配江苏教育版

普通高中课程标准实验教科书

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

Jiaoxue Yu Ceshi

高中数学

2006~2007

教学与测试

- 新教材
- 教师用书
- 必修5

苏州大学出版社

配江苏教育版
普通高中课程标准实验教科书

高中数学 教学与测试

教师用书

（必修 5）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试. 必修5:教师用书/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. 一苏州:苏州大学出版社,2006.7

配江苏教育版普通高中课程标准实验教科书

ISBN 7-81090-708-5

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第083069号

高中数学教学与测试

教师用书

(必修5)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑 秦 淦

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

江苏省新华书店经销

丹阳教育印刷厂印装

(地址:丹阳市西门外 邮编:212300)

开本 787×1092 1/16 印张 9.25 字数 229千

2006年7月第1版 2006年7月第1次印刷

ISBN 7-81090-708-5/G·353 定价:13.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《高中数学教学与测试》编委会

（江苏教育版·必修5）

前　言

PREFACE

普通高中课程标准实验教科书(数学)已在广东、山东、宁夏、海南、江苏开始实验,并在全国部分省市扩大试用.为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书,我部聘请了部分参加教材编写的中学特级教师和高级教师,经过精心策划,编写了与江苏教育版教材配套的“高中数学教学与测试”系列用书.它既可作为学生的练习用书,也可作为教师的教学参考用书.根据广大师生的使用意见及建议,本次修订将“高中数学教学与测试”系列用书按必修5个模块重新划分,本书是必修5模块.

本模块分学生用书和教师用书两册.学生用书包含解三角形、数列和不等式三章.全书的编写依据课标,紧扣课本,配合课堂教学进行同步训练.原则上每节1课时,共37节.本次修订重新调整了体例结构,每节新课按[双基演练]、[范例解读]、[归纳点拨]及[测试反馈]编排;习题课按[双基演练]、[范例解读]、[测试反馈]编排;复习课按[双基演练]、[测试反馈]编排.为方便使用,学生用书采用1+1模式:[双基演练]、[范例解读]、[归纳点拨]自成一册;[测试反馈]也独立成册,供课后练习使用.教师用书包括相应学生用书的全部题目及详细的例题、习题解答.同时,为方便教师使用,教师用书另设[教学建议],对重点、难点及教法作精要的解析.

本书由责任编委、执行编委及顾问策划,全体编委会集体讨论编写大纲,最后由三位教师执笔:沙敏林(江苏省震泽中学),第一章;张松年(南京市金陵中学),第二章;钱军先(无锡市辅仁高级中学),第三章.

各章由责任编委、执行编委及顾问把关,苏州大学数学科学学院的三位老师负责审校:王晓春,第一章;周超,第二章;王金才,第三章.

多年来,全国各地的中学教师、学生以及社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持.对于这次根据普通高中课程标准实验教科书编写的“高中数学教学与测试”提出了许多有益的建议,在此一并表示感谢.

我们真诚地希望使用本书的教师、学生和家长能及时地将使用的情况和意见反馈给我们,以便我们作进一步的修改和完善.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2006年6月

目　　录

CONTENTS

第一章　解三角形

第二章　数　列

第三章 不等式

第一章 解三角形

1. 正弦定理(1)

教学建议

1. 正弦定理的证明可介绍多种方法，但要重点突出向量证法；

2. 正弦定理主要运用于三角形中“已知两角一边”、“已知两边一对角”等的相关问题.

双基演练

1. 在$\triangle ABC$中，$C=105^\circ$，$B=45^\circ$，$c=5$，则b的值为　　　　(A)

A. $5(\sqrt{3}-1)$　　B. $5(\sqrt{3}+1)$　　C. 10　　D. $5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

2. 在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=4$，$\sin B=\frac{2}{3}$，则$\sin A=$　　　　(C)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 在$\triangle ABC$中，a,b,c所对的角分别为A,B,C，且$\frac{a}{\sin B}=\frac{b}{\sin C}=\frac{c}{\sin A}$，则$\triangle ABC$是<u>等边</u>三角形.

4. 已知$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{3}$，$a=3\sqrt{6}$，$b=6$，则$B=$<u>$\frac{\pi}{4}$</u>.

