

GEO-SPATIAL INFORMATION SCIENCE

● 高等学校测绘工程系列教材

普通高等教育测绘类规划教材

(第三版)

# 控制测量学

下册

孔祥元 郭际明 主编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

高等学校测绘工程系列教材

---

普通高等教育测绘类规划教材

# 控制测量学

下册

(第三版)

孔祥元 郭际明 主编

武汉大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

控制测量学·下册/孔祥元,郭际明主编·—3版·—武汉:武汉大学出版社,2006.11

高等学校测绘工程系列教材

普通高等教育测绘类规划教材

ISBN 7-307-05275-X

I. 控… II. ①孔… ②郭… III. 控制测量—高等学校—教材  
IV. P221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119416 号

责任编辑:任翔 责任校对:程小宜 版式设计:支笛

---

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×1092 1/16 印张:21 字数:505千字

版次:1996年10月第1版 2002年2月第2版

2006年11月第3版 2006年11月第3版第1次印刷

ISBN 7-307-05275-X/P·123

定价:29.00元

---

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

## 第二版前言

自《控制测量学(下册)》第一版(1996年)出版以来,测绘学科特别是大地、控制测量学领域的测绘科学技术有了很大的发展和进步。同时,随着全国高等教育的改革与发展,高等测绘工程专业本科教育也出现了一些新变化,为适应测绘学科建设与测绘高等教育发展的这种新情况,特对本书第一版的某些内容作了修订。

《控制测量学(下册)》第二版主要是对第一版中的有关内容进行了增补。增加的主要内容有:(1)地心纬度及归化纬度坐标系,主曲率半径的计算,子午线弧长与大地纬度的互算;(2)大地主题算法述评,白塞尔大地主题算法,高斯投影簇以及兰勃脱投影;(3)三维、二维及一维大地坐标系的换算等。此外,对原书理论推导不够详细的地方,也作了必要的补充和修正。上述内容简明扼要,适宜计算机编程,学以致用。

本书第二版内容曾经在武汉大学测绘学院(包括原武汉测绘科技大学)测绘工程专业本科日校及函授教学中使用。编者认为,《控制测量学(下册)》第二版,可以更好地满足当前测绘工程专业本科教学的需要。

本书第二版增补的内容由孔祥元教授在征求原书有关编者意见的基础上编写而成。

编者

2002年1月

## 第三版前言

进入 21 世纪以来,由于空间技术、计算机技术、通信技术以及地理信息技术等相关科学技术和我国各项建设事业的快速发展,测绘科学的理论基础、工程技术体系、研究领域以及科学目标和服务对象等都发生着深刻的变化。作为测绘科学的重要组成部分,《控制测量学》对这些变化显得尤为突出和鲜明:

空间测量技术特别是人造地球卫星定位与导航技术给控制测量提供了全新的现代测量手段,促进控制测量更加生机勃勃的发展;

工程控制网优化设计理论和应用得到长足发展,测量数据处理和分析理论取得许多新成果;

信息时代的控制测量仪器和测量系统已形成数字化、智能化和集成化的新的发展态势,空间测量和地面测量仪器和测量系统出现互补共荣的新的发展格局;

电子计算机促进控制测量工作及工程信息管理等工作向着自动化、网络化、标准化和规范化方向发展,适应不同工程控制测量信息管理的信息系统正在逐步走向成熟,等等。

毫无疑问,控制测量必将在国民经济建设和社会发展中,在防灾、减灾、救灾及环境监测、评价及保护中,在发展空间技术及国防建设中,以及在地球科学及相关科学的研究等广大领域中,有着重要的地位和作用,有着广阔的发展空间和服务领域。控制测量学的发展已进入了新时期。

与此同时,随着全国高等教育的改革和发展,我国在高等学校设置了测绘工程本科专业,这是由传统测绘中的几个分支学科专业综合而成的,体现了这种多学科之间的交叉、渗透和融合。鉴于测绘科学和测绘教育这种新的发展形势,在全国高等学校测绘学科教学指导委员会和武汉大学测绘学院的指导和大力支持下,我们本着宽口径、厚基础和培养复合型人才的发展战略和教改精神,重新调整、组织和安排了《控制测量学》的教学计划。经过几年的摸索和实践,我们对《控制测量学》课程教学积累了一定的教学经验,因此,在控制测量学下册第二版的基础上,特为测绘工程本科专业新编写了本书第三版。

