高等院校经济管理学科
数学基础系列教材 /主 编 刘书田

# 线性代数解题方法与技巧

主 编 卢 刚
编著者 卢 刚 冯翠莲 孙惠玲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校经济管理学科
数学基础系列教材 / 主编 刘书田

# 线性代数解题方法与技巧


主 编 卢 刚

编著者 卢 刚 冯翠莲 孙惠玲



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数解题方法与技巧/卢刚,冯翠莲,孙惠玲编著. —北京:北京大学出版社,2006.10
(高等院校经济管理学科数学基础系列教材)
ISBN 7-301-10578-9

Ⅰ.线… Ⅱ.①卢… ②冯… ③孙… Ⅲ.线性代数-高等学校-解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第016719号

**书　　名:线性代数解题方法与技巧**
著作责任者:卢　刚　冯翠莲　孙惠玲　编著
责 任 编 辑:曾琬婷
标 准 书 号:ISBN 7 301 10578 9/O·0682
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址:http://www.pup.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×960mm　16开本　11印张　238千字
2006年10月第1版　2006年10月第1次印刷
印　　数:0001—4000册
定　　价:18.00元

---

## 内 容 简 介

本书是高等院校经济类、管理类及相关专业学生线性代数课程的辅导书，与国内通用的各类《线性代数》(财经类)的优秀教材相匹配，同步使用. 全书共分五章，内容包括：行列式、矩阵的运算、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、实二次型等.

本书以面向21世纪的线性代数课程教材内容为准，按题型归类，以讲思路与举例题相结合的思维方式，讲述解题思路的源头，归纳总结具有共性题目的解题规律、解题方法. 本书注重学生基本概念的理解和基本方法的训练；通过对各类题型解题思路的分析，培养学生分析问题和解决问题的能力；为了使学生更好地理解和掌握线性代数的基本概念及其相互之间的内在联系，各章都选配了一些综合性的题目，并给出了解题的详细分析和说明，同时也指出在做这类题目时常见的问题和错误.

本书是经济类、管理类学生学习线性代数课程必备的辅导教材，是报考硕士研究生读者的精品之选，是极为有益的教学参考用书，也是无师自通的自学指导书.

# 前　言

本书是北京大学出版社出版的《高等院校经济管理学科数学基础系列教材》之一《线性代数》教材的配套辅导教材．本书适应高等教育教学内容和课程改革的总目标，是面向21世纪的课程教材．

本书有以下特点：

1．为了便于读者对线性代数基本概念和基本题型的把握，本书根据主教材的基本概念和方法，按题型分类进行编写．

2．在例题的选取上，首先通过基础题进一步强调了基本概念的理解和运用，以及基本方法的掌握．在此基础上，大量地选取了近年来"全国硕士研究生数学入学统考试题"中的典型试题．通过对这些试题的分析和研究，不仅能够提高读者综合运用所学知识的能力，更有助于读者开阔解题的思路，同时也能为今后的考研做好充分的准备．

3．为了帮助读者自学，无论是例题还是习题，都给出了较为详细的解题过程或提示．对于一些计算题或证明题，尽可能做到一题多解．由于单项选择题往往涉及较为抽象的基本概念及其相互联系，是初学者感到比较难做的题目．因此，在本书的例题和习题中，对于正确和错误的选项，都给出了详细的说明或提示，而不是仅仅给出答案．

4．在许多例题的后面还附有评注，提醒读者注意在求解此类题目时的不同解法，以及应注意的问题或容易犯的错误，以便读者在自学时参考．

本书不仅反映了编者多年来从事基础课教学积累的经验和体会，更凝聚了许许多多长期从事考研命题教师的智慧和心血．希望它不但是学生学习的辅导书，也能够成为从事基础课教学工作的教师们的一本有用的参考书．

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正．

编　者

2006年9月

# 目　　录

# 第一章　行　列　式

## 一、数字型行列式的计算

计算数字型行列式的常用**思路**是：

(1) 如果在行列式的某一行(列)中，零非常多，可按该行(列)展开；

(2) 利用行列式的性质，将行列式某行(列)中尽可能多的元素化为零，然后再按该行(列)展开；

(3) 三角形法：即利用行列式的性质，将给定的行列式化为上(下)三角形行列式；

(4) 递推法或数学归纳法；

(5) 利用范德蒙德行列式；

(6) 利用拉普拉斯定理.

