

第三版

材 料 力 學

(2)理論與題解

STRENGTH OF MATERIALS

PART I

Elementary Theory and Problems

S. TIMOSHENKO

詹彬義 編譯
姚克競 校正

復 文 書 局

第三版

材 料 力 學

(2) 理論與題解

STRENGTH OF MATERIALS

PART I

Elementary Theory and Problems

S. TIMOSHENKO 詹彬義 編譯
姚克兢 校訂

復 文 書 局

材料力學

(2)理論與題解

版權所有



翻印必究

中華民國七十二年十一月初版發行

平裝特價 144元 精裝特價 194元

著 作 者： S. TIMOSHENKO
編 譯 者： 詹 彬 義
校 正 者： 姚 克 競
發 行 者： 吳 主 和
發 行 所： 復 文 書 局

地址：臺南市東門路421巷28號
門市部地址：台南市林森路二段63號

電話：(062)370003 · 386937

郵政劃撥帳戶 32104號

No.28. LANE421 DONG-MEN
ROAD TAINAN TAIWAN REPUBLIC
OF CHINA
TEL: (062)370003 · 386937

本書局經行政院新聞局核准登記發給
出版事業登記證局版台業字第0370號

第一版序

材料強度第二冊，主要乃是為研究工程學的優等生和設計者寫的，作者盡力使本書包含具有實用價值的新發展——材料強度和彈性理論的領域。大多數的實例中均有完整的推演，除了極少數非經一般工程數學的極限，無法解之的題目僅給以最後的結果，在這些極少數的例子中，將討論其結果的實際應用，同時其完整的推演過程可由說明之參考書籍得之。

在第一章中，較複雜的角柱形桿件變曲將被研討。在彈性的基礎上桿件的變曲問題將予以詳盡的討論，並將其原理應用至研究鐵軌之應力和管路中之應力。三角級數應用於彎曲的問題也被討論，直接和橫放負載結合的重要近似公式將被推導。

於第二章中，曲形桿件的理論被完整的研討，此理論的應用於機械設計，藉由應力分析加以解說，如飛輪、鍵結、活塞環、和曲形管路在胡克定律中之解釋。

第三章有平板彎曲的理論，平板的曲度於角柱形狀和圓板的對稱彎曲有詳細的討論並有實際的應用，一些有關直角板的彎曲在固定的負載也有提及。

第四章中討論各部份之應力分佈，於構成體和對稱負載的形式中，這些問題對於船艦的設計者十分重要，其可用以估計內部壓力和機件之轉動張力和彎曲應力於薄壁的船艦上應力於厚壁圓柱中，縮小物件的應力和因慣性及不均勻熱導致之應力而造成之旋轉盤，及轉子之運動應力都有加以注意。

第五章包含有被壓縮體其周圍、形變之理論和薄板所導致之彈性不安性，這些問題在現代的結構——截面積減至最小而導致使用較強化之材料並成輕重量——是極為重要的。在許多事件中，工程結構之失敗乃歸因於彈性不安性而非其部份材料缺乏強度。

第六章將研討由於凹構洞坑在桿件上而導致敏感的變化形成不規則的應力分佈情形而且將要研討應力濃度之實際科學意義，光學彈性法——一種非常有效得以研究應力濃度之方法，一也將加以描述。

薄膜類似物於扭力上的問題及其應用於研究凹角處之應力濃度如

捲曲和管狀部份，將予以解釋各式半徑的圓軸也將加以討論，而且一種電的類似體也將利用用以說明此種圓軸上皮帶之各部應力。

最後一章，材料之機械性質，將加以討論以探討基本原則為主，甚於標準方法及操縱儀器的陳述，單一晶體之機械性質其現代研究之結果和這些資料之實際科學意義，將加以陳述，像金屬之強度和金屬之疲乏，在高溫下之影響在現代之機械設計有決定的實際需要。