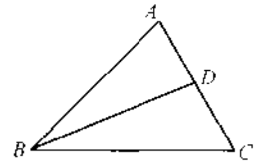
范例解读

例1　在锐角三角形ABC中，$A=2B$，a、b、c所对的角分别为A、B、C，试求$\frac{a}{b}$的范围.

分析　本题由条件锐角三角形得到B的范围，从而得出$\frac{a}{b}$的范围.

解　在锐角三角形ABC中，A、B、$C<90^\circ$，即$\begin{cases}B<90^\circ,\\2B<90^\circ,\\180^\circ-3B<90^\circ,\end{cases}$　$\therefore 30^\circ<B<45^\circ$. 由正弦定理知：$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故所求的范围是$(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

例 2 试用正弦定理证明角平分线定理.



已知:如图,在$\triangle ABC$中,BD为角B的平分线.求证:$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$.

证明 由正弦定理知:$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$,而在$\triangle ABD$和$\triangle DBC$中,分别有$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{BD}{\sin A}\\ \dfrac{DC}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin C}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{\sin C}{\sin A}$,从而得到$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$.

归纳点拨

在三角形中运用正弦定理时还要注意以下性质:

$A+B+C=\pi$;

$\sin(A+B)=\sin C$, $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$, $\cos(A+B)=-\cos C$, $\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$;

$S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

测试反馈

1. 满足$a=4$,$A=45°$,$B=60°$的$\triangle ABC$的边b的值为 (A)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{3}+2$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $2\sqrt{3}+1$

2. $\triangle ABC$中$a=6$,$b=6\sqrt{3}$,$A=30°$,则边$c=$ (C)

A. 6　　B. 12　　C. 6或12　　D. $6\sqrt{3}$

3. 在$\triangle ABC$中,已知$a=2$,$b=2\sqrt{2}$,$A=30°$,则$B=$<u>45°或135°</u>.

4. 在$\triangle ABC$中,$b^2=4a^2\sin^2B$,则$A=$<u>30°或150°</u>.

5. 已知在$\triangle ABC$中,$c=10$,$A=45°$,$C=30°$,求a,b和B.

解 由正弦定理知:$a=\dfrac{c}{\sin C}\cdot\sin A=\dfrac{10}{\sin30°}\cdot\sin45°=10\sqrt{2}$,

$B=180°-A-C=105°\Rightarrow b=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin B=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sin45°}\cdot\sin105°=5\sqrt{6}+5\sqrt{2}$.

6. 在$\triangle ABC$中,$b=\sqrt{3}$,$B=60°$,$c=1$,求a和A,C.

解 由正弦定理知:$\sin C=\dfrac{c}{b}\cdot\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin60°=\dfrac{1}{2}$,

解得$C=30°$或$150°$.因为$A+C+B=180°$,所以$C=150°$不合题意,舍去.

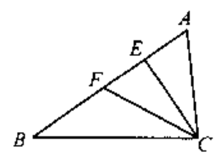
从而有$A=90°$,$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.

7. 在$\triangle ABC$中,设$\dfrac{\cos B}{3b}=\dfrac{\cos C}{2c}=\dfrac{\cos A}{a}$,求$\cos A$的值.

解 由正弦定理得:$\dfrac{\cos B}{3\sin B}=\dfrac{\cos C}{2\sin C}=\dfrac{\cos A}{\sin A}\Rightarrow\begin{cases}\tan B=\dfrac{1}{3}\tan A,\\ \tan C=\dfrac{1}{2}\tan A.\end{cases}$

又$\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\dfrac{5\tan A}{6-\tan^2 A}\Rightarrow\tan^2 A=11\Rightarrow\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

8. 在$\triangle ABC$中,$a=15$,$b=10$,$A=60^\circ$,CE,CF三等分角C,求CE,CF的长.



解 如图,$\sin B=\dfrac{b}{a}\cdot\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B\approx 36^\circ\Rightarrow C\approx 84^\circ\Rightarrow\angle ACE=\angle ECF=\angle FCB\approx 28^\circ$.

$CE=\dfrac{b}{\sin\angle AEC}\cdot\sin A=\dfrac{10}{\sin 92^\circ}\cdot\sin 60^\circ\approx 8.7$,

$CF=\dfrac{a}{\sin\angle BFC}\cdot\sin B=\dfrac{15}{\sin 116^\circ}\cdot\sin 36^\circ\approx 9.8$.