全书共 7 章。按照内容的相关性把它划分为相对独立的三个部分,即地球椭球及其数学投影变换的原理与应用,常用大地控制测量坐标系和测量控制网平差计算与数据管理。其中,地球椭球及其数学投影变换的原理与应用部分包括第 7、8、9(接上册章序)三章:第 7 章椭球面上的测量计算,主要讲椭球几何数学性质,大地线,地面观测元素归算至椭球面,大地主题解算即高斯平均引数法、白赛尔法和微分方程的数值解法,本章增加一些必要内容,理论阐述更简明,公式推导更详细,结论公式均适宜计算机编程,且都有计算实例;第 8 章椭球面元素归算至高斯平面—高斯投影,主要讲地图数学投影变换的基本概念(这是新扩展的内容),高斯投影坐标正反算公式及算例,平面子午线收敛角公式,方向改化公式,距离改化公式,高斯投影的邻带坐标换算,通用横轴墨卡托投影(UTM)和高斯投影族的概念,兰勃脱投影概述,工程测量投影面与投影带选择的概念;第 9 章控制测量概算,用实例说明以上理论的应用。作为本书的

另一部分重要内容是第 10 章常用大地测量坐标系及其变换,主要讲地球的运动,参考系的定义和类型,地心坐标系(WGS-84 世界大地坐标系,国际地球参考系统(ITRS)与国际地球参考框架(ITRF)),参心坐标系(我国的参心坐标系)及坐标系间的换算,这是依据工程控制测量的特点和理论结合实际的原则重新编写的一章,给出关于常用大地测量坐标系及其变换方面简明而又完整的基础理论知识。本书最后一部分是测量控制网平差计算及数据管理,包括以下 3 章:第 11 章工程控制网条件平差,第 12 章工程控制网间接平差,第 13 章测量控制网近代平差与数据管理,在这一章中详细介绍工程控制网相关分解平差(条件分解解法、间接分解解法和序贯平差),大地控制测量数据处理的数学模型(GPS 基线向量网在地心空间直角坐标系中平差的数学模型、GPS 观测值与地面观测值在参心空间坐标系中平差的数学模型、GPS 观测值与地面观测值在二维坐标系中平差的数学模型),最后以例介绍了工程控制网数据库系统设计概念。各章内容均有算例及相应的程序,学以致用。

由此可见,第三版总的保持了第二版的框架结构,对具体章节的编排和内容则作了较大的改动:增加或删除了一些章节,对有些章节给予合并、分开、顺序调整,个别章节则作了重新安排,绝大多数章节的内容作了必要的增补、删减或重写。从而使该书体系更完整,内容更全面,重点更突出,理论更结合实际,充分反映了本课程的全貌和最新发展成果。修订本曾在武汉大学测绘学院和许多兄弟院校测绘工程专业本科教学中使用,深受学生和老师们欢迎。编者认为,《控制测量学》下册第三版可以更好地满足当代测绘工程专业本科教学的需要。

本书第三版由孔祥元和郭际明主编,参加编写的还有刘宗泉、邹进贵、丁士俊、孔令华、徐忠阳和范士杰。

受编者水平所限,书中难免有不足之处,欢迎读者批评指正。

编者

2006 年 6 月

# 前 言

控制测量学是高等学校测绘工程专业的一门主干课程,在专业课程设置中具有重要地位和作用。十几年来,在学校大力支持下,我们在控制测量学教学和课程建设等方面做了一定的改革工作,在总结日校和成人教育多年教学经验和科研成果的基础上,根据现行教学大纲,特为测绘工程专业本科学学生新编了这套《控制测量学》上册及下册教材。