在這範圍的問題中較特別者將由參考書籍解之。其中包括各式各樣的強度理論將加以研討，其主要之課題乃在建立在不同的應力條件下其作功應力的方法和理論之關係。

本書可用作教材但必須強調其為進修的科目，依作者的經驗，本書可分為三大部份：(I) 第一、三、五章之體系乃為有興趣於結構工程學之優等生在探討(II) 第二、四、六章乃是為有興趣於機械設計者所寫(III) 第七章以材料測試實驗為基礎而加以證明，作者認為依材料機械性質的基礎與建立這些性質和作功應力的關係在設計上不同情形下有其實際的重要性，且應花較多的心力於此方面之工程課程上。

作者藉著這個機會感謝給其建議原稿校正的朋友的幫助，特別是任教於Engineering College of the University of Michigan的數學教師和技師，Messrs. W. M. Coates 和L.H. Donnell 及 the Department of Engineering Research of the University of Michigan 的Mr. F. L. Everett 他也感激 Mr. F. C. Wilharm 為其製備繪圖，Mrs. E. D. Webster 為其原稿打字和D. Van Nostrand 公司其細心地刊印此書！

第二版序

在纂寫此書之新版時，對於書中原有的優處均予以保留。爲了使本書能臻至完善以及符合時代，除了把最近在探討結構材料之性質的實驗論文與切力分析納入以外，並且還加入許多的新理論。

而所添增部份，可分爲下列幾點：

1. 在細長且薄壁的結構方面上，對其彎曲、壓縮與扭力上均有更完全的討論。對於這種結構，其目前不但能在飛機的結構上提供出廣泛的應用，而且也在本書的更新上，增添了該部門的許多問題研究。
2. 在塑物變形運動章節的部份上，其除了能在過塑物極限的情形下，處理樑軸的彎曲與扭力外，並且還可以在高溫下，置理在薄壁長柱內的材料之塑性流動。
3. 加入了大量的實驗特性內容，其中包括了結構材料在高溫下的動向，以及金屬在逆切力下情況下的疲乏現象（尤其是在高聚切力的情形下）。
4. 本書最重要的增添部份是在樑臂與彈力根基的處理上，即是在兩部章節上；(1)曲面化棒子理論與板殼理論之章節上與(2)聚切力之章節上（其中包括了最新之光彈力試驗的結果）。

由於此書的第一版問世，作者的另三部較高深的書籍也相繼出版，即“*Theory of Elasticity*”，“*Theory of Elastic Stability*”，和“*Theory of Plates and Shell*”。對於這些書的參考資料均列於此書的各頁處上，尤其是出現在有最後結果，但沒有數學式推導的章頁上。

本書的增添部份，作者是希望能給在研究材料力道，予以新而先進的代表，使其能對有志於工程機械的研究生，以及處理複雜之切力分析的設計工程師們有所助益。

Stephen P. Timoshenko

加州，Palo Alto

1941，6月12日

第三版序

在纂寫此書之最新版時，已將大量的新資料加入於其中矣。本書不但加入最新的參考資料，而且還參入了不少的解答問題與圖形。本書內容的最主要改變，是在扭力，塑物變形，和材料機械性質之三方面上。

在扭力方面上，不僅對具有中間電池的管狀部份之扭歪問題有所考慮，而且還顧及到在開口截面上，其薄壁部份的扭性彎曲。這些課題的每一項，在設計薄壁結構上皆是非常的重要，譬如在飛機的結構成份上，更是不可忽視。本書除了在塑物變形的章節上，對極限設計的基本原理加以討論外，並且對於以結構分析來作為應用的事例，特別予以說明之。

