JG 经管综合类

Mathematics

概率论与数理统计

余长安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

经管综合类

Mathematics

概率论与数理统计

余长安 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/余长安编著.—武汉：武汉大学出版社，2007.3
经管综合类
ISBN 978-7-307-05442-4

Ⅰ.概… Ⅱ.余… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020580 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:刘　欣　　版式设计:杜　枚

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉市楚风印刷有限公司
开本:787×980 1/16　印张:19.25　字数:384 千字　插页:1
版次:2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05442-4/O·352　定价:27.00 元

内容简介

本书是武汉大学“十一·五”规划教材。这是作者根据多年讲授《概率论与数理统计》课程的教学实践经验，并结合全国硕士研究生入学考试对《概率论与数理统计》科目的基本要求编写而成的。全书共分八章，前五章为概率论部分，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和大数定律与中心极限定理；后三章属数理统计范畴，内容涉及数理统计的基本概念、参数估计与假设检验等基础知识。

每章末皆配有适量同步练习题，且依题目难易分为基本题与强化题，以满足各类读者之所需。为适应考研数学题型的要求，本书还编入了部分客观题（包括填空题与单项选择题）。

纵观全书，明显具有以下特点：内容充实，结构严谨；叙述清楚，行文流畅；深入浅出，易于理解；例题丰富，思路独道；利于讲解，便于自学。

本书为经管综合类教材，亦可作为理工类（非数学专业）学生的教学用书，且可供各类高等院校数学教师及相关技术人员参考备用。

前　言

我国一位著名作家关于文学创作曾说过："写什么固然重要，怎样写尤其重要"。这一至理名言，显然对于编撰数学教材同样具有指导意义。

大家知道，数学是研究空间形式与数量关系的学科；而概率论与数理统计则是研究与揭示随机现象的统计规律性的数学学科。该学科经过数百年的发展与完善，基本内容已相当丰富与完备。作为概率统计的基础教材，无疑也有一个选择哪些材料和如何组织编写的问题。遵循取材基于编撰目的和读者对象的基本写作原则，作者根据国家教育部颁发的《概率论与数理统计》教学大纲的主要精神，结合全国硕士生入学考试经济类（数学三与数学四）和理工类（数学一）对概率统计这一科目的基本要求，分别在概率论与数理统计方面选编了五章与三章内容。概率论部分的五章依次为随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征和大数定律与中心极限定理；数理统计方面的三章分别是数理统计的基本概念、参数估计及假设检验。

本书所介绍的概率统计内容，主要涉及离散型与连续型随机变量两个方面。尽管它们皆有相应的分布函数，但毕竟各自有其对应的较简单表达形式。尤其是相应的边缘分布、条件分布以及随机变量的函数之分布，连续型较离散型（在一般情形下）要复杂得多。有鉴于此，本书在第二章（一维随机变量）与第三章（多维随机变量）皆是依次介绍离散型随机变量、分布函数、连续型随机变量及其他相关内容。

本书主要内容，基本适用于一个学期（54 学时）的讲授安排。为了使全书内容较为完整，对考研并非要求的少数较为通用的知识点，本书亦予编入（相关节、段已用"*"标明），各专业可以根据课时安排情况适当取舍。

《概率论与数理统计》是一门理论性与实用性皆强的科目。为了增强读者对相关概念的理解和提高解决实际问题的能力，书中配有内容较齐全、梯度甚明显的例题。为了加强读者对本章乃至全书的综合了解与认知深化，以及满足考研对数学的要求，本书在各章末尾均特别编写了一节"典型例题"。原则上，这一节教师可以不讲授，让学生自学。

概率统计由于有离散型与连续型之分，以及一维与二（多）维随机变量之别，为了便于记忆，避免混淆，本书除了第一章给出了"随机事件的关系与运算综合表"外，还在第四章末列出了"几种常用的概率分布表"，在第七章末列出了"单个

及两个正态总体的置信区间表”，在第八章中给出了“正态总体参数的假设检验表”，请读者注意了解和使用。

习题往往是正文的延伸或补充。学生通过做练习题，可以巩固和深化所学知识。本教材依照正文顺序，筛选配备了适量（同步）练习题，且依习题解答的难易程度，分为基本题与强化题两类，以满足不同要求读者的需要。为了适应考研题型的要求，该书还编入了若干客观题（包括填空题与单项选择题）。上述两方面习题，书末皆给出了答案。