2. 正弦定理(2)

教学建议

1. 新课程标准中计算可以用计算器,因此在解三角形中也要适当地设置一些"机"算题,也可以先给出数据,再让学生计算;

2. 正弦定理的教学要达到使学生"记熟公式"和"正确运算"这两个目标.

双基演练

1. 在$\triangle ABC$中,若$A=\dfrac{\pi}{3}$,$a=3$,$b=\sqrt{6}$,则$C=$ (D)

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{5\pi}{6}$　　D. $\dfrac{5\pi}{12}$

2. 若钝角三角形三内角满足关系:$A-B=B-C$,且最大边长与最小边长的比值为m,则m的取值范围是 (B)

A. $(1,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $[3,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

提示 设$A>B>C$,则$B=\dfrac{\pi}{3}$,$A\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$C\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$,$m=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=$

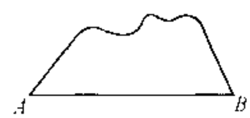
$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan C}-\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}=2$,故选 B.

3. 在$\triangle ABC$中,已知$A=\frac{\pi}{6}$,$c=\sqrt{3}a$,则$\triangle ABC$是__等腰或直角__三角形.

4. 在$\triangle ABC$中,$A=\frac{\pi}{3}$,$b=12$,$S_{\triangle ABC}=18\sqrt{3}$,则$\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$__6__.

范例解读

例 1 在埃及,有许多金字塔,经过几千年的风化蚀食,有不少已经损坏了,考古人员在研究中测得一座金字塔的横截面如图(顶部已经坍塌了),$A=50°$,$B=55°$,$AB=120$ m.如何求得它的高?($\sin 50°\approx 0.766$,$\sin 55°\approx 0.819$)



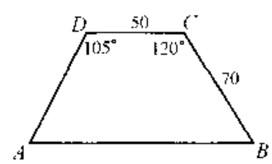
分析 本题可以转化成:(1) 解三角形,确定顶点 C;(2) 求三角形的高.

解 先分别从 A,B 出发延长断边,确定交点 C,$C=180°-A-B$,

$AC=\frac{AB}{\sin C}\cdot\sin B=\frac{120}{\sin 75°}\cdot\sin 55°\approx 101.8$,

设高为 h,则 $h=AC\cdot\sin A=101.8\cdot\sin 50°\approx 78$ m.

例 2 如图,一座拦水坝的横断面为梯形,求拦水坝的横断面面积(精确到 0.1).



解 连接 BD,设$\angle BDC=\alpha$,则由正弦定理知:

$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{DC}{\sin\angle DBC}$,即$\frac{70}{\sin\alpha}=\frac{50}{\sin(60°-\alpha)}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{7\sqrt{3}}{17}\Rightarrow\alpha\approx 35.5°$,从而有$\angle BDA=105°-35.5°=69.5°$,

$\frac{BD}{\sin 120°}=\frac{BC}{\sin 35.5°}\Rightarrow BD\approx 104.4$,由于$\frac{AB}{\sin\angle BDA}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$,即$\frac{AB}{\sin 69.5°}=\frac{104.4}{\sin 75°}\Rightarrow AB\approx 101.2$,而梯形的高 $h=BC\sin\angle ABC=70\sin 60°=35\sqrt{3}$.

所以有 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(CD+AB)h=\frac{1}{2}(50+101.2)\times 35\sqrt{3}\approx 4583.0$.

注 本题也可以构造直角三角形来解,过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E,过 D 作 $DF\perp AB$ 于 F 即可.

归纳点拨

把比例的性质用在正弦定理中可得:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a\pm b}{\sin A\pm\sin B}=\frac{a\pm b\pm c}{\sin A\pm\sin B\pm\sin C}$.

测试反馈

1. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A=2\sin B\cdot\cos C$，$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，则$\triangle ABC$是 (C)

A. 直角三角形　　B. 等腰或直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形

2. 在$\triangle ABC$中，已知$B=45^\circ$，$c=2\sqrt{2}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则A的值是 (D)

A. 15°　　B. 75°　　C. 105°　　D. 75°或15°

3. 在$\triangle ABC$中，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$，则$\frac{a-b}{a+b}=$ $\underline{2\sqrt{6}-5}$.

4. 在$\triangle ABC$中，若$c=10\sqrt{2}$，$C=60^\circ$，$a=\frac{20\sqrt{3}}{3}$，则$A=$ $\underline{45^\circ}$.