而最重要增添的部份，還是在於材料機械性質之章節上，就僅此章，其便包括了160頁以上。之所以要添這些章節，其目的就是要對目前在結構材料之性質的實驗發展上，集中注意力。其中的一些課題是這樣的：(1)暇癖在對脆物的耐力，與尺寸效應的影響；(2)單結晶與聚結晶樣品的結果之相互比較；(3)材料在二、三度切力，以及各種力理論下的測試；(4)材料在衝擊下的力道；(5)金屬在各種切力狀況下的疲乏，以及如何防止機械零件疲乏的方法；(6)於高溫，匍匐現象，以及在設計時使用匍匐測試資料時，其材料在力道上之影響性。若是讀者想對這些章節的研究能更上一層樓，則對於目前文獻的參考資料將會有所裨益的。最後，在本書的結論文章上，對於工作切力 (working stress) 之適當選擇的資料，將會有詳細的交待。

作者希望：由於本書的添增，不但能使研究所的教學課程更加完善，而且在對機械和結構工程方面的設計人員與研究人員有所助益。

結尾之際，作者在此向史丹福大學的 James M. Gere 教授致謝，感謝其在校正與校對上，所做的相助與建議。

S. Timoshenko

史丹福大學

1936年，2月10號

材料力學 (第二冊)

目 錄

第一章	樑的彈性基礎	1
第二章	合併軸向與橫向的載荷之樑	22
第三章	樑彎曲的特殊問題	49
第四章	薄板與殼	63
第五章	桿、板、殼之撓曲	116
第六章	關於軸之形變	163
第七章	扭轉	185
第八章	應力的集中	232
第九章	超過彈性極限外的變形	262
第十章	材料之機械性	298

材料力學 第二冊

第一章 樑的彈性基礎

(*Beams on Elastic Foundations*)

1. 無限樑 *Beams of Unlimited Length* 若我們以連續彈性基礎考慮無限長之角柱樑，當此樑受力偏差時，產生於每一點之連續反應強度與受力偏轉點成比例，在此情形下，每一單位樑的反應可以 ky 表示之， y 代表偏轉， k 是一常數，通常稱為基礎模數 (*modulus of the foundation*)。當偏轉為單一時，此常數即表示每一單位長之反應，在許多實例中，簡單假設連續基礎反應與偏轉成比例，均能令人滿意，例如，在火車鐵路軌道之實例裏，以此假設所得之解答十分吻合實際之測量，研究偏轉曲線，我們可用微分方程式

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (a)$$

q 表示施重於樑上之強度，未負重部分樑上之力僅為強度 ky 之連續性反應，故 $q = -ky$ ，(a) 變為

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky \quad (1)$$

若

$$\sqrt{\frac{k}{4EI_z}} = \beta \quad (2)$$

則方程式(1)可示如下：

$y = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x)$
經由變換數字，方程(b)易換為方程(1)，在實例中，常數 A 、 B 、 C 、 D 必須由已知情況下之特定點決定之。

舉一例來說，一單一集中重力施於一無限樑上（如圖 1 a），因為對稱的關係，我們只須考慮重力右邊部分的樑（圖 1 b），在應用

方程(b)時，必須先找到常數值，合理地假定距離 P 力無限遠之點，偏轉與屈曲均將消失，此情形必須當方程式(b)中之 A 、 B 為零方可達成，故而樑右方部份之偏轉曲線變成：

$$y = e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x) \quad (c)$$

剩下之兩個積分常數 C 和 D 可由原點 $x = 0$ 之情形下得知，在這點上，偏轉曲線必有一水平切線，故

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

或以 y 值代入(c)式

$$e^{-\beta x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x + C \sin \beta x - D \cos \beta x)_{x=0} = 0$$

$$C = D$$

(c)式變為

$$y = C e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (d)$$

此方式程之連續導出函數為：

$$\frac{dy}{dx} = -2\beta C e^{-\beta x} \sin \beta x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\beta^2 C e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \quad (e)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 4\beta^3 C e^{-\beta x} \cos \beta x \quad (f)$$