《控制测量学》下册内容主要讲述测量控制网计算的理论和方法。近年来,由于电子计算机在测量计算中的普及与应用,测量平差理论迅速发展及我国新大地坐标系建立等新成就,促使《控制测量学》下册内容发生了很大变化。首先,在地球椭球、高斯投影及平差计算等章节的理论和公式推导中尽量简化,并舍去那些不必要的级数展开及手算表格,使其适宜电算程序的编写和应用;在阐述经典平差方法的基础上,概述了近代平差的理论及其在工程测量中的应用,其中包括控制网逐次分解平差, GPS 网与地面网联合平差以及控制测量数据管理系统等内容;此外,还简介了参考椭球定位,1980 年国家大地坐标系,坐标变换及工程测量中投影带和投影面选择等概念。力求在加强基础理论和方法的基础上,理论联系实际,反映近代控制测量新发展。

本书由孔祥元和梅是义主编,参加编写工作的有:张琰、岑虹、姚优华、郭际明等。

本书承邢永昌教授、刘近伯副教授初审,朱鸿禧教授复审,并经测绘教材评委会审定通过,作为全国普通高等教育测绘类规划教材。在审定过程中提出了许多宝贵的意见和建议,在此谨致衷心的感谢。由于编者水平有限,对书中可能存在的不足和错误之处,敬请读者批评指正。

编 者

1996 年 5 月

# 目 录

## 第 3 部分 地球椭球及其数学投影变换的原理与应用

第 7 章 椭球面上的测量计算	1
7.1 地球椭球的基本几何参数及其相互关系	1
7.1.1 地球椭球的基本几何参数	1
7.1.2 地球椭球参数间的相互关系	3
7.2 椭球面上的常用坐标系及其相互关系	3
7.2.1 各种坐标系的建立	3
7.2.2 坐标系间的关系	5
7.2.3 站心地平坐标系	9
7.3 椭球面上的几种曲率半径	10
7.3.1 子午圈曲率半径	10
7.3.2 卯酉圈曲率半径	11
7.3.3 主曲率半径的计算	12
7.3.4 任意法截弧的曲率半径	14
7.3.5 平均曲率半径	15
7.3.6 $M, N, R$ 的关系	16
7.4 椭球面上的弧长计算	16
7.4.1 子午线弧长计算公式	16
7.4.2 由子午线弧长求大地纬度	20
7.4.3 平行圈弧长公式	21
7.4.4 子午线弧长和平行圈弧长变化的比较	21
7.4.5 椭球面梯形图幅面积的计算	22
7.5 大地线	23
7.5.1 相对法截线	23
7.5.2 大地线的定义和性质	24
7.5.3 大地线的微分方程和克莱劳方程	25
7.6 将地面观测值归算至椭球面	26
7.6.1 将地面观测的水平方向归算至椭球面	27
7.6.2 将地面观测的长度归算至椭球面	29



7.7 大地测量主题解算概述	31
7.7.1 大地主题解算的一般说明	31
7.7.2 勒让德级数式	33
7.7.3 高斯平均引数正算公式	36
7.7.4 高斯平均引数反算公式	39
7.7.5 白塞尔大地主题解算方法	40
7.7.6 用大地线微分方程的数值积分方法来解算大地主题问题	55
<b>第8章 椭球面元素归算至高斯平面——高斯投影</b>	<b>58</b>
8.1 地图数学投影变换的基本概念	58
8.1.1 地图数学投影变换的意义和投影方程	58
8.1.2 地图投影的变形	59
8.1.3 地图投影的分类	62
8.2 高斯投影概述	63
8.2.1 控制测量对地图投影的要求	63
8.2.2 高斯投影的基本概念	64
8.2.3 椭球面三角系化算到高斯投影面	66
8.3 正形投影的一般条件	68
8.4 高斯投影坐标正反算公式	72
8.4.1 高斯投影坐标正算公式	72
8.4.2 高斯投影坐标反算公式	75
8.4.3 高斯投影正反算公式的几何解释	77
8.5 高斯投影坐标计算的实用公式及算例	78
8.5.1 适用于查表的高斯坐标计算的实用公式及算例	78
8.5.2 适用于电算的高斯坐标计算的实用公式及算例	81
8.6 平面子午线收敛角公式	87
8.6.1 平面子午线收敛角的定义	87
8.6.2 公式推导	87
8.6.3 实用公式及算例	89
8.7 方向改化公式	90
8.7.1 方向改化近似公式的推导	91
8.7.2 方向改化较精密公式的推导	92
8.7.3 实用公式及算例	94
8.8 距离改化公式	96
8.8.1 $s$ 与 $D$ 的关系	96
8.8.2 长度比和长度变形	97
8.8.3 距离改化公式	99
8.8.4 距离改化的实用公式及算例	100

