



荣德基 总主编

®



综合应用创新题

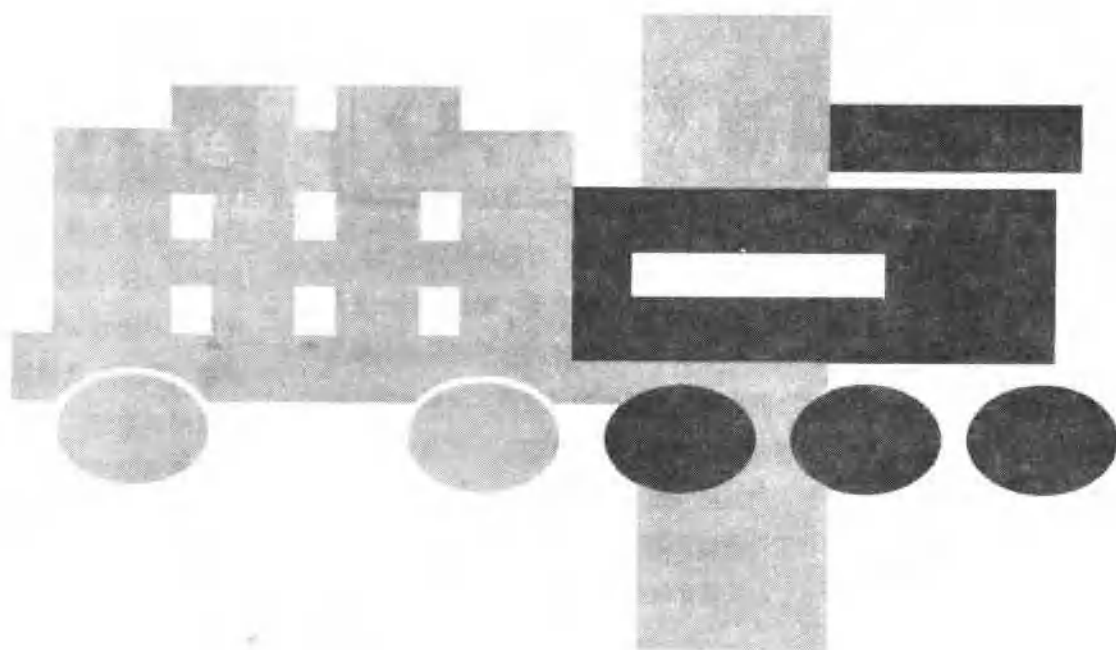
试验修订版

高二数学 **下B**

掀起题海的浪花

凝起知识的雨露

内蒙古少年儿童出版社



高二数学(下 B)

(试验修订版)

总主编:荣德基

本册主编:张利敏



鸟儿选择天空,因为它可以高飞
鱼儿选择大海,因为它可以畅游
骆驼选择沙漠,因为它可以跋涉
骏马选择草原,因为它可以驰骋
做最好的选择,才能展现最优秀的你



内蒙古少年儿童出版社

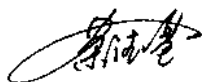
图书在版编目(CIP)数据

综合应用创新题典中点. 高二数学. 下/荣德基主编. 一通辽: 内蒙古少年儿童出版社, 2006. 9
ISBN 7-5312-2158-6

I. 综... II. 荣... III. 数学课-高中-习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 108177 号

你的差距牵动着我的心



责任编辑/巴 木

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/北京一鑫印务有限责任公司

总 字 数/3252 千字

规 格/880×1230 毫米 1/16

总 印 张/106.25

版 次/2006 年 9 月第 1 版

印 次/2006 年 9 月第 1 次印刷

总 定 价/160.50 元(全 9 册)