常數 C 可由 $x = 0$ 時樑右方部分剪力 (圖 1 b) 相當於 $-\left(\frac{P}{2}\right)$ 之事

實中得知 (參看第一部分 P. 75 - 6)

$$(V)_{x=0} = \left(\frac{dM}{dx} \right)_{x=0} = -EI_x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -\frac{P}{2}$$

或用(f)式

$$EI_x \cdot 4\beta^3 C = \frac{P}{2}$$

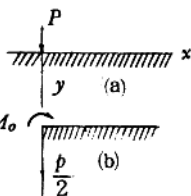


圖 1

$$C = \frac{P}{8\beta^3 EI_s}$$

代入(d)式與(e)式，得到下列偏轉，彎曲矩曲線方程式：

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{8\beta^3 EI_s} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &= \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$M = -EI_s \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \quad (4)$$

(3)、(4)式以圖示之，均呈一遞減幅之波度（圖2）

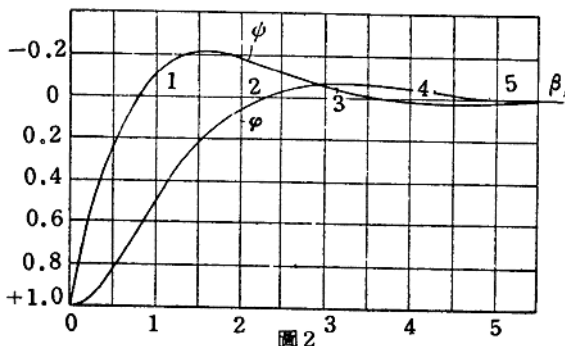


圖2

a 由 $\cos \beta x$ 和 $\sin \beta x$ 之週期限是：

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{4EI_s}{k}} \quad (5)$$

簡化偏轉、彎曲矩與剪力之計算一數字表列如下（表1），其中

$$\left. \begin{aligned} \phi &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \psi &= -e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) \\ \theta &= e^{-\beta x} \cos \beta x; & \zeta &= e^{-\beta x} \sin \beta x \end{aligned} \right\}$$