**例 1**　设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},$$

求：(1) 第 4 行各元素的余子式之和；　(2) 第 4 行各元素的代数余子式之和.

**解**　(1) 即求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$. 按余子式定义，可以直接进行计算：

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=-56+0+42-14=-28.$$

如果利用余子式与代数余子式的关系以及代数余子式的性质，也可以做如下计算：

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=7\times(-4)=-28.$$

显然，第二种思路的计算量较小.

(2) 按照(1)的第二种思路,所求的和式为

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$$

**例 2**　计算行列式 $\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&2&1\\5&-3&6\end{vmatrix}$.

**解**　将行列式第 1 行的 2 倍和$(-3)$倍分别加到第 2 行和第 3 行,有

$$原式=\begin{vmatrix}2&-1&4\\7&0&9\\-1&0&-6\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7&9\\-1&-6\end{vmatrix}$$
$$=-42+9=-33.$$

**评注**　利用行列式某行(列)中的元素 1 或$-1$,将该行(列)中的其余元素化为零,只需乘以整数倍,这样计算起来比较简单,可以减少出错的机会.

**例 3**　解方程 $\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\-3&x+5&-3\\-6&6&x-4\end{vmatrix}=0.$

**分析**　这种形式的行列式如果直接展开,会遇到一元三次多项式的因式分解,往往比较困难.因此,先利用行列式的性质将其化简,并分解出一个一次多项式后,再求根就会容易多了.

**解**　因为

$$\begin{vmatrix}x-1&3&-3\\-3&x+5&-3\\-6&6&x-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+2&3&-3\\x+2&x+5&-3\\0&6&x-4\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}x+2&3&-3\\0&x+2&0\\0&6&x-4\end{vmatrix}=(x+2)\begin{vmatrix}x+2&0\\6&x-4\end{vmatrix}$$
$$=(x+2)^2(x-4),$$

所以原方程可化为$(x+2)^2(x-4)=0$,从而方程的根为$x_1=x_2=-2,x_3=4$.

**注**　在求矩阵的特征值时,经常会遇到求解这种形式的方程.

**例 4**　计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

**解** 先将第 1 行的$(-1)$倍分别加到第 2,3,4 行再分别将第 2,3,4 行的 1 倍加到第 5 行：

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&-1&0&1\\0&-1&0&0&1\\0&1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\\0&0&-1&0&1\\0&-1&0&0&1\\0&0&0&0&4\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1&1&0\\0&-1&0&0&1\\0&0&-1&0&1\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&4\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-4)=4.$$

**评注** 对于形如例 4 的 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&0\\1&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\end{vmatrix},$$

由于每行的元素之和均为 $n-1$,因此可先将各列都加到第 1 列：

$$D_n=\begin{vmatrix}n-1&1&\cdots&1&0\\n-1&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&0&\cdots&1&1\\n-1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&0\\1&1&\cdots&0&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\1&0&\cdots&-1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&-1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-1)^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

这里最后一步利用公式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

**例 5**　计算 5 阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 & x_4 \end{vmatrix}.$$

**解**　将行列式按第 1 列展开：

$$D_5 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & x_4 \end{vmatrix} + (-a_1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= x_1x_2x_3x_4 + a_1D_4.$$

类似地，有

$$D_4 = x_2x_3x_4 + a_2D_3;\quad D_3 = x_3x_4 + a_3D_2.$$

而 $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a_4 & x_4 \end{vmatrix} = x_4 + a_4$. 依次代入前面各式，得到

$$D_3 = x_3x_4 + a_3D_2 = x_3x_4 + a_3x_4 + a_3a_4;$$

$$D_4 = x_2x_3x_4 + a_2D_3 = x_2x_3x_4 + a_2x_3x_4 + a_2a_3x_4 + a_2a_3a_4;$$

$$\begin{aligned} D_5 &= x_1x_2x_3x_4 + a_1D_4 \\ &= x_1x_2x_3x_4 + a_1x_2x_3x_4 + a_1a_2x_3x_4 + a_1a_2a_3x_4 + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

**评注**　对于形如例 5 的 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & x_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n & x_n \end{vmatrix},$$

可按第 1 列(或第 $n+1$ 列)展开，得到递推关系式

$$D_{n+1} = x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n + a_1D_n.$$

参照例 5 的结果，再利用数学归纳法证明.