版权声明/版权所有 翻印必究

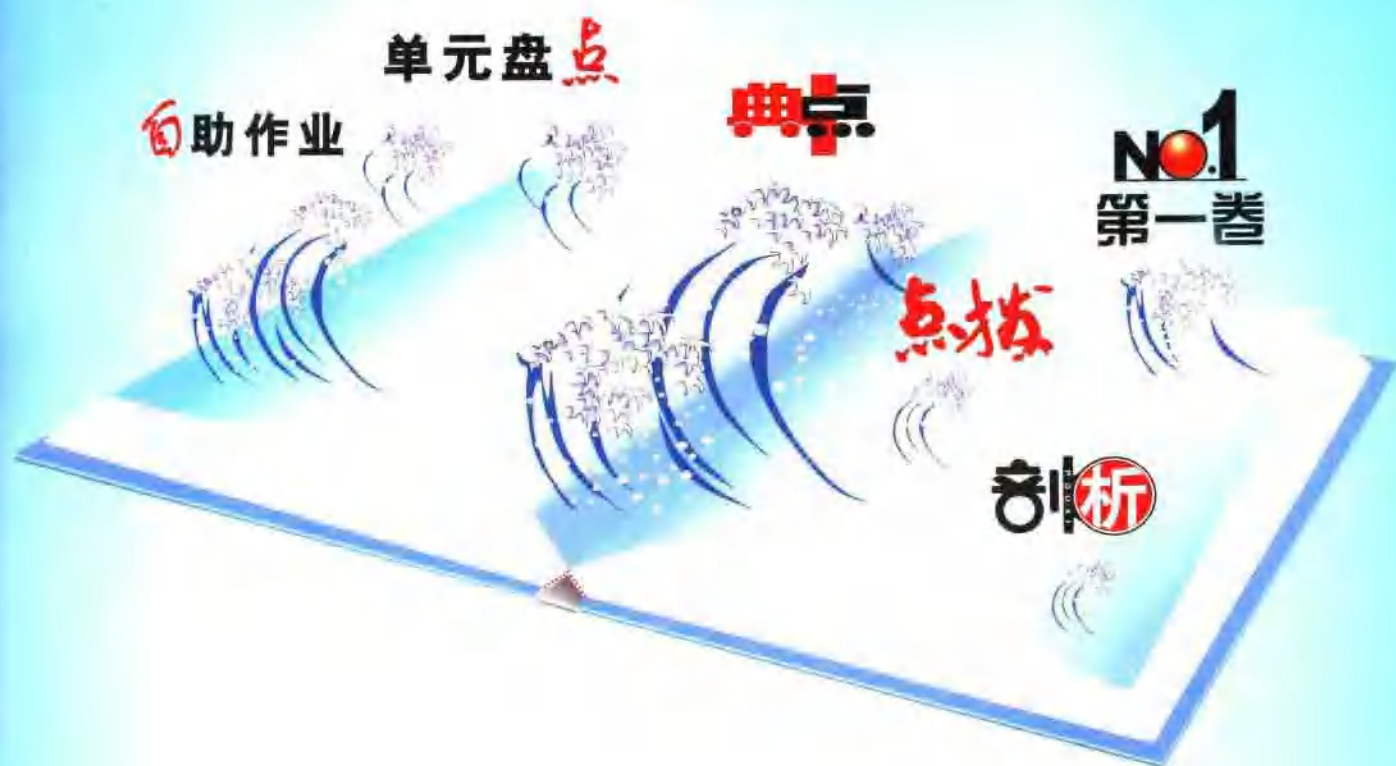


最^木难的事

有人问古希腊哲学家泰勒斯：“你认为人活在这个世界上，什么事情是最难做的？”泰勒斯回答说：“认识你自己。”认识自己难，认识自己的不足更难。

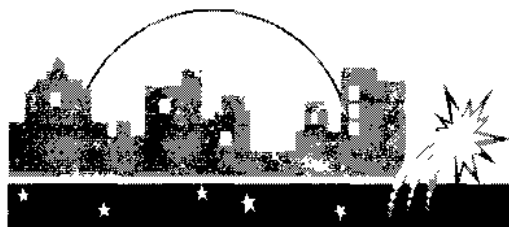
我们每天孜孜不倦地学习，为的不是重复那些我们已经懂得了、做过了、掌握了的东西，而是为了那些我们还不懂、做错了、要掌握的东西。

练一练、测一测，看清自己，看清目标！



在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；
采过一丛花，
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；
有过一个梦，
决定从这里启程……



目 录

CONTENTS



第九章 直线、平面、简单几何体	
第一节 平面的基本性质	1
I. 必记知识全览	1
II. 知识点过关	1
III. 测试卷	2
A 卷:基础经典题	2
第二节 空间的平行直线与异面直线	3
I. 必记知识全览	3
II. 知识点过关	4
III. 五年高考题一网打尽	5
IV. 测试卷	6
A 卷:基础经典题	6
B 卷:综合应用创新题	7
第三节 直线和平面平行与平面和平面平行	8
I. 必记知识全览	8
II. 知识点过关	9
III. 五年高考题一网打尽	12
IV. 测试卷	12
A 卷:基础经典题	12
B 卷:综合应用创新题	13
第四节 直线和平面垂直	15
I. 必记知识全览	15
II. 知识点过关	15
III. 五年高考题一网打尽	18
IV. 测试卷	19
A 卷:基础经典题	19
B 卷:综合应用创新题	20
第五节 空间向量及其运算	22
I. 必记知识全览	22
II. 知识点过关	23
III. 五年高考题一网打尽	26
IV. 测试卷	26
A 卷:基础经典题	26
B 卷:综合应用创新题	27
第六节 空间向量的坐标运算	29
I. 必记知识全览	29
II. 知识点过关	30
III. 五年高考题一网打尽	33
IV. 测试卷	34
A 卷:基础经典题	34
B 卷:综合应用创新题	35
第七节 直线和平面所成的角与二面角	37
I. 必记知识全览	37
II. 知识点过关	37
III. 五年高考题一网打尽	40
IV. 测试卷	40
A 卷:基础经典题	40
B 卷:综合应用创新题	41
第八节 距 离	44
I. 必记知识全览	44
II. 知识点过关	44
III. 五年高考题一网打尽	46
IV. 测试卷	47
A 卷:基础经典题	47
B 卷:综合应用创新题	48
第九节 棱柱与棱锥	50
I. 必记知识全览	50
II. 知识点过关	51
III. 五年高考题一网打尽	55
IV. 测试卷	56
A 卷:基础经典题	56
B 卷:综合应用创新题	57
第十节 球	60
I. 必记知识全览	60
II. 知识点过关	60

Ⅲ. 五年高考题一网打尽	62
Ⅳ. 测试卷	63
A 卷:基础经典题	63
B 卷:综合应用创新题	64
专题训练 1	65
专题训练 2	66
第九章标准检测卷	67
第二学期期中标准检测卷	71
第十章 排列、组合和二项式定理	
第一节 分类计数原理与分步计数原理	74
I. 必记知识全览	74
II. 知识点过关	74
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	75
IV. 测试卷	75
A 卷:基础经典题	75
B 卷:综合应用创新题	76
第二节 排 列	78
I. 必记知识全览	78
II. 知识点过关	78
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	80
IV. 测试卷	80
A 卷:基础经典题	80
B 卷:综合应用创新题	81
第三节 组 合	82
I. 必记知识全览	82
II. 知识点过关	83
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	86
IV. 测试卷	87
A 卷:基础经典题	87
B 卷:综合应用创新题	88
第四节 二项式定理	89
I. 必记知识全览	89
II. 知识点过关	89

Ⅲ. 五年高考题一网打尽	91
Ⅳ. 测试卷	92
A 卷:基础经典题	92
B 卷:综合应用创新题	93
专题训练 1	94
专题训练 2	96
第十章标准检测卷	98
第十一章 概 率	
第一节 随机事件的概率	100
I. 必记知识全览	100
II. 知识点过关	100
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	102
IV. 测试卷	102
A 卷:基础经典题	102
B 卷:综合应用创新题	104
第二节 互斥事件有一个发生的概率	105
I. 必记知识全览	105
II. 知识点过关	105
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	107
IV. 测试卷	108
A 卷:基础经典题	108
第三节 相互独立事件同时发生的概率	109
I. 必记知识全览	109
II. 知识点过关	109
Ⅲ. 五年高考题一网打尽	112
IV. 测试卷	115
A 卷:基础经典题	115
B 卷:综合应用创新题	116
专题训练	118
第十一章标准检测卷	119
第二学期期末标准检测卷	122
参考答案及点拨拓展	125

第九章 直线、平面、简单几何体

第一节 平面的基本性质



I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

一、必记概念

1. 两平面的交线: 如果两个平面有一条公共直线, 则称这两个平面_____, 这条公共直线叫做这两个平面的交线.

2. 平面图形: 如果构成图形的所有点都在_____, 这个图形叫做平面图形.

3. 立体图形: 如果构成图形的点_____同一平面内, 这种图形叫做立体图形.

4. 直观图: 表示_____的平面图形, 叫做空间图形的_____.

二、必记性质

5. 公理 1: 如果一条直线的_____在一个平面内, 那么这条直线上的_____都在这个平面内.

这时我们说_____在平面内或平面_____直线.

6. 公理 2: 如果两个平面_____, 那么它们_____, 这些公共点的集合是_____.

7. 公理 3: 经过_____的三点有且只有一个平面, 也可简单地说是_____确定一平面.

8. 推论 1: 经过一条直线和直线外_____有且只有一个平面.

9. 推论 2: 经过两条_____直线有且只有一个

平面.

10. 推论 3: 经过两条_____直线有且只有一个平面.