ϕ 和 ψ 圖示於圖2中。

表 1

βx	φ	ϕ	θ	ζ	βx	φ	ϕ	θ	ζ
0	1.0000	1.0000	1.0000	0	3.6	-0.0366	-0.0124	-0.0245	-0.0121
0.1	0.9907	0.8100	0.9003	0.0903	3.7	-0.0341	-0.0079	-0.0210	-0.0131
0.2	0.9651	0.6398	0.8024	0.1627	3.8	-0.0314	-0.0040	-0.0177	-0.0137
0.3	0.9267	0.4888	0.7077	0.2189	3.9	-0.0286	-0.0008	-0.0147	-0.0140
0.4	0.8784	0.3564	0.6174	0.2610	4.0	-0.0258	0.0019	-0.0120	-0.0139
0.5	0.8231	0.2415	0.5323	0.2908	4.1	-0.0231	0.0040	-0.0095	-0.0136
0.6	0.7628	0.1431	0.4530	0.3099	4.2	-0.0204	0.0057	-0.0074	-0.0131
0.7	0.6997	0.0599	0.3798	0.3199	4.3	-0.0179	0.0070	-0.0054	-0.0125
0.8	0.6354	-0.0093	0.3131	0.3223	4.4	-0.0155	0.0079	-0.0038	-0.0117
0.9	0.5712	-0.0657	0.2527	0.3185	4.5	-0.0132	0.0085	-0.0023	-0.0108
1.0	0.5083	-0.1108	0.1988	0.3096	4.6	-0.0111	0.0089	-0.0011	-0.0100
1.1	0.4476	-0.1457	0.1510	0.2967	4.7	-0.0092	0.0090	0.0001	-0.0091
1.2	0.3899	-0.1716	0.1091	0.2807	4.8	-0.0075	0.0089	0.0007	-0.0082
1.3	0.3355	-0.1897	0.0729	0.2626	4.9	-0.0059	0.0087	0.0014	-0.0073
1.4	0.2849	-0.2011	0.0419	0.2430	5.0	-0.0046	0.0084	0.0019	-0.0065
1.5	0.2384	-0.2068	0.0158	0.2226	5.1	-0.0033	0.0080	0.0023	-0.0057
1.6	0.1959	-0.2077	-0.0059	0.2018	5.2	-0.0023	0.0075	0.0026	-0.0049
1.7	0.1576	-0.2047	-0.0235	0.1812	5.3	-0.0014	0.0069	0.0028	-0.0042
1.8	0.1234	-0.1985	-0.0376	0.1610	5.4	-0.0006	0.0064	0.0029	-0.0035
1.9	0.0932	-0.1899	-0.0484	0.1415	5.5	0.0000	0.0058	0.0029	-0.0029
2.0	0.0667	-0.1794	-0.0563	0.1230	5.6	0.0005	0.0052	0.0029	-0.0023
2.1	0.0439	-0.1675	-0.0618	0.1057	5.7	0.0010	0.0046	0.0028	-0.0018
2.2	0.0244	-0.1548	-0.0652	0.0895	5.8	0.0013	0.0041	0.0027	-0.0014
2.3	0.0080	-0.1416	-0.0668	0.0748	5.9	0.0015	0.0036	0.0026	-0.0010
2.4	-0.0056	-0.1282	-0.0669	0.0613	6.0	0.0017	0.0031	0.0024	-0.0007
2.5	-0.0166	-0.1149	-0.0658	0.0492	6.1	0.0018	0.0026	0.0022	-0.0004
2.6	-0.0254	-0.1019	-0.0636	0.0383	6.2	0.0019	0.0022	0.0020	-0.0002
2.7	-0.0320	-0.0895	-0.0608	0.0287	6.3	0.0019	0.0018	0.0018	+0.0001
2.8	-0.0369	-0.0777	-0.0573	0.0204	6.4	0.0018	0.0015	0.0017	0.0003
2.9	-0.0403	-0.0666	-0.0534	0.0132	6.5	0.0018	0.0012	0.0015	0.0004
3.0	-0.0423	-0.0563	-0.0493	0.0070	6.6	0.0017	0.0009	0.0013	0.0005
3.1	-0.0431	-0.0469	-0.0450	0.0019	6.7	0.0016	0.0006	0.0011	0.0006
3.2	-0.0431	-0.0383	-0.0407	-0.0024	6.8	0.0015	0.0004	0.0010	0.0006
3.3	-0.0422	-0.0306	-0.0364	-0.0058	6.9	0.0014	0.0002	0.0008	0.0006
3.4	-0.0408	-0.0237	-0.0323	-0.0085	7.0	0.0013	0.0001	0.0007	0.0006
3.5	-0.0389	-0.0177	-0.0283	-0.0106					

用(6)式與(d)-(f)，得

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P\beta}{2k} \varphi(\beta x), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P\beta^2}{k} \zeta(\beta x), \\ M &= -EI, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} \phi(\beta x) \\ V &= -EI, \frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{P}{2} \theta(\beta x) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由這些方程式與表1，任何橫斷樑的偏轉、斜率、彎曲矩和剪力都可計算，而最大偏轉和最大彎曲矩發生於原點，故

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{P\beta}{2k} \quad (8)$$

$$M_0 = (M)_{x=0} = \frac{P}{4\beta} \quad (9)$$

用此解答(方程式(3))和重合原理，任何其他型式之重力對無限樑造成之偏轉均可求解。

以一長度 ℓ 之整體重力施於一無限長樑上為例(圖3)考慮任一點A，以 c 、 d 表示由此點至承重樑兩端點之距離，A點之偏轉可由(3)式中 qdx 代替 P 而得知

$$\frac{qdx}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x)$$

大於長度 ℓ ，A點造成之偏轉變成

$$\begin{aligned} y &= \int_0^b \frac{qdx}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &+ \int_0^c \frac{qdx}{8\beta^3 EI} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &= \frac{q}{2k} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c) \end{aligned} \quad (8)$$