**例 6** 计算 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}.$$

**解** 方法一 参照例 5 的解法，可先按第 1 列展开：

$$D_5=(1-a)D_4+(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=(1-a)D_4+aD_3.$$

类似地，有

$$D_4=(1-a)D_3+aD_2;\quad D_3=(1-a)D_2+aD_1.$$

而 $$D_1=1-a,\quad D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)^2+a=1-a+a^2.$$

依次代入上述结果，可得到

$$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

方法二 注意到行列式第 2,3,4 行各行的元素之和均为 0，因此先将各列都加到第 1 列，得到

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}\quad\text{（再按第 1 列展开）}$$

$$=D_4+(-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\end{vmatrix}$$

$$=D_4-a^5.$$

类似地，可以得到：

$$D_4=D_3+(-a)(-1)^{4+1}a^3=D_3+a^4;$$

$$D_3=D_2+(-a)(-1)^{3+1}a^2=D_2-a^3;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)^2+a=1-a+a^2.$$

依次代入上面的结果，得到：

$$D_3 = D_2 - a^3 = 1 - a + a^2 - a^3;$$
$$D_4 = D_3 + a^4 = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4;$$
$$D_5 = D_4 - a^5 = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.$$

**评注** 与第一种方法比较，第二种方法的回代过程要较为简单些.

如果注意到行列式主对角线左下方的元素均为$-1$，因此也可以依次将第2,3,4,5行的适当倍数分别加到第1行，依次将$a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}$化为0，再将所得到的行列式按第1行展开即可.

**例7** 4阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

**解** 方法一 将行列式按第1行展开：

$$\begin{aligned} D_4 &= a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + b_1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4). \end{aligned}$$

因此应选(D).

方法二 利用拉普拉斯定理，将行列式按第1,4行(或列)展开：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+4)+(1+4)}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

**评注** 对于结构与例7类似的行列式，利用拉普拉斯定理展开往往较为简单.

**例8** 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

则方程$f(x)=0$的根的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**解** 将第1列各$x$的系数与其他各列比较，可先将第1列的$(-1)$倍分别加到其余各列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x^2-5x,$$

即 $f(x)=0$ 为 $x$ 的一元二次方程,必有两个根.从而应选择(B).

**评注** 如果不将行列式化简并展开,则很容易误认为 $f(x)$ 为 $x$ 的四次多项式,而选择(D).因此做这类题时,一定要深入分析,不要想当然.

**例 9** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

**解** 由第 1 列元素的下标可以判定出这是一个 $n+1$ 阶行列式,将其记做 $D_{n+1}$.

方法一 从第 1 行起,依次将各行的 $x$ 倍加到下一行,得到

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1}+a_nx & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2}+a_{n-1}x+a_nx^2 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)(-1)^{n+2}(-1)^n \quad (\text{按第 } n+1 \text{ 行展开})$$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

方法二 利用数学归纳法.

将行列式按第 1 行展开:

$$D_{n+1}=a_nx^n+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-2} & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_nx^n+D_n.$$

对 $n$ 作数学归纳法：

当 $n=1$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ a_0 & x \end{vmatrix}=a_0+a_1x$，故猜测

$$D_{n+1}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

假设对于 $n$ 阶行列式结论成立，即

$$D_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

则有

$$D_{n+1}=a_nx^n+D_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

上式说明对于 $n+1$ 阶行列式，结论也成立. 从而由归纳法原理，对任意正整数 $n$，结论成立.