三、必记方法

11. 斜二测画法: (1) 在已知图形中取水平平面, 取互相_____的轴 Ox 、 Oy , 再取 Oz 轴, 使 $\angle xOz =$ _____, 且 $\angle yOz =$ _____;

(2) 画直观图时, 把它们画成对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$ 、 $O'z'$, 使 $\angle x'O'y' =$ _____ (或 _____), $\angle x'O'z' = 90^\circ$, $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面;

(3) 已知图形中平行于 x 轴、 y 轴或 z 轴的线段, 在直观图中分别画成_____ x' 轴、 y' 轴或 z' 轴的线段;

(4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段, 在直观图中保持_____; 平行于 y 轴的线段, 长度为_____.

必记知识全览答案: 1. 相交 2. 同一平面内

3. 不都在 4. 空间图形; 直观图

5. 两点; 所有点; 直线; 经过

6. 有一个公共点; 还有其他公共点; 一条直线

7. 不在同一条直线上; 不共线三点

8. 一点 9. 相交 10. 平行

11. (1) 垂直, 90° ; 90° (2) 45° ; 135° (3) 平行

(4) 长度不变; 原来的一半



II. 知识点过关

过关斩将 一马平川

知识点详解

一、基本知识点

知识点 1. 平面

(1) 平面的概念

平面是一个不加定义, 只需理解的最基本的原始概念, 我们特别要注意的是平面是无大小、无厚薄之分的, 类似我们以前学的直线, 它可以无限延伸, 是不可度量的.

(2) 平面的画法.

立体几何中, 我们通常画平行四边形来表示平面, 但应注意画的平行四边形表示的是整个平面, 需要时, 可以把它延展开来, 如同画直线一样, 直线是可以无限延伸的, 但在画直线时却只画出一条线段来表示.

(3) 平面的表示方法.

平面通常用一个小写的希腊字母表示, 如平面 α 、平面 β 、平面 γ 等. 根据问题实际需要有时也用表示平行四边形 $ABCD$ 的相对顶点的两个大写字母来表示, 如平面 AC 、平面 BD ; 或者用表示多边形顶点的字母来表示, 如平面 ABC 、平面 $A_1B_1C_1D_1$.

(4) 直线和平面都是由点构成的集合.

以点作为元素, 直线和平面都是由点构成的集合.

几何中许多符号的规定都是源于将图形视为点集. 例如: 点 A 在平面 α 内, 记作 $A \in \alpha$; 点 A 不在平面 α 内, 记作 $A \notin \alpha$. 直线 l 在平面 α 内, 记作 $l \subset \alpha$; 直线 l 不在平面 α 内, 记作 $l \not\subset \alpha$. 这里点 A 是平面 α 的元素, 而直线 l 是平面 α 的子集, 因此在符号的使用上是有区别的.

从点集的角度认识几何图形, 是数学发展的需要, 这对于数形结合, 深入研究数学问题是非常必要和有效的.

案例练习

题 1-1: 下列命题

① 书桌面是平面;

② 8 个平面重叠起来, 要比 6 个平面重叠起来厚;

③ 有一个平面的长是 50m, 宽是 20m;

④ 平面是绝对平滑、无厚度、可以无限延展的抽象的数学概念.

其中正确的命题个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

题1-1:A 点拨:由平面的概念,它是平滑、无厚度、可无限延展的,可以判断命题④正确,其余的命题都不符合平面的概念,所以①②③命题都不正确,所以应选A.

知识点2.平面的基本性质

平面的基本性质,即教科书中的三个公理及推论,它们是研究立体几何理论的基础,每个同学都必须掌握好.

(1)关于公理1:

①公理1的剖析:公理1的内容反映了直线与平面的位置关系,公理1的条件是“直线上两点在平面内”,结论是“线上所有点都在平面内.”从集合的角度看,这个公理就是说如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集.这个结论阐述两个观点,一是整个直线在平面内,二是直线上的所有点在平面内.

②公理1的作用:既可判定直线是否在平面内,点是否在平面内,又可用直线检验平面.

(2)关于公理2:

①公理2的剖析:公理2的内容反映了平面与平面的位置关系,公理2的条件简言之是“两面共一点”,结论是“两面共一线,且过这一点,线唯一”.对于本公理应强调对于不重合的两个平面,只要它们有公共点,它们就是相交的位置关系,交集是一条直线.

②公理2的作用:其一,它是判定两个平面是否相交的依据,只要两个平面有一个公共点,就可以判定这两个平面必相交于过这点的一条直线;其二,它可以判定点在直线上,点是某两个平面的公共点,线是这两个平面的公共交线,则这点在交线上.

(3)关于公理3和其三个推论:

①公理3及其推论的剖析:公理3的条件是“过不在同一直线上的三点”,结论是“有且只有一个平面”,条件中的“三点”是条件的骨干,不会被忽视,但“不在同一直线上”这一附加条件则易被遗忘,如去掉结论就不成立了,因此绝对不能遗忘,三个推论的条件分别是“经过一条直线和这条直线外一点”,“经过两条相交直线”,“经过两条平行直线”,结论均为“有且只有一个平面”.它们之所以是公理3的推论:原因就在于由公理3的条件可以得到三个推论的条件,所以它们的关系就很明确了.

公理3及其推论中的“有且只有一个”的含义要准确理解,这里的“有”是说图形存在,“只有一个”是说图形唯一.本公理及推论强调的是存在和唯一两个方面,因此“有且只有一个”必须完整的使用,不能仅用“只有一个”来替代“有且只有一个”,否则就没有表达存在性.确定一个平面中的“确定”是“有且只有”的同义词,也是指存在性和唯一性这两方面的,这个术语今后也会常常出现,要理解好.

②公理3及其推论的作用:

作用一是确定平面,作用二是可用其证明点、线共面问题.

题2-1:如图9-1-1

中,若 AB 、 BC 在平面 α 内,判断 AC 是否在平面 α 内.

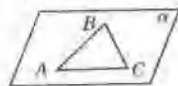


图9-1-1

题2-1解:因为 AB 在平面 α 内,所以 A 点一定在平面 α 内,因为 BC 在平面 α 内,所以 C 点一定在平面 α 内,所以点 A 、点 C 都在平面 α 内,所以直线 AC 在平面 α 内(公理1).
点拨:公理1可以判断直线是否在平面内.

二、拓展与综合应用创新知识

知识点3.公理的综合运用(学科内综合知识)

要掌握各个公理和推论的作用,公理1是判定直线在平面内的依据;公理2是判定两个平面相交和找出两平面的交线的依据;公理3及三个推论是确定一个平面的依据,主要用来证明两平面重合和共线等问题.

题3-1解:已知平面 α 、 β 、 γ 两两相交于三条直线 l_1 、 l_2 、 l_3 ,且 l_1 、 l_2 、 l_3 不平行,如图9-1-2.

求证: l_1 、 l_2 、 l_3 相交于一点.