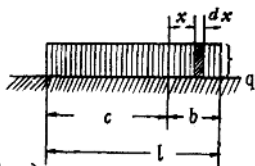


圖3

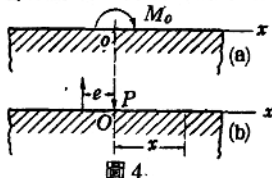
若 c 和 b 大，則 $e^{-\rho b}$ 和 $e^{-\rho c}$ 之值小，此偏轉 (g) 式) 約等於 $\frac{q}{k}$ ，也就是說，在遠離重力部分端點之彎曲可予忽視，而假設整體重力 q 直接轉達於彈性基礎，若 A 於重力部分之端點上，即 $c = 0$ ， $b = \ell$ ， $e^{-\rho c} \cos \beta c = 1$ ，假設 ℓ 大，則 $e^{-\rho b} \cos \beta b \approx 0$ ， $y = \frac{q}{2k}$ ，也就是說，偏轉值僅為上述之一半。

以相同方式應用 (4) 式， A 點之彎曲矩可求得，若 A 為重力部分外之點， b 、 c 分別代表此點離彎上重力部分兩端點之較大與較小的距離，則 A 點之偏轉是：

$$\begin{aligned} y &= \int_0^b \frac{q dx}{8 \beta^3 EI_r} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &\quad - \int_0^c \frac{q dx}{8 \beta^3 EI_r} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &= \frac{q}{2k} (e^{-\rho c} \cos \beta c - e^{-\rho b} \cos \beta b) \end{aligned} \quad (h)$$

當 $c = 0$ ，令 $b = \ell$ 為一大數值，則得到偏數值 $\frac{q}{2k}$ ，符合我們前述之結論，當 b 和 c 距離增加時，偏轉 (h) 式) 減少， b 、 c 更大時，則偏轉趨近 0。

力偶 (couple) 作用於無限長樑之例子，如圖 4 a，也可由第 (3) 式單一重力的解答來分析，力偶的動作相當於圖 4 b 中之兩個 P 力



。若 P_e 接近 M_0 則 e 趨近於 0，用 (7) 式中的第一式，我們可得離原點 x 距之偏轉

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{P\beta}{2k} \{ \varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+e)] \} \\
 &= \frac{M_0\beta}{2k} \cdot \frac{\varphi(\beta x) - \varphi[\beta(x+e)]}{e} = -\frac{M_0\beta}{2k} \cdot \frac{d\varphi}{dx}
 \end{aligned}$$

由(7)式

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\beta\zeta$$

由力偶 M_0 造成之偏轉曲線變成：

$$y = \frac{M_0\beta^2}{k} \zeta(\beta x) \quad (10)$$

微分此方程式，得到：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_0\beta^3}{k} \psi(\beta x)$$

$$M = -EI_x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0}{2} \theta(\beta x) \quad (11)$$

$$V = -EI_x \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{M_0\beta}{2} \varphi(\beta x)$$

用這些方程式和表 1，我們可計算任何樑橫斷面之偏轉、斜率、彎曲矩和剪力。

現我們來考慮數個載荷作用於一無限樑上。舉例言，火車車輪壓力造成鐵軌之彎曲將被論及，下述分析軌道應力的方法是植基於在軌道下有一連續彈性支柱的假設上。因為相對於偏轉曲線之波長 a ，接合處間的距離很小，故此假設適當，爲了求得基礎模數之 k 值，造成接合處偏轉的載荷必須被接合間隔分割，即假設接合處由兩個相當於軌道壓力的載荷對稱地負重，舉例來說，若接合處在兩個載荷各 10 10,000 磅下，降低 0.3 吋，接合空間是 22 吋，則

$$k \times \frac{10,000}{0.3 \times 22} = 1,500 \text{ 磅/平方吋}$$

對單一載荷 P ，(8)式和(9)式得最大偏轉和最大彎曲矩，因軌道彎曲造

成之最大應力是：

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \frac{P}{4\beta Z} = \frac{P}{4Z} \sqrt{\frac{4EI_z}{k}} \quad (i)$$