8.9	高斯投影的邻带坐标换算	101
8.9.1	应用高斯投影正、反算公式间接进行换带计算	102
8.9.2	应用换带表直接进行换带计算	105
8.10	通用横轴墨卡托投影及高斯-克吕格投影族概念	112
8.10.1	通用横轴墨卡托投影概念	112
8.10.2	高斯投影族的概念	114
8.11	兰勃脱投影概述	117
8.11.1	兰勃脱投影基本概念	117
8.11.2	兰勃脱投影坐标正、反算公式	117
8.11.3	兰勃脱投影长度比、投影带划分及应用	123
8.12	工程测量投影面与投影带选择的概念	124
8.12.1	工程测量中投影面和投影带选择的基本出发点	124
8.12.2	工程测量中几种可能采用的直角坐标系	126
<b>第9章</b>	<b>控制测量概算</b>	<b>128</b>
9.1	概算的准备工作	128
9.1.1	外业成果资料的检查	128
9.1.2	已知数据表和控制网略图的编制	129
9.2	观测成果化至标石中心的计算	129
9.2.1	三角形近似边长及球面角超的计算	129
9.2.2	观测值化至标石中心的计算	130
9.3	观测值化至椭球面上的计算	132
9.3.1	预备计算	132
9.3.2	观测值化至椭球面上的计算	134
9.4	椭球面上的观测值化至高斯平面上的计算	135
9.4.1	方向改化的计算	135
9.4.2	距离改化计算	136
9.4.3	大地方位角化算为坐标方位角的计算	136
9.5	依控制网几何条件检查观测质量	136
9.5.1	依控制网几何条件检查观测质量的主要内容	137
9.5.2	依几何条件查寻闭合差超限的测站	137
9.6	资用坐标计算	138
9.7	三角网概算算例	139
9.7.1	已知数据表和控制网略图的编制	139
9.7.2	观测成果化至标石中心的计算	141
9.7.3	将观测成果归化至椭球面上的计算	142
9.7.4	将椭球面上的观测成果化算到高斯平面上的计算	146
9.7.5	资用坐标计算	148

## 第 4 部分 常用大地控制测量坐标系及其变换

第 10 章 常用大地测量坐标系及其变换 .....	149
10.1 地球的运转 .....	149
10.1.1 地球绕太阳公转 .....	149
10.1.2 地球的自转 .....	150
10.2 参考系的定义和类型 .....	152
10.2.1 基本概念 .....	152
10.2.2 大地测量参考系统及大地测量参考框架 .....	153
10.2.3 椭球定位和定向 .....	156
10.3 地心坐标系 .....	156
10.3.1 地心坐标系的建立方法 .....	157
10.3.2 WGS-84 世界大地坐标系 .....	157
10.3.3 国际地球参考系统与国际地球参考框架 .....	158
10.4 参心坐标系 .....	160
10.4.1 参心坐标系的建立 .....	160
10.4.2 我国的参心坐标系 .....	162
10.5 坐标系间的换算 .....	166
10.5.1 协议天球坐标系和协议地球坐标系之间的换算 .....	166
10.5.2 不同空间直角坐标系的换算 .....	169
10.5.3 不同大地坐标系间的换算 .....	172
10.5.4 站心坐标系及相应的坐标换算 .....	176