证明: $\left. \begin{array}{l} l_1 \subset \beta \\ l_2 \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow l_1 \cap l_2 = P \Rightarrow P \in l_1 \cap \alpha \Rightarrow P \in \alpha \cap \gamma = l_3 \Rightarrow l_1, l_2, l_3 \text{ 交于一点.}$
 $\left. \begin{array}{l} l_1 \not\subset l_2 \\ P \in l_2 \subset \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow P \in l_3$

点拨:这是证明三线共点问题,常规思路是先证两线交于一点,再证明这点在第三条直线上.

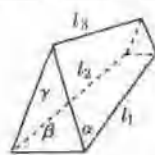


图9-1-2



III. 测试卷

学而知其效 学乃其法

卷:基础经典题(70分 60分钟) (125)

一.选择题(每题5分,共30分)

1. (测试知识点1,2)下面四个条件中,能确定一个平面的是()
 A. 空间任意三点 B. 一条直线和一个点

C. 空间两条直线 D. 两条平行线

2. (测试知识点2)三个平面把空间分成6部分时它们的交线有()

A. 1条 B. 2条
 C. 3条 D. 1条或2条

3. (测试知识点2)空间中有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个点,若

- A、B、C、D 共面, B、C、D、E 共面, 那么这五个点()
- A. 一定共面 B. 可能共面也可能不共面
C. 一定不共面 D. 一定共线
4. (测试知识点 1、2、3) 两条相交直线 l, m 都在平面 α 内, 且都不在平面 β 内, 命题甲: l 与 m 中至少有一条与 β 相交, 命题乙: 平面 α 与 β 相交, 则甲是乙的()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
5. (测试知识点 1) 已知 $\triangle ABC$ 的平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 是边长为 a 的正三角形, 那么原三角形的面积为()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ D. $\sqrt{6}a^2$
6. (测试知识点 2、3) 下列命题
- ①公理 1 可用集合符号叙述为: 若 $A \in l, B \in l$, 且 $A \in \alpha, B \in \alpha$, 则必有 $l \in \alpha$;
②四边形的两条对角线必相交于一点;
③用平行四边形表示的平面, 以平行四边形的四条边作为平面边界线;
④梯形是平面图形.
- 其中正确的个数为()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 二、填空题(每题 4 分, 共 8 分)
7. (测试知识点 2) 直线 $AB, AD \subset \alpha$, 直线 $BC, CD \subset \beta$. 点 $E \in AB$, 点 $F \in BC$, 点 $G \in CD$, 点 $H \in AD$, 若直线 $EH \cap$ 直线 $FG = M$, 则点 M 在直线_____上.
8. (测试知识点 1、2) 若空间三个平面两两相交, 则交线条数为_____.
- 三、解答题(每题 8 分, 共 32 分)
9. (测试知识点 2、3) 四条直线两两相交且任何三条都不交于一点, 则这四条直线共面.
10. (测试知识点 2) 若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交, 求证: 四边形 $ABCD$ 为平面四边形.
11. (测试知识点 2、3) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中设 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 O , 求证: B, O, D_1 三点共线.
12. (测试知识点 2、3) 已知空间四边形 $ABCD$, E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 上的点, 若直线 EH, FG 交于点 P , 求证: 三条直线 EH, BD, FG 交于一点.

第二节 空间的平行直线与异面直线



I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

一、必记概念

1. 空间两直线的位置: (1) 相交直线: _____ 一个公共点.

(2) 平行直线: 在同一平面内且 _____ 公共点.

(3) 异面直线: 不在 _____ 平面内, 且 _____ 公共点.

2. 异面直线所成的角: 如果直线 a, b 是异面直线, 经过空间任意一点 O 作直线 a', b' , 使 $a \parallel a', b \parallel b'$, 我们把直线 a' 与 b' 所成的 _____ (或

_____) 叫做异面直线 a, b 所成的角 (或夹角).

二、必记性质

3. 平行公理: _____ 同一条直线的两条直线互相平行.

4. 等角定理: 如果一个角的两边和另一个角的两边分别 _____ 并且 _____, 那么这两个角相等.

必记知识全览答案: 1. (1) 有且只有 (2) 没有 (3) 任何一个, 没有 2. 平行于; 平行于; 锐角; 直角

3. 平行于 4. 平行; 方向相同



II. 知识点过关

知识过关

知识点详解

一、基本知识

知识点 1. 空间两条直线的位置关系

空间的两条直线有以下三种位置关系:

- ①相交直线 有且仅有一个公共点.
- ②平行直线 在同一平面内,没有公共点.
- ③异面直线 不同在任何一个平面内,没有公共点.

若从有无公共点的角度看,可分两类:

①有且仅有一个公共点 相交直线.

②没有公共点 $\begin{cases} \text{平行直线.} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从是否共面的角度看,也可分两类:

①在同一平面内 $\begin{cases} \text{相交直线.} \\ \text{平行直线.} \end{cases}$

②不同在任何一个平面内 异面直线.

题1-1: B 点拨: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中与 AB 异面的有 $C_1C, D_1D, B_1C_1, A_1D_1$, 因为各棱具有相同的位置关系, 且正方体有 12 条棱, 排除两棱的重复计算, 所以异面直线共有 $\frac{12 \times 4}{2} = 24$ (对).

知识点 2. 平行直线

(1)公理 4.

平行于同一直线的两条直线平行.

“在同一平面内, 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也相互平行.” 这是我们在平面几何中学到的, 对于空间的三条直线, 也有同样的性质, 这就是本节的公理 4.

公理 4 给出空间两条直线平行的一种证明方法. 另外应用它又证明了等角定理, 为下一步研究异面直线打下了基础.

(2)证明空间两条直线平行的方法.

方法 1: (利用定义)

用定义证明两条直线平行, 只需证两件事: 一是两直线在同一平面内; 二是两直线没有公共点.

方法 2: (利用公理 4)

用公理 4 证明两条直线平行, 只需证一件事: 就是需找到直线 c , 使得 $a \parallel c$, 同时 $b \parallel c$, 由公理 4 得到 $a \parallel b$.

题2-1 证明: 如图 9-2-1, 连结 BD . 因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线, 所以 $EH \parallel BD, EH = \frac{1}{2}BD$.

又因为 FG 是 $\triangle CBD$ 的中位线, 所以 $FG \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD$.

根据公理 4, $FG \parallel EH$, 且 $FG = EH$, 所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

点拨: (1)若证明 $EFGH$ 是平行四边形, 可有两条途径: 一是证两组对边分别平行; 二是证明一组对边平行且相等.

(2)下面再给出一个问题, 同学们考虑如何予以证明. “ $ABCD$ 是空间四边形, E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点, 求证: EG 与 FH 相交于一点且被这点平分.”

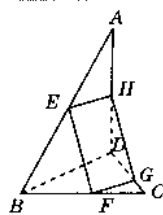


图 9-2-1

知识点 3. 异面直线

(1)关于异面直线的有关概念.