5. 在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{a+b}{c}$.

证法1　由正弦定理得$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$，$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$，所以$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{a+b}{c}$.

证法2　由正弦定理得$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，代入原式右端，

右式$=\frac{2R\sin A+2R\sin B}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=$左式.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$2B=A+C$，$b=1$，求$a+c$的取值范围.

解　$\because 2B=A+C$，$\therefore B=60^\circ$. $\because b=1$，$\therefore$ $\triangle ABC$外接圆的半径$R=\frac{1}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$a+c=2R(\sin A+\sin C)=2R[\sin A+\sin(120^\circ-A)]=2\sin(A+30^\circ)$.

$\because 0^\circ<A<120^\circ$，$\therefore$ $a+c$的取值范围是$(1,2]$.

7. 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{b+a}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且$2\sin A\sin B=2\sin^2 C$，试判别其形状.

解　由已知$\frac{b+a}{a}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin A}=\frac{b}{b-a}$，$\therefore b^2-a^2=ab$.　①

又$2\sin A\sin B=2\sin^2 C$，由正弦定理得$2ab=2c^2$.　②

由①、②得$b^2-a^2=c^2$，即$b^2=a^2+c^2$，所以该三角形为以B为直角顶点的直角三角形.

8. 在$\triangle ABC$中，已知$\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，且最长边的长为l，求：

(1) 角C；　(2) 最短边的长.

解　(1) $\because \tan(A+B)=1$，$\therefore C=\frac{3\pi}{4}$.

(2) $\because \tan A>\tan B$，且C为钝角，故b最小，c最大. 由$\tan B=\frac{1}{3}$得$\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，由正弦定

理求得,最短边长 $b=\frac{\sqrt{5}}{5}l$.

3. 余弦定理(1)

教学建议

余弦定理的特点是:(1) 涉及的元素是三边一角,已知其中三个元素可求另一个;(2) 是含有边的二次式,可转化成关于边的二次方程的根的讨论.

双基演练

1. 在$\triangle ABC$中,已知 $b=\sqrt{2}, c=1, B=45^\circ$,则 $a=$ (B)

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

2. 在$\triangle ABC$中,已知 $AB=5, AC=6, BC=\sqrt{31}$,则 $A=$ (A)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

3. 在$\triangle ABC$中,若 $b=10, c=15, C=\frac{\pi}{6}$,则此三角形有__一__解.

解 由余弦定理得:$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2+100-225}{20a} \Rightarrow a^2-10\sqrt{3}a-125=0 \Rightarrow a=5\sqrt{3}\pm10\sqrt{2}$,负值不合题意,舍去.

4. 在$\triangle ABC$中,若 $a^2-c^2+bc=b^2$,则 $A=$__$\frac{\pi}{3}$__.

范例解读

例 1 试用余弦定理证明:三角形两边之和大于第三边.

证明 在$\triangle ABC$中,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\leqslant b^2+c^2+2bc|\cos A|<b^2+c^2+2bc=(b+c)^2 \Rightarrow a<b+c$. 同理可证:$b<a+c, c<a+b$.

例 2 在$\triangle ABC$中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,证明:$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

证明 由余弦定理知:$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$,所以 $a^2-b^2=b^2-a^2-2bc\cdot\cos A+2ac\cdot\cos B$,整理得$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{a\cos B-b\cos A}{c}$,又由正弦定理得$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$,

$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，所以$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

归纳点拨

1. 余弦定理可以用正弦定理推出；

2. 注意基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 在余弦定理中的运用；

3. 已知两边一对角解三角形时，用余弦定理进行讨论，更容易判断是无解、一解还是两解.

测试反馈

1. 在$\triangle ABC$中，若$a^2=b^2+c^2+bc$，则A为　（C）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 三角形三边的比为 2∶3∶4，则三角形的形状为　（C）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 都有可能

3. $\triangle ABC$的三内角A,B,C的对应边分别为a,b,c，当$a^2+c^2\geqslant b^2+ac$时，角B的取值范围为$\underline{\left(0,\frac{\pi}{3}\right]}$.

4. $\triangle ABC$中，若$(b+c)∶(c+a)∶(a+b)=4∶5∶6$，则$\triangle ABC$的最小内角为(精确到1°)$\underline{22°}$.