Z 表示軌道之斷面模數

爲了比較軌道應力，(i)式可化爲下列形式：

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \cdot \frac{A\sqrt{I_z}}{4Z} \sqrt{\frac{4E}{k}} \quad (j)$$

A 是軌道橫斷面之面積，因幾何相似的橫斷面，(j)式右方第二因素保持不變，又第三因素不隨軌道大小而變動，最大應力與橫斷面積成反比，也就是和每一單位長軌道重量成反比。

最大壓力 R_{max} 估計值可由最大降低值、接合間隔 ℓ 和基礎模數的乘積得知，故用 (8) 式得到

$$R_{max} = \frac{P\beta}{2k} \ell k = \frac{P\beta\ell}{2} = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{k\ell^4}{4EI_z}} \quad (k)$$

由此可見，接合處之壓力隨接合間隔 ℓ 而變，在 (j) 式與 (k) 式中 k 以四次方根出現，故決定 k 值錯誤， σ_{max} 和 R_{max} 僅有更小的錯誤。

當數個載荷作用於軌上，重合的方法必須用及，舉一數字例來說明計算的方法，有一 100 磅軌，斷面爲 $I_z = 44$ 吋，接合間隔 $k = 1500$ 磅/平方吋，由 (2) 式

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{4EI_z}} = \sqrt{\frac{1500}{4 \times 30 \times 10^6 \times 44}} = \frac{1}{433} \text{ 吋}^{-1}$$

由 (5) 式

$$a = \frac{2\pi}{\beta} = 272 \text{ 吋}$$

以四個相等車輪載荷 66 吋之系統爲例，若我們定原點於第一個輪子的觸點上，其他輪子之 βx 值示於表 2， φ 與 ψ 亦一併示之。

表 2

	1	2	3	4
βx	0	1.52	3.05	4.57
ϕ	1	-0.207	-0.051	0.008
φ	1	0.230	-0.042	-0.012

四個載荷於軌上發生重合作用後，由(4)式得第一輪下之彎曲矩

$$M_1 = \frac{P}{4\beta} (1 - 0.207 - 0.051 + 0.008) = 0.75 \frac{P}{4\beta}$$

即彎曲矩較單一載荷 P 少 25%，同方法可得第二輪：

$$M_2 = \frac{P}{4\beta} (1 - 2 \times 0.207 - 0.051) = 0.535 \frac{P}{4\beta}$$

可見因為鄰接輪之作用使第二輪下之彎曲矩較第一輪小，此事實曾經無數次試驗測量得以證明。

用(3)式與表 2 中之最後一行數值，可得下列第一輪之偏轉：

$$\delta_1 = \frac{P\beta}{2k} (1 + 0.230 - 0.042 - 0.012) = 1.18 \frac{P\beta}{2k}$$

其他點之偏轉亦可以同法得知。

重合方法也適用於任何排列和任何間隔合併載荷造成軌之彎曲的決定。

上述分析值基於軌支柱能展開負反應的假設，因在軌與道釘間通常有間隙，對軌上方力矩有阻力，造成軌上第一輪與最後輪下之彎曲矩漸增的趨勢，一般而言，上述靜載荷彎曲軌的理論和所做的實驗結果相同。

問 題

1 用表 2 之資料，建立一軌之彎曲矩圖，假設輪子壓力為 40,000 磅此圖應表示在輪間斷面之力矩為負，機車運動時，軌視彎曲應力的反作用而定，最後可能會碎裂。