①两条异面直线所成的角的定义

直线 a, b 是异面直线, 经过空间一点 O , 分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 相交直线 a', b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a, b 所成的角.

②两条异面直线垂直的定义

如果两条异面直线所成角是直角, 则称这两条异面直线互相垂直.

(2)异面直线概念理解需注意的问题:

①异面直线所成角 θ 的范围是 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$.

②为了求异面直线 a, b 所成的角, 可以在空间中任取一点 O , 过 O 分别作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 再通过解三角形, 求出 a, b 所成的角. 但是, 为了简便, 点 O 常常取在两条异面直线中的一条上, 特别是取这一直线上的某些特殊点.

③将两条异面直线所成的角转化为平面上的相交直线的夹角, 实现了空间问题向平面问题的转化, 使平面几何与立体几何建立了联系, 促进了数学的学科间的知识渗透.

案例练习

题1-1: 如果两条异面直线称作“一对”, 那么在正方体的十二条棱所在直线中, 共有异面直线()

- A. 12 对
- B. 24 对
- C. 36 对
- D. 48 对

题2-1: 已知四边形

$ABCD$ 是空间四边形, E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点. 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

题3-1: 如图 9-2-2, a, b

是异面直线, $A, B \in a, C, D \in b, E, F$ 分别是线段 AC 和 BD 的中点, 判断 EF 和 a, EF 和 b 的位置关系, 并证明你的结论.

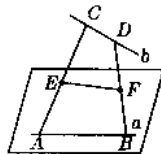


图 9-2-2

题3-1解: EF 和 a 是异面直线, EF 和 b 是异面直线.

点拨: 假设 EF 和 a 共面, 设这个平面为 α , 则 $EF \subset \alpha, AB \subset \alpha$. 因为 $A, B, E, F \in \alpha$, 所以 $FB \subset \alpha, EA \subset \alpha$.

又因为 $C \in EA, D \in FB$, 所以 $C, D \in \alpha$.

于是直线 $b \subset \alpha$. 从而 a, b 共面于 α , 此与题设条件 a, b 是异面直线相矛盾, 所以 EF 和 a 共面的假设不成立, 所以 EF 和 a 是异面直线. 同理可得 EF 和 b 也是异面直线.

二、拓展与综合应用创新知识点

知识点 4. 反证法(拓展知识点)

反证法证题的一般步骤是: 假设结论的反面成立, 据理推出矛盾, 从而断定原结论正确.

如果结论的反面情况只有一种则只需将此否定驳倒, 即可达到反证的目的, 这种比较单纯的反证法称为归谬法. 如果结论的反面情况不只一种, 则必须将其逐一驳倒, 才能推出命题的结论正确.

怎样才算导出矛盾呢?

一般地, 从假设出发, 导出的结果符合下列条件之一者就可以了.

①与已知条件矛盾.

②与已知公理、定理相矛盾.

③与所作的假设相矛盾.

④与已知定义相矛盾.

⑤导出了一个显而易见的矛盾, 如“ $1=2$ ”, “ $(a-b)^2 < 0$ ”等.

题4-1解: 已知 $a \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin a$, 求证: 直线 AB 与 a 是异面直线.

证明: 假设直线 AB 与 a 在同一平面内, 那么这个平面一定经过点 B 和直线 a . 因为 $B \in \alpha$, 经过点 B 和直线 a 只能有一个平面 α , 所以直线 AB 与 a 应在 α 内.

所以 $A \in \alpha$. 这与已知 $A \notin \alpha$ 相矛盾. 所以直线 AB 与 a 是异面直线.

点拨: 如图 9-2-3, 要证直线 AB 与 a 是异面直线, 若是用定义来证明两直线不同在任何一平面内, 我们很难办到, 但我们可以考虑从问题的反面入手, 即使用反证法证明.

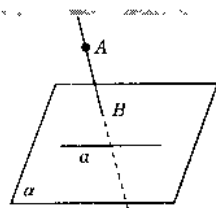


图 9-2-3

知识点 5. 证明两条直线异面的方法(学科内综合知识点)

证明两条直线异面的方法有两种:

①用定义证明: 此时需要用反证法, 假设两条直线不异面, 根据空间两条直线的位置关系, 这两条直线一定共面, 即这两条直线可能相交也可能平行, 然后, 推导出矛盾即可.

②用定理证明: 用该法证明时, 必须写出定理满足的条件 $a \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin a$, 然后可以推导出直线 a 与 AB 是异面直线.

题5-1: 如图 9-2-4, 空间四边形 $ABCD$, $AB \neq AC$, AE 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高, DF 是 $\triangle BCD$ 的 BC 边上的中线, 求证: AE 和 DF 是异面直线.

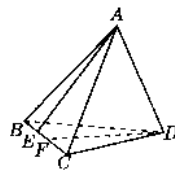


图 9-2-4

题5-1证明: (定理法) 由题设条件可知点 E, F 不重合, 设 $\triangle BCD$ 所在平面为 α .

$DF \subset \alpha$,

$A \notin \alpha$

$E \in \alpha$

$E \notin DF$

$\rightarrow AE$ 和 DF 是异面直线. 点拨: 用定理证明时要把条件写全, 不要遗漏.

知识点 6. 异面直线在生活中的应用(实际应用知识点)

对于实际应用问题, 涉及本节内容时, 一般难度都不大, 其解题的关键是: 把实际问题数学化, 正确画出图形, 以寻求解题思路.

题6-1: 空中有一气球 P , 在它的正西方的 A 点处, 测得它的仰角为 45° , 同时在它南偏东 45° 的 B 点处, 测得它的仰角为 $67^\circ 30'$. A, B 间的距离为 266m, 这两点均离地 1m, 求测量时, 此气球距离地面的高度.

题6-1解: 如图 9-2-5, Q 点为 P 点正下方一点且离地 1m, 设 $PQ = x$, 则 $AQ = x, BQ =$

$$\frac{x}{\tan 67^\circ 30'} = x \tan 22^\circ 30'.$$

在 $\triangle AQB$ 中, $\angle AQB = 135^\circ, AB = 266\text{m}$, 所以 $266^2 = x^2 + x^2 \cdot (\tan 22^\circ 30')^2 -$

$$2x^2 \tan 22^\circ 30' \cdot \cos 135^\circ, \text{ 所以 } x^2 = 266^2 \cdot \frac{1 + \cos 45^\circ}{3} = \frac{35378}{3} (2 + \sqrt{2}), \text{ 所以 } x \approx 201(\text{m}).$$

答: 当测量时气球离地约为 202m. 点拨: 解答本题的关键是正确画出图, 以帮助寻找解题思路.