本书为经管综合类教材，亦宜作为理工类专业的教学用书，且可以供各类高等院校数学教师及相关技术人员参考使用。

本书作为武汉大学“十一·五”规划教材，得到了学校和学院的资助。该书在编写过程中，一直受到学院及出版社相关领导的热情鼓励与大力支持，并获得了我院多名相关专家、教授和同事的悉心指导与积极帮助，还得到了一些博士、硕士及高年级大学生的多方面协助。在此，作者向上述相关职能部门、相关领导、专家、教授和同事以及学生表示最诚挚的谢意！

由于时间仓促，特别是限于本人的学识水平与认知程度，本书漏误之处恐在所难免。作者热切期待各位专家、同行和广大读者及时批评指正，不吝赐教。

作　者

于武汉大学樱园

2006 年 9 月 8 日

目　录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是一门研究与揭示随机现象统计规律性的数学学科.该学科是近代数学的重要组成部分,同时也是近代经济学理论的应用与研究的重要工具.

“欲涉远必自迩,欲登高必自卑”,我们对一门科学进行学习与研究,就必须从钻研这门科学的一些基本概念、理论与方法入手.本章重点介绍概率论中的两个基本概念:随机事件与随机事件的概率,这两个基本概念是学习概率论与数理统计的基础.

§1.1　基本概念

1.1.1　随机现象

自然界与人类社会存在和发生的各种现象,大致可以归结为两类:确定性现象与随机现象.例如,向上抛掷重物必然自由落下;在大气压力为101.325Pa,纯净水被加热到100℃时必然沸腾,而温度被降到0℃时又必然会结冰,等等.这种在一定条件下必然会发生(或必然不发生)的现象,称为**确定性现象**.几何、代数、微积分、线性代数等皆是研究确定性现象的数学工具.另一类现象与确定性现象却有着本质的区别.例如,在相同条件下,抛掷一枚质地均匀的硬币,硬币落地后可能是正面(有币值的一面)朝上,也可能是反面朝上;一堆产品中混合有合格品与不合格品,从中随意抽取一件,则取到的可能是合格品,也可能是不合格品,等等.这类现象的特点是:在同样条件下重复进行试验,每次试验的结果可能不止一个,且事先不能预知将会出现哪一种结果,即试验结果呈现出不确定性.

但人们经过长期实践与深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,其结果却呈现出某种“固有的”规律性,即**统计规律性**.我们把这类在个别试验中呈现不确定性,而在大量重复试验或观察中又具有统计规律性的现象称为**随机现象**.

需要指出的是,这里所说的不确定性包含两方面的含义:一个是客观结果的不确定性;另一个是主观猜测的不确定性(后者往往融入了观察者个人的信念).像做抛硬币试验,抛掷之前,我们不能确定到底会出现正面还是反面,即使硬币落了

地，结果事实上已经确定，但人们在对结果进行观察确认之前，仍无法确定硬币是出现正面还是反面.

事实上，限于人们的实践能力与认知程度，许多平常被人们认作必然现象的情况，其实也存在着随机的不确定性成分. 比如，欧姆定律 $V = IR$，该定律是电动势 V、电流强度 I 与电阻 R 之间的一个精确关系. 但在具体的一个电路中，极大量的电子的运动形成了该电路中的电流，而各个电子的运动仍是随机的. 只是因为电子的数量极大，从而它们的综合效应表现出了相当的稳定性，通常由极大量的电子运动形成的电路中的电流似乎是恒定的，其实这个电流仍是波动的，只因这个波动的幅度往往过于微小，以至于我们的仪器都对这个波动失察了.

类似于这种似乎必然发生的现象是大量存在的. 但在现实世界中，必然性总是占据着统治地位的，而偶然性作为必然性的表现形式似乎是随机的、难以捉摸的，其实偶然性仍然遵循着必然的规律，只是往往由于种种条件的限制，使人们难以甚至无法去追究其"偶然性"形成的必然原因罢了. 概率统计的任务，就是要透过大量的表面偶然性，去发现内部隐藏着的统计规律性，通过随机性去认识确定性.