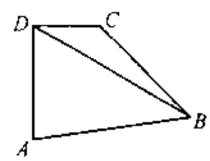
5. 在$\triangle ABC$中，已知$A>B>C$，且$A=2C$，$b=4$，$a+c=8$，求a,c的长.

解　由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$及$A=2C$得$\cos C=\frac{a}{2c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2-c^2+16}{8a}$，

从而有$\frac{a^2-c^2+16}{8a}=\frac{a}{2c}\Rightarrow 4a^2=a^2c-c^3+16c\Rightarrow a^2(c-4)=c(c^2-16)$.

$\because B>C$，$\therefore b>c$. $\therefore c\neq 4$，$\therefore a^2=c(c+4)$. 又$\because a+c=8$，$\therefore a=\frac{21}{5}$，$c=\frac{16}{5}$.

6. 如图，在四边形$ABCD$中，已知$AD\perp CD$，$AD=10$，$AB=14$，$\angle BDA=60°$，$\angle BCD=135°$，求BC的长.



解　在$\triangle ABD$中，设$BD=x$，由余弦定理得

$14^2=10^2+x^2-2\cdot 10\cdot x\cdot\cos 60°\Rightarrow x^2-10x-96=0\Rightarrow x_1=16$，$x_2=-6$(舍去)，即$BD=16$. 在$\triangle CBD$中，$\angle CDB=90°-60°=30°$，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin 30°}=\frac{16}{\sin 135°}\Rightarrow BC=8\sqrt{2}$.

7. 在$\triangle ABC$中,若已知三边为连续正整数,最大角为钝角.

(1) 求最大角;(2) 求以此最大角为内角,夹此角两边之和为4的平行四边形的最大面积.

解 (1) 设这三个数为$n,n+1,n+2$,最大角为θ.则$\cos\theta=\frac{n^2+(n+1)^2-(n+2)^2}{2\cdot n\cdot(n+1)}<0$,

化简得:$n^2-2n-3<0\Rightarrow -1<n<3$. ∵ $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n+(n+1)>n+2$,∴ $n=2$.

∴ $\cos\theta=\frac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\theta\approx104.5^\circ$.

(2) 设此平行四边形的一边长为a,则夹θ角的另一边长为$4-a$,平行四边形的面积为

$S=a(4-a)\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}(4a-a^2)=\frac{\sqrt{15}}{4}[-(a-2)^2+4]\leqslant\sqrt{15}$.

当且仅当$a=2$时,$S_{max}=\sqrt{15}$.

8. 已知$\triangle ABC$中,$2B=A+C$,$b^2=ac$,证明:$\triangle ABC$为等边三角形.

证明 在$\triangle ABC$中,$A+B+C=180^\circ$.因为$2B=A+C$,故有$B=60^\circ$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2+c^2-b^2=ac$.

$b^2=ac\Rightarrow a^2+c^2-2ac=0\Rightarrow(a-c)^2=0\Rightarrow a=c\Rightarrow a=b=c$.

所以$\triangle ABC$为等边三角形.

4. 余弦定理(2)

教学建议

要讲清楚在解决问题时是用正弦定理还是用余弦定理.虽然用正弦定理或用余弦定理其繁简差异并不太大,但一般情况下,在同一三角形中,知道两边一角求边、知道三边求一角时要用余弦定理;知道两角一边求其它、知道两边一角求角时要用正弦定理.

双基演练

1. 在$\triangle ABC$中,$AB=3$,$AC=4$,$BC=\sqrt{13}$,则AC边上的高为 (B)

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

解 由余弦定理知:$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{16+9-13}{2\times4\times3}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$,故$AC$边上的高为$AB\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\dfrac{1}{2}$，$a=\sqrt{3}$，则b^2-bc+c^2的值为　　　　(C)

A. 2　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 3　　　　D. $\dfrac{9}{4}$

3. 在$\triangle ABC$中，$\sin A : \sin B : \sin C=2:3:4$，则$B$的余弦值为$\underline{\ \dfrac{11}{16}\ }$.

解　先由正弦定理得：$a:b:c=2:3:4$，故可设$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$，$\cos B=\dfrac{4k^2+16k^2-9k^2}{2\times 2k\times 4k}=\dfrac{11}{16}$.

4. 在$\triangle ABC$中，$BC=10$，周长为25，则$\cos A$的最小值是$\underline{\ \dfrac{7}{9}\ }$.