## 第 5 部分 测量控制网平差计算与数据管理

第 11 章 工程控制网条件平差 .....	179
11.1 三角网的条件及条件方程式 .....	179
11.1.1 三角网中的角度条件 .....	179
11.1.2 三角网中的正弦条件 .....	181
11.1.3 三角网中条件数目的确定和条件式之间相互替代 .....	187
11.1.4 条件方程式闭合差的限值 .....	189
11.2 测边网的条件及条件方程式 .....	191
11.2.1 测边网条件类型 .....	191
11.2.2 按角度闭合法组成测边网条件式 .....	192
11.2.3 用面积闭合法组成测边网图形条件式 .....	196
11.2.4 测边网中独立条件式数目的确定 .....	198

11.3	边角网的条件及条件方程式	199
11.3.1	导线网的条件和条件方程式	199
11.3.2	边角连续网的条件及条件方程式	202
11.3.3	三角-导线混合网条件平差说明	206
11.4	工程水平控制网条件平差算例	207
11.4.1	非独立三角网按平均分配法则的条件平差	207
11.4.2	独立测边网按角度闭合法组成条件方程式的条件平差	217
<b>第12章</b>	<b>工程控制网间接平差</b>	<b>225</b>
12.1	三角网坐标平差	225
12.1.1	方向误差方程式的建立和组成	225
12.1.2	误差方程式的改化——史赖伯法则	228
12.1.3	三角网坐标平差的精度评定	230
12.2	测边网与边角网间接平差	232
12.2.1	边长误差方程式	232
12.2.2	角度误差方程式	234
12.2.3	边角网误差方程式	235
12.2.4	边角网坐标平差的精度评定	237
12.3	观测值权的确定和方差估计	238
12.3.1	权的种类及定权公式	238
12.3.2	不同类观测值的方差估计	240
12.3.3	方差估值的假设检验	242
12.4	三角网方向坐标平差算例	243
12.5	测边网间接平差教学程序及算例	251
12.5.1	程序功能	251
12.5.2	变量说明	251
12.5.3	数据准备	252
12.5.4	程序运行与成果输出	253
12.5.5	主要算法和数据结构	253
12.5.6	程序框图	255
12.5.7	测边网电算平差算例	258
12.6	边角网间接平差程序及算例	261
12.6.1	程序功能	261
12.6.2	数据准备	261
12.6.3	变量说明	261
12.6.4	输入输出文件说明	262
12.6.5	主要算法和数据结构	263
12.6.6	程序框图	265

12.6.7 边角网平差算例 .....	268
<b>第13章 测量控制网近代平差与数据管理 .....</b>	<b>275</b>
13.1 近代测量平差发展概况 .....	275
13.1.1 经典测量平差的发展和研究的重点 .....	275
13.1.2 近代测量平差的发展和重点内容 .....	275
13.2 带有未知数的条件方程式 .....	277
13.2.1 线形网中带有未知数的坐标条件方程式 .....	278
13.2.2 导线网中带有未知数的条件方程式 .....	281
13.3 带有条件的间接平差 .....	283
13.4 工程控制网相关分解平差 .....	284
13.4.1 条件分解解法 .....	285
13.4.2 间接分解解法 .....	290
13.4.3 序贯平差解法 .....	293
13.5 大地控制测量数据处理的数学模型 .....	297
13.5.1 GPS 基线向量网在地心空间直角坐标系中平差的数学模型 .....	297
13.5.2 GPS 观测值与地面观测值在参心空间坐标系中平差的数学模型 .....	299
13.5.3 GPS 观测值与地面观测值在二维坐标系中平差的数学模型 .....	307
13.6 工程控制网数据库系统设计概念 .....	316
13.6.1 分析阶段 .....	316
13.6.2 设计阶段 .....	316
13.6.3 编写与测试 .....	318
13.6.4 运行与维护 .....	318
13.6.5 控制网数据库实例 .....	318
<b>主要参考文献 .....</b>	<b>321</b>