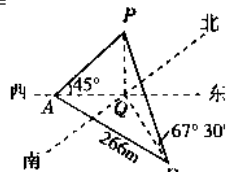


图 9-2-5



III. 五年高考题一网打尽

五年精粹 题目录 (125)

回顾 1] 测试知识点 1 (2005, 全国 II, T₁, 5 分) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R 分别是 AB, AD, BC 的中点, 那么正方体的过 P, Q, R 的截面图形是 ()

A. 三角形

B. 四边形

C. 五边形

D. 六边形

[回顾 2] 测试知识点 3 (2005, 福建, T₁, 5 分) 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB = 2, AD = 1$, 点 $E,$

F, G 分别是 DD_1, AB, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是()

- A. $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{\pi}{2}$



IV. 测试卷

学而思教育 李永乐讲法



卷: 基础经典题 (70分 60分钟) (125)

一、选择题 (每题5分, 共30分)

- (测试知识点 2) 空间两条互相异面的直线指的是()
A. 在空间没有交点的两条直线
B. 分别在两个平面内的两条直线
C. 分别在两个不同的平面内且没有交点的两条直线
D. 在同一平面内且没有交点的两条直线
- (测试知识点 1, 3) 设 a, b, c 是空间三条直线, $a \parallel b$, c 与 a 相交, 那么 c 与 b 的位置关系是()
A. 共面 B. 异面
C. 相交 D. 相交或异面
- (测试知识点 1, 3) 一条直线和两条异面直线中的一条平行, 则它和另一条的位置关系是()
A. 平行或异面 B. 相交或异面
C. 异面 D. 相交
- (测试知识点 3, 6) E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB, BC, CD, DA 的中点, 若对角线 $BD=2, AC=4$, 则 $EG^2 + HF^2$ 的值是()
A. 5 B. 10 C. 12 D. 不能确定
- (测试知识点 3, 5) 若 a 和 b 是异面直线, b 和 c 是异面直线, 则()
A. $a \parallel c$ B. a 和 c 是异面直线
C. a 和 c 相交
D. a 和 c 或平行或相交或异面
- (测试知识点 3, 5) 若直线 a, b, c 满足 $a \parallel b, b \perp c$, 则 a 与 c 的关系是()
A. 异面 B. 平行
C. 垂直 D. 相交

二、填空题 (每题4分, 共8分)

- (测试知识点 1) 已知直线 $a \parallel b$, a 与平面 α 相交于 A , 则 b 与平面 α 必_____.
- (测试知识点 3) 在空间四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD=1, BC=\sqrt{3}$, 且 $AD \perp BC$, 对角线 $BD=\frac{\sqrt{13}}{2}, AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 AC 和 BD 所成角为_____.

三、解答题 (每题8分, 共32分)

- (测试知识点 3, 5) 已知平面 α 与平面 β 相交于直线 $m, n \subset \beta$, 且 $m \cap n = A$, 直线 $l \subset \alpha$ 且 $l \parallel m$, 证明: n, l 是异面直线.

- (测试知识点 1, 2) 已知 E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 AB, AD, CB, CD 上的点, 并且有 $\frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GB} = \frac{AF}{FD} = \frac{CH}{HD}$, 试证: EF, GH, BD 这三条直线共点或两两平行.

- (测试知识点 3, 5) 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 若 $AB=BC=3, AA_1=4$, 求 A_1B 和 B_1C 所成角的余弦值.

- (测试知识点 3, 5) 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 点是 BC 的中点, 求 A_1C 与 DE 所成角的余弦值.

B 卷：综合应用创新题 (80分 60分钟) (126)

一、学科综合题 (每题 10 分, 共 20 分)

1. (测试知识点 3, 5) 如图 9-2-6, 已知 $a \parallel b \parallel c$, a, b, c 不共面, 点 $A, B \in a, D \in b, C \in c$. 求证: AD 与 BC 是异面直线.

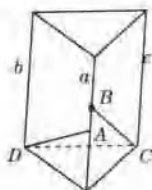


图 9-2-6

2. (测试知识点 3, 5) 如图 9-2-7, 空间四边形 $ABCD$ 中, 四条边 AB, BC, CD, DA 及对角线 AC, BD 均相等, E 为 AD 的中点, 求 AB 与 CE 所成的角.

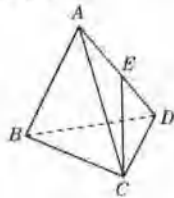


图 9-2-7

二、实际应用题 (8 分)

3. (测试知识点 3, 5, 6) 在一棵树下放置一个长、宽、高分别为 a, b, c ($a > b > c$) 的长方体木箱, 一只蝉从树上落到上底面的一角 (顶点), 在它的对角 (长方体对角线的另一顶点) 恰好爬着一只螳螂, 试问: 螳螂沿怎样的路线才能尽快地捉到蝉?

三、创新题 (18 分)

4. (多变题, 测试知识点 3, 5) 空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = BD = AD = 2, BC = CD = \frac{\sqrt{7}}{2}, AC = \frac{3}{2}$, 延长 BC 到 E 使 $CE = BC$, F 为 BD 中点, 求: 异面直线 AF 与 DE 所成角.

- (1) 一变: 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 A_1B_1 和 B_1B 的中点, 求直线 AM 与 CN 所成角的余弦值.

- (2) 二变: 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2a, AA_1 = a$, 求 AC_1 和 B_1C 所成角.

四、科学探究题 (14 分)

5. (测试知识点 3) 如图 9-2-8, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E, F 分别是 CC_1, AD 的中点, 求异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值.

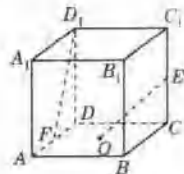


图 9-2-8

五、阅读理解题(10分)

6. (测试知识点 3,5) 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD=3$, E, F 分别是 BC, AD 上的点, 并且 $BE:EC=AF:FD=1:2$, $EF=\sqrt{7}$.

求 AB 和 CD 所成角的余弦值.

小明同学的解答如下:

如图 9-2-9, 连结 BD , 在 BD 上取点 G 使 $BG:GD=1:2$, 连结 EG, FG, EF . 在 $\triangle BCD$ 中,

$$\text{因为 } \frac{BE}{EC} = \frac{BG}{GD}$$

所以 $EG \parallel CD$. 同理 $FG \parallel AB$.

在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $EG \parallel CD$,

$$CD=3, EG:CD=1:3,$$

$$\text{所以 } EG=1.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 因为 $FG \parallel AB$, $AB=3$, $FG:AB=2:3$, 所以 $FG=2$.

$$\text{在 } \triangle EFG \text{ 中, } EG=1, FG=2, EF=\sqrt{7}.$$

由余弦定理得:

$$\cos \angle EGF = \frac{EG^2 + FG^2 - EF^2}{2EG \cdot FG} = -\frac{1}{2}.$$

所以 AB 与 CD 所成角的余弦值为 $-\frac{1}{2}$.

