之員也不中規，地之方也不中矩，若夫規矩鉤繩者，巧之具也。」

淮南子十四詮言訓：「矩不正不可以爲方，規不正不可以爲員。」

淮南子十九修務訓：「夫无規矩，雖奚仲不能以定方圓；无準繩，雖魯班不能以定曲直。」

漢王符潛夫論卷第一讀學：「昔倕之巧，目茂圓方，心定平直，又造規繩矩墨，以誨教人。試使奚仲、公班之徒，釋此四度而倣倕，自製必不能也。」

史記卷二夏本紀：「禹」陸行乘車，水行乘舟，泥行乘橇（音敵），山行乘櫟（音局），左準繩，右規矩，載四時，以開九州，通九道。」

又班固前漢書二十九，溝洫志卷第九，稱：「夏書：禹堙洪水十三年，過家

不入門，陸行載車，水行乘舟，泥行乘犂，山行則揭。]

清古今圖書集成經濟彙編，考工典第一卷[規矩準繩部]，所錄，除上文外，尚有：

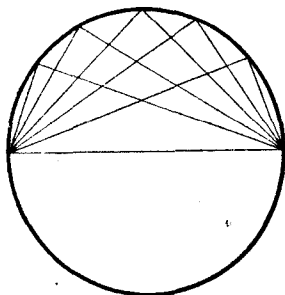
管子卷六：[雖有巧目利手，不如拙規矩之正方圓也，……。]

呂氏春秋卷二十四：[欲知平直，則必準繩；欲知方圓，則必規矩。]

呂氏春秋卷二十五：[爲圓必以規，爲方必以矩；爲平直必以準繩。]

上面所引墨子經上經說一節，便是古代對圓和方的定義，語很簡單而意義詳盡(註9)。

周髀算經稱：[合矩以爲方，環矩以爲圓。]直角三角形固定弦，其直角頂點的軌跡便是圓，即是[環矩以爲圓]的解釋(如下圖)。



甲骨文內屢稱(註10)：

[己巳王鋤丕田。](殷契粹編 1221)

[甲子貞於口方丕田。](又 1223)

[王令多×丕田。](又 1222)

[王令丕田隴。](又 1544)

這些方塊就是田，從此可知在殷代已知道如何將田地分割爲若干小方塊，具備了計算面積的知識，由此導引出後來的井田制度。九

章算術第一章之稱爲方田，實淵源有自。

周禮卷第十二，冬官考工記下：[車人之事：半矩謂之宣，一宣有半謂之櫪(音劬又音俱)，一櫪有半謂之柯，一柯有半謂之磬折。]

考工記是齊國的著作，這書內對角度及弧度都下了定義及說明。即：

$$90^{\circ}$$

矩

$$\frac{1}{2} \times 90^{\circ} = 45^{\circ}$$

宣

(註9) 錢臨照，“論墨經中關於形學、力學和光學的知識”，科學通報二卷八期，1951年8月。

(註10) 引自郭沫若奴隸制時代，重版本第7頁，北京，科學出版社(1962年)。