# 第 3 部分 地球椭球及其数学投影变换的原理与应用

## 第 7 章 椭球面上的测量计算

本章前五节内容讲述地球椭球的数学性质,其中包括:地球椭球,椭球的基本几何参数,基本坐标系及其相互关系,椭球面上的曲率半径及弧长,大地线定义及其微分方程等,这些是学习本章及以后其他内容的基础。接着讲述椭球面同地面之间的关系,即将地面观测元素,其中包括天文方位角、水平方向及斜距等归算至椭球面上的公式和方法,从而为椭球面上点的位置坐标计算做好数据准备。最后讲述椭球面上点的大地坐标计算。

### 7.1 地球椭球的基本几何参数及其相互关系

#### 7.1.1 地球椭球的基本几何参数

在控制测量中,用来代表地球的椭球叫做地球椭球,通常简称椭球,它是地球的数学代表。具有一定几何参数、定位及定向的用以代表某一地区大地水准面的地球椭球叫做参考椭球。地面上一切观测元素都应归算到参考椭球面上,并在这个面上进行计算。参考椭球面是大地测量计算的基准面,同时又是研究地球形状和地图投影的参考面。

地球椭球是经过适当选择的旋转椭球。旋转椭球是椭圆绕其短轴旋转而成的几何形体。在图 7-1 中, $O$  是椭球中心, $NS$  为旋转轴, $a$  为长半轴, $b$  为短半轴。包含旋转轴的平面与椭球面相截所得的椭圆,叫做子午圈(或经圈,或子午椭圆),如  $NKAS$ 。旋转椭球面上所有的子午圈的大小都是一样的。垂直于旋转轴的平面与椭球面相截所得的圆,叫做平行圈(或纬圈),如  $QKQ'$ 。通过椭球中心的平行圈,叫做赤道,如  $EAE'$ 。赤道是最大的平行圈,而南极点、北极点是最小的平行圈。

旋转椭球的形状和大小是由子午椭圆的五个基本几何参数(或称元素)来决定的,它们是:

椭圆的长半轴  $a$

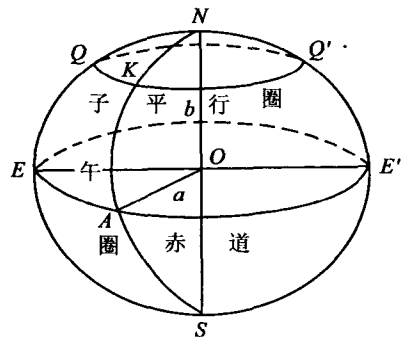


图 7-1

椭圆的短半轴  $b$

$$\text{椭圆的扁率 } \alpha = \frac{a-b}{a} \quad (7-1)$$

$$\text{椭圆的第一偏心率 } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (7-2)$$

$$\text{椭圆的第二偏心率 } e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad (7-3)$$

其中:  $a, b$  称为长度元素;扁率  $\alpha$  反映了椭球体的扁平程度,如当  $a = b$  时,  $\alpha = 0$ , 椭球变为球体;当  $b$  减小时,  $\alpha$  增大, 则椭球体变扁;当  $b = 0$  时,  $\alpha = 1$ , 则变为平面。因此  $\alpha$  值介于 1 和 0 之间。偏心率  $e$  和  $e'$  是子午椭圆的焦点离开中心的距离与椭圆半径之比, 它们也反映椭球体的扁平程度, 偏心率愈大, 椭球愈扁, 其数值恒小于 1。

决定旋转椭球的形状和大小, 只需知道五个参数中的两个参数就够了, 但其中至少有一个长度元素(比如  $a$  或  $b$ ), 通常习惯于用  $a, e^2$  或  $a, e'^2$  或  $a, \alpha$ , 因为其中包含一个小于 1 的量, 便于级数展开。

为简化书写, 还常引入以下符号:

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad t = \tan B, \quad \eta^2 = e'^2 \cos^2 B \quad (7-4)$$

式中:  $B$  是大地纬度;以后在 7.3.1 小节中将会看到,  $c$  有明确的几何意义, 它是极点处的子午线曲率半径。

此外, 还有两个常用的辅助函数:

$$\begin{cases} W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} \end{cases} \quad (7-5)$$