1.1.2 随机试验

随机现象虽然给人们的感觉是难以捉摸、不好把握的，似乎丧失了确定性模型中所固有的客观规律性. 但是人们发现很多随机现象依然存在着固有的规律性，这种规律性往往是在大量的"试验"中呈现出来的.

这里所指(概率统计中)的"试验"是一个含意广泛的术语，这类试验包括为研究随机现象而进行的各种科学试验或对事件的某种特性进行观察，常用字母 E 表示这类试验. 例如，E_1：抛掷一枚硬币，观察硬币出现正面 H 朝上与反面 T 朝上的情况；E_2：抛掷二枚硬币，观察硬币出现正面 H 朝上与反面 T 朝上的情况；E_3：抛掷一颗骰子，观察骰子出现的点数；E_4：记录电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数；E_5：在一批同型号的灯泡中任意抽取一只，测试灯泡的使用寿命，等等.

易知，以上这些试验具有如下共同特点：1. 试验可以在相同的条件下重复进行；2. 每次试验的可能结果不止一个，但是能事先明确试验的所有可能的结果；3. 每次试验之前不能确定会出现哪一个结果. 一般地，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称为**试验**. 我们常常是通过随机试验来研究随机现象的.

1.1.3 样本空间

上述随机试验的第二个特点指明，尽管试验前我们不能预知究竟出现哪种结果，但这种试验所有可能的结果在试验之前是已知的. 我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示. Ω 中的元素，即 E 的每一个可能结果，称为**样本点**，一般用 ω 表示.

前面所述试验 E_k 的样本空间 $\Omega_k(1 \leqslant k \leqslant 5)$ 可以分别表示为：$\Omega_1 = \{\mathrm{H,T}\}$；

$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$；$\Omega_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$；$\Omega_4 = \{0,1,2,\cdots\}$；$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$.

这里需要指出的是，样本空间中的元素（样本点）是由试验的内容与目的所确定的. 不同的试验目的，其样本空间也不一样. 例如，若将 E_1 改为 E_1'：将一枚均匀硬币抛掷两次，观察出现正面的次数，那么 $\Omega_1' = \{0,1,2\}$.

此外，从上述 $\Omega_k(1 \leqslant k \leqslant 5)$ 可以看到，样本空间可以是数集，也可以不是数集；可以是有限集，也可以是无限集.

1.1.4 随机事件

在随机试验中，人们通常不仅关心某个样本点出现，更关心满足某些条件的样本点出现，即关心试验时可能出现的某种结果. 例如，在掷骰子的试验 E_3 中，我们可能关心是否出现点数 1，亦或可能关注是否出现奇数点（即点数 1,3,5）等结果. 它们皆为样本空间的子集（随机试验可能出现的结果），我们称之为**随机事件**，简称为**事件**. 随机事件通常用大写英文字母 A,B,C，或其带下标的形式 A_1,B_2,C_k $(k = 1,2,\cdots)$ 等表示. 事件 A 在一次试验中发生，当且仅当本次试验结果 $\omega \in A$. 此外，我们称仅含一个样本点的随机事件（不能再分解的最简单的随机试验结果）为**基本事件**；由多个样本点构成的集合称为**复合事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点，样本点是 Ω 自身的一个子集. 显然在每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，我们将其称为**必然事件**，仍记为 Ω. 因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，空集不包含任何样本点，显然在每次试验中都不会发生，我们将其称为**不可能事件**. 很明显，必然事件与不可能事件并不具有随机性，但是为了讨论问题方便，也把它们看作特殊的随机事件.

§1.2 随机事件间的关系与运算

1.2.1 随机事件的关系与运算

前节所述相关概念表明，某随机试验的基本事件是该试验样本空间 Ω（可以视为全集）中的元素，也称之为 Ω 中的样本点，而随机事件则是 Ω 的子集. 因此，随机事件之间的关系与运算在本质上与集合之间的关系与运算是一致的. 为此，我们将以集合论的观点和表示方法给出随机事件间的关系与运算（有关集合论语言描述及文氏图见表 1-1）.

以下设已给定某样本空间 Ω（全集）；$A,B,C,A_k(k = 1,2,\cdots)$ 等均为 Ω 中的随机事件（Ω 的子集）；而用具体元素表出的集合 A,B 皆为掷骰子试验所对应的样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集.