你认为小明同学的解答正确吗? 如果不正确, 请进行纠正, 并给出正确解法.

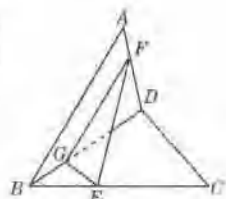


图 9-2-9

六、推理论述题(10分)

7. (测试知识点 1,2,3,5) 如图 9-2-10, E, F, G, H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边上的点, 且有 $AE:EB=AH:HD=m$, $CF:FB=CG:GD=n$.

(1) 证明: E, F, G, H 四点共面.

(2) m, n 满足什么条件时四边形 $EF GH$ 是平行四边形?

(3) 在(2)的条件下, 若 $AC \perp BD$, 试证明 $EG=FH$.

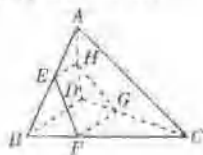


图 9-2-10

第三节 直线和平面平行与平面和平面平行



I. 必记知识全览

工欲善其事 必先利其器

一、必记概念

1. 直线与平面相交: 若直线 a 与平面 α 有且只有一个公共点, 则直线 a 与平面 α _____, 这个公共点叫做 _____.

2. 直线与平面平行: 若直线 a 与平面 α 没有公共点, 则直线 a 与平面 α _____, 记作 _____.

3. 直线在平面外: 直线 a 在平面 α 外, 是指直线 a 和平面 α _____ 或 _____, 记作 _____. 此时直线与平面公共点的个数为 _____.

4. 平行平面: 如果两个平面 _____, 那么这两个平面互相平行, 也叫做 _____, 平面 α 平行于平面 β , 记作 _____.

二、必记定理

5. 直线与平面平行的判定定理: 如果不在平面内的一条直线和平面内的一条直线 _____, 那么这

条直线和 _____.

6. 两平面平行的判定定理: 如果一个平面内有 _____ 分别 _____, 那么这两个平面平行.

三、必记性质

7. 直线与平面平行的性质: 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线 _____.

8. 两平行平面性质: 如果两个平行平面同时与第三个平面相交, 那么它们的 _____.

必记知识全览答案: 1. 相交; 直线 a 与平面 α 的交点 2. 平行; $a \parallel \alpha$ 3. 相交; 平行; $a \not\subset \alpha$; 0 或 1 个 4. 没有公共点; 平行平面; $\alpha \parallel \beta$ 5. 平行; 这个平面平行 6. 两条相交直线; 平行于另一平面 7. 平行 8. 交线平行



II. 知识点过关

过关斩将 显实力

知识点详解

一、基本知识点

知识点 1 直线和平面位置关系

直线和平面位置关系

①直线在平面内:如果一条直线和一个平面有两个或两个以上公共点,那么这条直线就在这个平面内.

②直线与平面相交:一条直线和一个平面有且只有一个公共点,这时我们说这条直线和这个平面相交.

③直线和平面平行:一条直线和一个平面没有公共点,这时我们说这条直线和这个平面平行.

于是直线和平面位置关系归纳如下:

a. 直线和平面相交 有且只有一个公共点.

b. 直线在平面内 有无数个公共点.

c. 直线和平面平行 无公共点.

d. 按公共点个数分类 $\begin{cases} \text{直线和平面平行,} \\ \text{直线和平面不平行} \begin{cases} \text{直线和平面相交,} \\ \text{直线在平面内.} \end{cases} \end{cases}$

e. 按是否在平面内分类 $\begin{cases} \text{直线在平面内,} \\ \text{直线不在平面内} \begin{cases} \text{直线和平面相交,} \\ \text{直线和平面平行.} \end{cases} \end{cases}$

特别指出:在直线和平面位置关系中,直线和平面平行,直线与平面相交,统称直线在平面外.

我们统一用记号 $a \not\subset \alpha$ 来表示 $a \parallel \alpha, a \cap \alpha = A$ 这两种情形.

案例练习

题 1-1: 在下列命题中,真命题共有()

①若点 $A \in \alpha$, 点 $B \notin \alpha$, 则直线 AB 与平面 α 相交;

②若 $a \subset \alpha, b \not\subset \alpha$, 则直线 a 与 b 必异面;

③若 $A \notin \alpha$, 点 $B \in \alpha$, 则直线 $AB \parallel$ 平面 α ;

④若 $a \parallel \alpha, b \subset \alpha$, 则 $a \parallel b$.

A. 1 个 B. 2 个

C. 3 个 D. 4 个

题 1-2: 在下列四个命题中,真命题是()

A. 两条平行直线中的一条与已知平面相交,则另一条也与该平面相交

B. 两条平行线中的一条与已知平面平行,则另一条也与该平面平行

C. 两条异面直线中的一条与已知平面平行,则另一条也与该平面平行

D. 两条异面直线中的一条与已知平面相交,则另一条也与该平面相交

题 1-1: A 点拨: ①由公理 1 及直线与平面平行的概念可知: 直线 $AB \not\subset \alpha$, 且 $AB \cap \alpha = A$, 所以直线 AB 与平面 α 相交. 故命题①是真命题. 对于②, 当直线 $b \cap \alpha = A$, 而 $A \in a \subset \alpha$ 时, a 与 b 是相交直线, 并不异面, 故命题②是假命题. 对于命题③, 例如, 设 $a \cap \alpha = P$, 取 $A, B \in a$ 且异于 P , 则 $A, B \notin \alpha$, 但直线 AB 与 α 相交, 故命题③是假命题. 对于命题④, a 与 b 也可以是异面直线, 故④也是假命题, 故选 A.

题 1-2: A 点拨: 对于命题 A, 设 $a \parallel b, a \cap \alpha = A$, 因为 $a \parallel b$, 所以 a, b 确定平面 β . 因为 $A \in a \subset \beta, A \in \alpha$, 所以 α 与 β 相交, 设交线为 l , 于是 $b \cap l = B$, 由于 $a \parallel b, a \cap l = A$, 即在平面 β 内 l 与两平行线中的一条相交, 则它必与另一条也相交, 所以 l 与 b 相交, 设 $l \cap b = B$, 则 $B \in l \subset \alpha, B \in b$.

所以 B 是 b 与 α 的一个公共点, 所以 $b \cap \alpha = B$, 同样 $b \not\subset \alpha$, 所以 b 与 α 必相交, 故命题 A 为真命题.

知识点 2 直线和平面平行的判定

在直线和平面各种位置关系中, 平行关系是一种非常重要的关系, 它不仅应用广泛, 同时又是学习平面和平面位置关系的基础, 那么如何判定直线和平面平行呢?