范例解读

例 1　在$\triangle ABC$中，已知$CB=7$，$AC=8$，$AB=9$，试求AC边上的中线长.

解　由条件知：$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\times 9\times 8}=\dfrac{2}{3}$，设中线长为$x$，由余弦定理知：

$$x^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+AB^2-2\cdot\frac{AC}{2}\cdot AB\cos A=4^2+9^2-2\times 4\times 9\times\frac{2}{3}=49\Rightarrow x=7.$$

所以，所求中线长为7.

例 2　在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，且a，b是方程$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$的两根，$2\cos(A+B)=1$.

(1) 求角C的度数；(2) 求AB的长；(3) 求$\triangle ABC$的面积.

解　(1) $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=120^\circ$.

(2) 因为a，b是方程$x^2-2\sqrt{3}x-2=0$的两根，所以$\begin{cases}a+b=2\sqrt{3},\\ ab=2.\end{cases}$所以$AB^2=b^2+a^2-2ab\cos 120^\circ=(a+b)^2-ab=10\Rightarrow AB=\sqrt{10}$.

(3) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

归纳点拨

1. 可用余弦定理推导平行四边形的对角线长定理（对角线的平方和等于四边的平方和）；

2. 余弦定理的变形$1-\cos A=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$，$1+\cos A=\dfrac{(a-b-c)(a+b+c)}{2bc}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b-c)(a+b+c)}$.

测试反馈

1. 在$\triangle ABC$中，若$a^2=bc$，则角A是　　　　(A)

A. 锐角　　　　B. 钝角　　　　C. 直角　　　　D. $60°$角

2. 已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)$，其中a,b,c为角A,B,C所对的边，则角C的度数为　　　　(B)

A. $135°$　　　　B. $45°$　　　　C. $60°$　　　　D. $120°$

3. 已知$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，$BC=5$，$A=60°$，则$\triangle ABC$的周长是__12__.

4. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，则$a\cos C+c\cos A$的值为__b__.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$b^2=ac$，$a^2-c^2=ac-bc$，求A及$\frac{b\sin B}{c}$的值.

解 $\begin{cases} b^2=ac, \\ a^2-c^2=ac-bc \end{cases} \Rightarrow a^2-c^2=b^2-bc \Rightarrow b^2+c^2-a^2=bc \Rightarrow \cos A=\frac{1}{2}$，

从而得$A=60°$，因为$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，所以$\frac{b\sin B}{c}=\frac{b^2\sin 60°}{ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

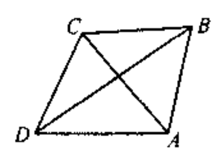
6. 某人用投掷骰子的方法确定一个三角形的三条边，试求：在所有能确定的三角形中，最大角的度数(精确到$1°$).

解 骰子的点数是1、2、3、4、5、6，根据“大角对大边”和“两边之和大于第三边”的原则，可以构成较大角的三角形的三边是2、5、6或3、4、6. 设最大角为θ，则

当以2、5、6为三角形的三边时，$\cos\theta=\frac{2^2+5^2-6^2}{2\times 2\times 5}=-\frac{7}{20}$；

当以3、4、6为三角形的三边时，$\cos\theta=\frac{3^2+4^2-6^2}{2\times 3\times 4}=-\frac{11}{24}$，因为$-\frac{11}{24}<-\frac{7}{20}$，所以在所有能确定的三角形中，最大角的度数约为$117°$.

7. 如图，在四边形$ABCD$中，顺次的三边$AB=BC=CD=10$，$AD=AC=12$，求BD.



解 由图形知：$\cos\angle BCA=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2\cdot BC\cdot AC}$

$=\frac{10^2+12^2-10^2}{2\times 10\times 12}=\frac{3}{5} \Rightarrow \angle BCA\approx 53°$.

$\cos\angle DCA=\frac{DC^2+CA^2-AD^2}{2\cdot DC\cdot CA}=\frac{5}{12} \Rightarrow \angle DCA\approx 65° \Rightarrow \angle BCD \approx 118°$.

$BD=\sqrt{BC^2+DC^2-2\cdot BC\cdot DC\cdot\cos\angle BCD}\approx\sqrt{100+100-2\times 10\times 10\times\cos 118°}\approx 17.1$.