传统大地测量利用天文大地测量和重力测量资料推求地球椭球的几何参数。19 世纪以来, 已经求出许多地球椭球参数, 比较著名的有贝塞尔椭球(1841 年), 克拉克椭球(1866 年), 海福特椭球(1910 年) 和克拉索夫斯基椭球(1940 年) 等。20 世纪 60 年代以来, 空间大地测量学的兴起和发展, 为研究地球形状和引力场开辟了新途径。国际大地测量和地球物理联合会(IUGG) 已推荐了更精密的椭球参数, 比如第 16 届 IUGG 大会(1975 年) 推荐的 1975 年国际椭球参数等。新中国成立以来, 我国建立 1954 年北京坐标系应用的是克拉索夫斯基椭球; 建立 1980 年国家大地坐标系应用的是 1975 年国际椭球; 而全球定位系统(GPS) 应用的是 WGS-84 系椭球参数。现将这三个椭球元素值列于表 7-1。

表 7-1

	克拉索夫斯基椭球体	1975 年国际椭球体	WGS-84 椭球体
$a$	6 378 245.000 000 000 0(m)	6 378 140.000 000 000 0(m)	6 378 137.000 000 000 0(m)
$b$	6 356 863.018 773 047 3(m)	6 356 755.288 157 528 7(m)	6 356 752.314 2(m)
$c$	6 399 698.901 782 711 0(m)	6 399 596.651 988 010 5(m)	6 399 593.625 8(m)
$\alpha$	1/298.3	1/298.257	1/298.257 223 563
$e^2$	0.006 693 421 622 966	0.006 694 384 999 588	0.006 694 379 901 3
$e'^2$	0.006 738 525 414 683	0.006 739 501 819 473	0.006 739 496 742 27

### 7.1.2 地球椭球参数间的相互关系

依(7-1)~(7-3)式,可很容易导出各参数间的关系式,下面仅以  $e$  和  $e'$  的关系式为例作一推导。由(7-2)式及(7-3)式,得

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad 1 + e'^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

进而得  
于是有

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \quad (7-6)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (7-7)$$

其他元素间的关系式也可以类似地导出。现把有关的关系式归纳如下:

$$\begin{cases} a = b\sqrt{1 + e'^2}, & b = a\sqrt{1 - e^2} \\ c = a\sqrt{1 + e'^2}, & a = c\sqrt{1 - e^2} \\ e' = e\sqrt{1 + e'^2}, & e = e'\sqrt{1 - e^2} \\ V = W\sqrt{1 + e'^2}, & W = V\sqrt{1 - e^2} \\ e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \approx 2\alpha \end{cases} \quad (7-8)$$

此外,还有下列关系式:

$$\begin{cases} W = \sqrt{1 - e^2} \cdot V = \left(\frac{b}{a}\right) \cdot V \\ V = \sqrt{1 + e'^2} \cdot W = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot W \\ W^2 = 1 - e^2 \sin^2 B = (1 - e^2) V^2 \\ V^2 = 1 + \eta^2 = (1 + e'^2) W^2 \end{cases} \quad (7-9)$$

## 7.2 椭球面上的常用坐标系及其相互关系

为了表示椭球面上点的位置,必须建立相应的坐标系。下面将要介绍的几种坐标系,都可惟一地确定空间任意点的位置,并且这些位置坐标之间可以按给出的相应公式直接进行精确的相互换算,因为它们的椭球大小及其相对地球表面的相对位置都是确定不变的。

### 7.2.1 各种坐标系的建立

#### 1. 大地坐标系

如图 7-2 所示,  $P$  点的子午面  $NPS$  与起始子午面  $NGS$  所构成的二面角  $L$ , 叫做  $P$  点的大地经度。由起始子午面起算, 向东为正, 叫做东经 ( $0^\circ \sim 180^\circ$ ); 向西为负, 叫做西经 ( $0^\circ \sim 180^\circ$ )。  $P$  点的法线  $Pn$  与赤道面的夹角  $B$ , 叫做  $P$  点的大地纬度。由赤道面起算, 向北为正, 叫做北纬 ( $0^\circ \sim 90^\circ$ ); 向南为负, 叫做南纬 ( $0^\circ \sim 90^\circ$ )。在该坐标系中,  $P$  点的位置用  $L, B$  表示。如果点不在椭球面上, 表示点的位置除  $L, B$  外, 还要附加另一参数——大地高  $H$ , 它同正常高  $H_{\text{正常}}$  及