1. 事件的**包含关系**

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于

事件 B,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$. 从集合论的观点看,事件 B 包含事件 A 就是 A 中的每一个样本点都包含在 B 中. 例如,设 $A = \{1,2\}$,$B = \{1,2,3\}$,则 $A \subset B$. 对任一事件 A,有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 事件的**相等关系**

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A = B$. 相等的两个事件所包含的样本点完全相同. 例如在掷骰子试验中,设 $A = \{2,4,6\}$,$B = \{$偶数点$\}$,则 $A = B$.

3. 事件的**和(并)**运算

"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"这一事件,称为事件 A 与事件 B 的和(或并),记为 $A + B$ 或 $A \cup B$. $A + B$ 是由事件 A 与事件 B 的所有样本点构成的集合. 例如,设 $A = \{1,4\}$,$B = \{1,2,3\}$,则 $A \cup B = \{1,2,3,4\}$. 对任一事件 A,有 $A + A = A$,$A + \varnothing = A$,$A + \Omega = \Omega$. 事件的和的概念可以推广到有限个或可列无穷多个事件的场合. "事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"这一事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和(或并),记为 $\sum_{k=1}^{n} A_k$(或 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$);"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生"这一事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和(或并),记为 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$(或 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$).

4. 事件的**积(交)**运算

"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件,称为事件 A 与事件 B 的积(或交),记为 AB 或 $A \cap B$. AB 是由事件 A 与事件 B 的所有公共样本点构成的集合. 例如,设 $A = \{1,4\}$,$B = \{1,2,3\}$,则 $AB = \{1\}$. 对任一事件 A,有 $AA = A$,$A\varnothing = \varnothing$,$A\Omega = A$. 类似地,"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积(或交),记为 $\prod_{k=1}^{n} A_k$(或 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$);"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生"这一事件,称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积(或交),记为 $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$(或 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$).

5. 事件的**差**运算

"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件,称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A - B$. $A - B$ 是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合. 例如,设 $A = \{1,4\}$,$B = \{1,2,3\}$,则 $A - B = \{4\}$. 显见,有 $A - B = A\overline{B}$.

6. 事件的**互不相容(互斥)**关系

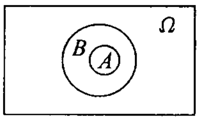
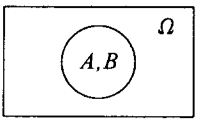
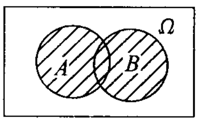
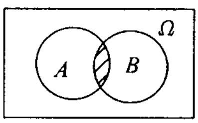
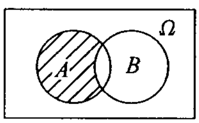
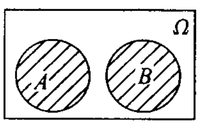
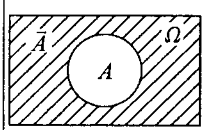
若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容,也称 A 与 B 互斥. 事件 A 与事件 B 互不相容表示 A 与 B 没有公共的样本点. 例如,设 $A = \{1,2\}$,$B = \{3,4\}$,则 $AB = \varnothing$. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(或 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$)中任意两个事件都互不相容,即 $A_iA_j = \varnothing$($i \neq j$;$i,j = 1,2,\cdots,n$(或 $i \neq j$,$i,j = 1,2,\cdots,n,\cdots$)),则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(或 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$)两两互不相容.

7. 事件的**对立**(**互逆**)关系

“事件A不发生”(或事件“非A”)称为A的对立事件,也称为A的逆事件,记为$\overline{A}$. $\overline{A}$是由样本空间Ω中不属于A的那些样本点构成的集合,即$\overline{A}=\Omega-A$. 例如,设$A=\{1,2\}$,则$\overline{A}=\Omega-A=\{3,4,5,6\}$. 显然,有:$A\overline{A}=\varnothing$, $A+\overline{A}=\Omega$, $\overline{\overline{A}}=A$.

为了便于对照和记忆,我们把随机事件的关系与运算列入表1-1中(表1-1中事件A发生$\Leftrightarrow$试验E的结果$\omega\in A$(符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”)).