直线和平面平行的判定定理: 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行. (即线线平行, 则线面平行)

(1) 直线和平面平行的判定定理可简述为“线线平行, 则线面平行”, 可以用符号表示为 $a \parallel b, a \not\subset \alpha, b \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$

用该定理判定直线 a 与平面 α 平行时, 必须具备三个条件:

①直线 a 在平面 α 外, 即 $a \not\subset \alpha$.

②直线 b 在平面 α 内, 即 $b \subset \alpha$.

③两条直线 a, b 平行, 即 $a \parallel b$.

这三个条件缺一不可, 缺少其中任何一条, 结论就不一定成立了.

(2) 直线和平面平行的判定, 是将其转化为直线与直线平行的判定, 也就是说, 要证明一条直线和一个平面平行, 只要在平面内找出一条直线与已知直线平行即可.

题 2-1 证明: 如图 9-3-2, 连结 AN 并延长, 与 BE 相交于 G , 连 CG .

因为 $AF \parallel BG$, 所以 $\triangle NFA \sim \triangle NGB$, 所以 $\frac{FN}{NB} = \frac{AN}{NG}$. 因为 $FN = AM, AC = BF$, 所以

$\frac{FN}{NB} = \frac{AM}{MC}$, 所以 $\frac{AN}{NG} = \frac{AM}{MC}$, 则 $MN \parallel CG$.

由于 MN 是平面 BGC 外的一条直线, 所以 $MN \parallel$ 平面 BGC , 即 $MN \parallel$ 平面 BEC .

点拨: 证明线面平行的关键是找线线平行, 但必须是平面外的一条直线与平面内的一条直线平行, 这一点在证明过程中必须说清楚.

题 2-1: 如图 9-3-1 所示,

正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 所在平面相交于 AB , M, N 分别是对角线 AC 和 BF 上的点, 且 $AM = FN$.

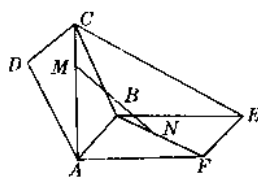


图 9-3-1

求证: $MN \parallel$ 平面 BEC .

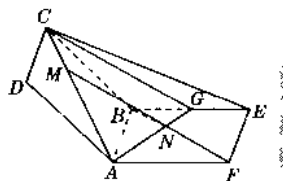


图 9-3-2

知识点 3. 直线和平面平行的性质

直线与平面平行的性质定理:如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线和交线平行.

直线和平面平行的性质定理可简述为“若线面平行,则线线平行.”可以用符号表示为:若 $a \parallel \alpha, a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b$, 则 $a \parallel b$. 这个性质定理也可以作为直线与直线平行的判定定理,用该定理判定 a 与 b 平行时,必须具备三个条件.

①直线 a 和平面 α 平行,即 $a \parallel \alpha$.

②平面 α 和平面 β 相交,即 $\alpha \cap \beta = b$.

③直线 a 在平面 β 内,即 $a \subset \beta$.

三者缺一不可,在应用这个定理时,要防止犯“一条直线平行于一个平面,就平行于这个平面内的一切直线”的错误.

题3-1 证明:过 a 作平面 γ 交平面 α 于 b ,如图 9-3-4,因为 $a \parallel \alpha$,所以 $a \parallel b$.

同样,过 a 作平面 δ 交平面 β 于 c ,因为 $a \parallel \beta$,所以 $a \parallel c$,所以 $b \parallel c$,又因为 $b \subset \beta$,且 $c \subset \beta$,所以 $b \parallel c$,又平面 α 经过 b 交 β 于 l ,所以 $b \parallel l$. 又 $a \parallel b$,所以 $a \parallel l$.

点拨:应用线面平行的性质定理时,应着力寻找过已知直线的平面与已知平面的交线,有时为了得到交线还需作出辅助平面.

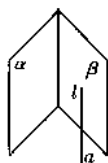


图 9-3-3

题3-1:求证:如果一条直线和两个相交的平面都平行,那么这条直线和它们的交线

平行.
已知:如图 9-3-3, $\alpha \cap \beta = l, a \parallel \alpha, a \parallel \beta$.

求证: $a \parallel l$.

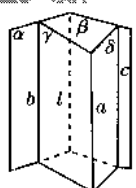


图 9-3-4

知识点 4. 两个平面的位置关系

两个平面的位置关系,同平面内两条直线的位置关系相类似,可以从有无公共点来区分.如果两个平面有一个公共点,那么由公理 2 可知:这两个平面相交于过这个点的一条直线;如果两个平面没有公共点,那么就说这两个平面相互平行.这样可以得出两个不重合的平面的位置关系:

①平行——没有公共点;

②相交——至少有一个公共点(或有一条公共直线)

空间两个平面的位置关系如下表所示:

位置关系	图示	表示法	公共点个数
两平面平行		$\alpha \parallel \beta$	无
两平面相交	斜交 	$\alpha \cap \beta = a$	有一条公共直线
	垂直 	$\alpha \perp \beta$ $\alpha \cap \beta = a$	有一条公共直线

题4-1:有四个命题:① c 为直线, α, β

为平面,若 $c \parallel \alpha, c \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;

②若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$;

③若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $a \cap b = \emptyset$;

④若 $a \subset \alpha, a \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

其中正确命题的个数为()

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

题4-2:一个平面内的无数条直线平行于另一个平面是这两个平面平行的()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题4-1:C 点拨:①②中的 α, β 可能平行也可能相交,③④都正确,故选 C.

题4-2:B 点拨:当两平面平行时,在其中任何一个平面内都存在无数条直线和另一个平面平行,而当一个平面内有无数条直线平行于另一个平面时,这两个平面却不一定平行,故选 B.

知识点 5. 两平面平行的判定

两个平面平行的判定定理

由两个平面平行的定义可以推出:若两个平面平行,那么在其中一个平面内的所有直线一定都和另一个平面平行.这是因为在这些直线中,如果有一条直线和另一个平面有公共点,这点也必是这两个平面的公共点,那么这两个平面就不可能平行了.反过来,若一个平面内的所有直线都和另一个平面平行,那么这两个平面平行,否则,若这两个平面有公共点,那么在一个平面内通过这点的直线就不可能平行于另一个平面.

这样,我们就可以把两个平面平行的问题转化为一个平面内的直线与另一个平面平行的问题,但是实际上判定两个平面平行的条件不需要一个平面内的所有直线都平行于另一个平面,到底需要多少条直线与另一个平面平行,才能判定两个平面平行呢?

两个平面平行的判定定理:如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

题5-1:如图 9-3-5, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, A', B', C' 分别是 $\triangle PBC, \triangle PAC, \triangle PAB$ 的重心.

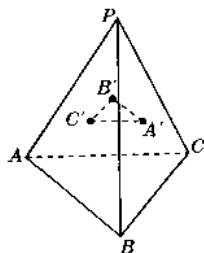


图 9-3-5

(1) 求证:平面 $A'B'C' \parallel$ 平