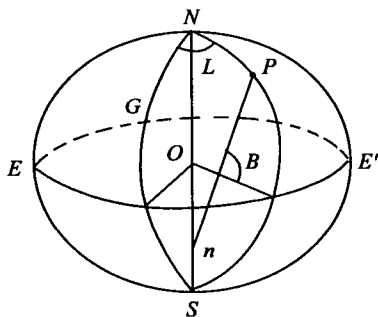


图 7-2

正高  $H_{正}$  有如下关系

$$\begin{cases} H = H_{正常} + \zeta (\text{高程异常}) \\ H = H_{正} + N (\text{大地水准面差距}) \end{cases} \quad (7-10)$$

显然,如果点在椭球面上,  $H = 0$ 。

大地坐标系是大地测量的基本坐标系,具有如下的优点:

(1) 它是整个椭球体上统一的坐标系,是全世界公用的最方便的坐标系统。经纬线是地形图的基本线,所以在测图及制图中应用这种坐标系。

(2) 它与同一点的天文坐标(天文经纬度)比较,可以确定该点的垂线偏差的大小。

因此,大地坐标系对于大地测量计算、地球形状研究和地图编制等都很有用。

### 2. 空间直角坐标系

如图 7-3 所示,以椭球体中心  $O$  为原点,起始子午面与赤道面交线为  $X$  轴,在赤道面上与  $X$  轴正交的方向为  $Y$  轴,椭球体的旋转轴为  $Z$  轴,构成右手坐标系  $O-XYZ$ ,在该坐标系中,  $P$  点的位置用  $X, Y, Z$  表示。

### 3. 子午面直角坐标系

如图 7-4 所示,设  $P$  点的大地经度为  $L$ ,在过  $P$  点的子午面上,以子午圈椭圆中心为原点,建立  $x, y$  平面直角坐标系。在该坐标系中,  $P$  点的位置用  $L, x, y$  表示。

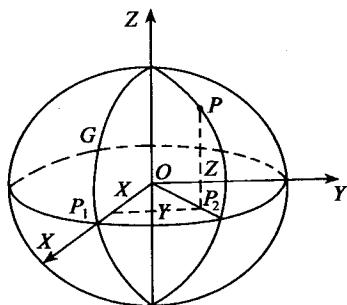


图 7-3

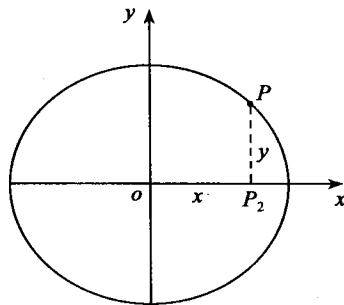


图 7-4

### 4. 地心纬度坐标系及归化纬度坐标系

如图 7-5 所示。设椭球面上  $P$  点的大地经度  $L$ ,在此子午面上以椭圆中心  $O$  为原点建立地心纬度坐标系。连接  $OP$ ,则  $\angle POx = \phi$  称为地心纬度,而  $OP = \rho$  称为  $P$  点向径,在此坐标系中,点的位置用  $L, \phi, \rho$  表示。

又如图 7-6 所示,设椭球面上  $P$  点的大地经度为  $L$ ,在此子午面上以椭圆中心  $O$  为圆心,以椭球长半径  $a$  为半径作辅助圆,延长  $P_2P$  与辅助圆相交于  $P_1$  点,则  $OP_1$  与  $x$  轴夹角称为  $P$  点的归化纬度,用  $u$  表示,在此归化纬度坐标系中,  $P$  点位置用  $L, u$  表示。

在这两种坐标中,如果点不在椭球面上,那么应先沿法线将该点投影到椭球面上,此时的地心纬度、归化纬度则是此投影点的纬度值,并且增加坐标的第三量——大地高  $H$ 。