表1-1

关系或运算	符号(集合表示)	图示	概率论语言描述	集合论语言描述	$A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$
事件B包含事件A	$A\subset B$ (或$B\supset A$)		若事件A发生则事件B必发生.	$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$	显然A含于B
事件A与事件B相等	$A=B$		若事件A发生则事件B必发生,且反之亦然.	$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$ $\omega\in B\Rightarrow\omega\in A$	改B为{点数小于3}即可
事件A与事件B的和(并)	$A+B$ $(A\cup B)$		事件A与事件B中至少有一个发生.	$\omega\in A\cup B\Leftrightarrow$ $\omega\in A$或$\omega\in B$	$\{1,2,3\}$
事件A与事件B的积(交)	AB $(A\cap B)$		事件A与事件B同时发生.	$\omega\in AB\Leftrightarrow\omega\in A$且$\omega\in B$	$\{1,2\}$
事件A与事件B的差	$A-B$		事件A发生但事件B不发生.	$\omega\in A-B\Leftrightarrow$ $\omega\in A$且$\omega\notin B$	$\varnothing$
事件A与事件B互不相容(互斥)	$AB=\varnothing$		事件A与事件B不能同时发生.	A,B无公共元素	改B为$\{3\}$即可
事件A的对立事件	$\overline{A}=\Omega-A$		事件A不发生.	$B=\Omega-A$ $AB=\varnothing$ 且$A\cup B=\Omega$	$\{3,4,5,6\}$

1.2.2 随机事件的运算性质

随机事件的运算性质与集合的运算性质完全相同，这里仅列出其主要性质（证略）：

1. 交换律 $A+B=B+A \quad (A\cup B=B\cup A), AB=BA \quad (A\cap B=B\cap A)$.

2. 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C) \quad ((A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C))$,

$(AB)C=A(BC) \quad ((A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C))$.

3. 分配律 (1) $(A+B)C=AC+BC \quad ((A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cup C))$（第一分律配）.

推广至任意有限个事件，则为 $(\sum\limits_{k=1}^{n}A_k)C=\sum\limits_{k=1}^{n}A_kC \quad ((\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k)\cap C=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\cap C)$.

(2) $AB+C=(A+C)(B+C) \quad ((A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C))$（第二分配律）.

推广至任意有限个事件，则为 $\prod\limits_{k=1}^{n}A_k+C=\prod\limits_{k=1}^{n}(A_k+C) \quad ((\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k)\cup C=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(A_k\cup C))$.

4. 德摩根律（对偶律） (1) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \quad (\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B})$（第一对偶律）. 其推广形式为

$$\overline{\sum_{k=1}^{n}A_k}=\prod_{k=1}^{n}\overline{A_k} \quad (\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}).$$

(2) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B} \quad (\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B})$（第二对偶律）. 其推广形式为

$$\overline{\prod_{k=1}^{n}A_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{A_k} \quad (\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}).$$

利用随机事件的关系与运算可以表示一些较复杂的事件，为今后的学习与计算带来方便. 请看下面的例子.

例 1.2.1 设 A,B,C 是随机事件，说明下列关系式的概率意义：(1) $ABC=A$；(2) $A\cup B\cup C=A$；(3) $AB\subset C$；(4) $A\subset\overline{BC}$.

解 (1) 若 $ABC=A$，则 $BC\supset A$，这表示 $B\supset A$ 且 $C\supset A$，即若 A 发生，则 B 与 C 同时发生；(2) 若 $A\cup B\cup C=A$，则 $B\cup C\subset A$，即有 $B\subset A$ 且 $C\subset A$，这表示 B 发生或 C 发生，都将导致 A 发生；(3) $AB\subset C$ 表示 A 与 B 同时发生必导致 C 发生；(4) 若 $A\subset\overline{BC}$，则 $A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$，即若 A 发生，则 B 与 C 至少有一个不发生.

例 1.2.2 一批产品中有若干个正品和次品，从中不放回地抽取三次，每次任取一件进行检查，设 A_k 表示事件"第 k 次取到正品"($k=1,2,3$). 试用 A_k 表示下列事件：(1) $A=$"三次都取到正品"；(2) $B=$"前两次都取到正品，第三次取到次品"；(3) $C=$"三次中至少有一次取到正品"；(4) $D=$"三次中至多有一次取到正品".

解 依题设,上述各事件可以分别表示为:(1)$A = A_1A_2A_3$;(2)$B = A_1A_2\overline{A}_3$;(3)$C = A_1 + A_2 + A_3$ 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$;(4)$D = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 或 $\overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1\overline{A}_3 + \overline{A}_2\overline{A}_3$.