**例 10**　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^3 & a_1^2b_1 & a_1b_1^2 & b_1^3 \\ a_2^3 & a_2^2b_2 & a_2b_2^2 & b_2^3 \\ a_3^3 & a_3^2b_3 & a_3b_3^2 & b_3^3 \\ a_4^3 & a_4^2b_4 & a_4b_4^2 & b_4^3 \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } a_i\neq 0, b_i\neq 0, i=1,2,3,4).$$

**解**　从行列式元素的结构可以看出，这个行列式应与范德蒙德行列式有关，因此设法利用行列式的性质，将其化为范德蒙德行列式的标准形式.

提出第 $i$ 行的公因子 $a_i^3(i=1,2,3,4)$，得

$$\text{原式}=\left(\prod_{i=1}^{4}a_i^3\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^3 \\ 1 & \frac{b_4}{a_4} & \left(\frac{b_4}{a_4}\right)^2 & \left(\frac{b_4}{a_4}\right)^3 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{4}a_i^3\right)\left[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)\right]=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(a_jb_i-a_ib_j).$$

**例 11**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) & x_4(x_4-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) & x_4^2(x_4-1) \\ x_1^3(x_1-1) & x_2^3(x_2-1) & x_3^3(x_3-1) & x_4^3(x_4-1) \end{vmatrix}.$$

**解**　显然，此行列式一定也与范德蒙德行列式有关. 根据后 3 行的结构，如果将第 1 行的 4 个 1 分别改写为 $x_1-(x_1-1)$，$x_2-(x_2-1)$，$x_3-(x_3-1)$，$x_4-(x_4-1)$，则

$$D=\begin{vmatrix} x_1-(x_1-1) & x_2-(x_2-1) & x_3-(x_3-1) & x_4-(x_4-1) \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) & x_4(x_4-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) & x_4^2(x_4-1) \\ x_1^3(x_1-1) & x_2^3(x_2-1) & x_3^3(x_3-1) & x_4^3(x_4-1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) & x_4(x_4-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) & x_4^2(x_4-1) \\ x_1^3(x_1-1) & x_2^3(x_2-1) & x_3^3(x_3-1) & x_4^3(x_4-1) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -(x_1-1) & -(x_2-1) & -(x_3-1) & -(x_4-1) \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) & x_4(x_4-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) & x_4^2(x_4-1) \\ x_1^3(x_1-1) & x_2^3(x_2-1) & x_3^3(x_3-1) & x_4^3(x_4-1) \end{vmatrix},$$

记做 $D=D_1+D_2$. 由于

$$D_1=x_1x_2x_3x_4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 & x_4-1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) & x_4(x_4-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) & x_4^2(x_4-1) \end{vmatrix}$$

（从第 1 行起，各行依次加到下一行）

$$=x_1x_2x_3x_4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}=\left(\prod_{i=1}^{4}x_i\right)\left[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)\right],$$

$$D_2=\left[-\prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=\left[-\prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\right]\left[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)\right],$$

因此

$$D=D_1+D_2=\left[\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(x_i-x_j)\right]\left[\prod_{i=1}^{4}x_i-\prod_{i=1}^{4}(x_i-1)\right].$$

**例 12**　设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，并令矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 对于正整数 $n$，求行列式 $|a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^n|$ 的值，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位矩阵.

**解**　方法一　由 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，可知

$$A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha = (1,0,-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2,$$

从而

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\cdots(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = \alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}} \\ &= 2^{n-1}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = 2^{n-1}A, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |aI - A^n| &= |aI - 2^{n-1}A| = \left| \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} - 2^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1} \end{vmatrix} = a[(a-2^{n-1})^2 - (2^{n-1})^2] \\ &= a^2(a-2^n). \end{aligned}$$

方法二 先求出矩阵 $aI-A^n$ 的特征值[①]，则 $aI-A^n$ 的行列式 $|aI-A^n|$ 即为其特征值的乘积.

由于 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，可求出 $A$ 的特征值为 0,0,2，因此 $A^n$ 的特征值为 $0,0,2^n$，从而矩阵 $aI-A^n$ 的特征值为 $a,a,a-2^n \Longrightarrow |aI-A^n|=a^2(a-2^n)$.

**评注** 方法二的依据：

(1) 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

(2) 若 $\lambda_i$ 是 $n$ 阶矩阵 $A$ 的一个特征值，对于给定的矩阵多项式 $f(A)$，$f(\lambda_i)$ 为 $f(A)$ 的特征值.

## 二、抽象型行列式的计算

**例 1** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，并已知 4 阶行列式

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| = m, \quad |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3| = n,$$

则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=(\quad)$.

① 为了分类归纳解题思路和方法，作者有意识地把有关内容作了跨章处理，以便读者分门别类地掌握解题方法与技巧.