例1.2.3 如果x表示一个沿数轴做随机运动的质点的位置,试说明下列各事件的关系:$A = \{x \mid x \leqslant 10\}$,$B = \{x \mid x > 3\}$,$C = \{x \mid x < 6\}$,$D = \{x \mid x < -3\}$,$E = \{x \mid x \geqslant 6\}$.

解 各事件的情况如图 1-1 所示.

由图 1-1 可见,$A \supset C \supset D$,$B \supset E$;D与B,D与E互不相容;C与E为对立事件;B与C,B与A,E与A相容,显然A与C,A与D,C与D,B与E也是相容的.

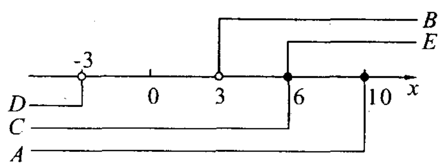


图 1-1

§1.3 频率与概率的统计定义

1.3.1 频率

研究随机现象,不仅需要知道可能出现哪些事件,更重要且更具实际意义的是需要研究、了解各事件发生可能性的大小,并加以度量. 例如,为了确定水坝的高度,就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 我们希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此,首先引入频率,频率描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— **概率**.

定义 1.3.1 在相同的条件下,进行了n次试验,在这n次试验中,事件A发生的次数n_A称为事件A发生的**频数**,比值$\dfrac{n_A}{n}$称为事件A发生的**频率**,并记成$f_n(A)$.

由定义 1.3.1,易验证频率具有下列性质:

(1) 非负性:对任何事件A,$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) 规范性:$f_n(\Omega) = 1$;

(3) 有限可加性:若事件A与事件B互不相容,则$f_n(A + B) = f_n(A) + f_n(B)$.

实际经验表明,频率具有一定的随机波动性,但频率在一定程度上体现了事件发生的可能性大小,用其衡量一些事件发生可能性大小有相应的合理性与实用性.

比如在射击比赛中,人们常用命中率(高低)来表示射手的水平. 尽管在实践中,作同样多次的随机试验,可能会得到不同的频率,但随着试验次数的增加,频率却会呈现出明显的稳定性,也就是事件 A 的频率 $f_n(A)$ 越来越接近某个确定的数值 p. 频率的这种稳定性就是我们前面所述的统计规律性. 因此,事件 A 发生的可能性大小就可以用上述频率的稳定值来描述.

1.3.2 概率的统计定义

随机事件在一次试验中发生与否带有不确定性,但在大量重复试验中却会呈现出固有的规律性. 下面来看一个历史上著名的试验. 抛掷一枚均匀的硬币,规定某一面为正面,并设 A 表示正面向上. 试验者与试验结果如表 1-2 所示.

由表 1-2 可见,$f_n(A)$ 在 0.5 附近摆动,而且随着试验次数的增加,$f_n(A)$ 接近 0.5 的趋势越加明显(称这一现象为频率的稳定性),称 0.5 为 $f_n(A)$ 的稳定值. 显然,频率 $f_n(A)$ 的这一稳定值反映了事件 A 发生可能性的大小,可以作为其度量指标. 为此引入下述定义.

表 1-2

试验者	抛掷次数(n)	A 发生的次数(m)	频率 $f_n(A)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
费　勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

定义 1.3.2 在观察某一随机事件 A 的随机试验中,随着试验次数 n 的增大,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动,这时就以常数 p 作为事件 A 的**概率**,并称其为统计概率,即 $P(A)=p$.

数值 p(即 $P(A)$)就是在一次试验中对事件 A 发生可能性大小的数量描述. 比如,上例用 0.5 来描述抛掷一枚均匀的硬币"正面"出现的可能性.

需强调指出的是:频率的稳定性是概率的经验基础,但并不意味着概率取决于试验. 一个事件发生的概率完全取决于事件本身的结构,是先于试验而客观存在的. 这就如讲台的宽度,教室的面积一样,与测量方式及次数无关. 一般说来,并不容易根据定义得到事件 A 的概率的精确值,但由于该值是频率的稳定值,因此常常以试验次数 n 充分大时的 $f_n(A)$ 或多组试验中 $f_n(A)$ 的平均值来近似估计概率 p 的