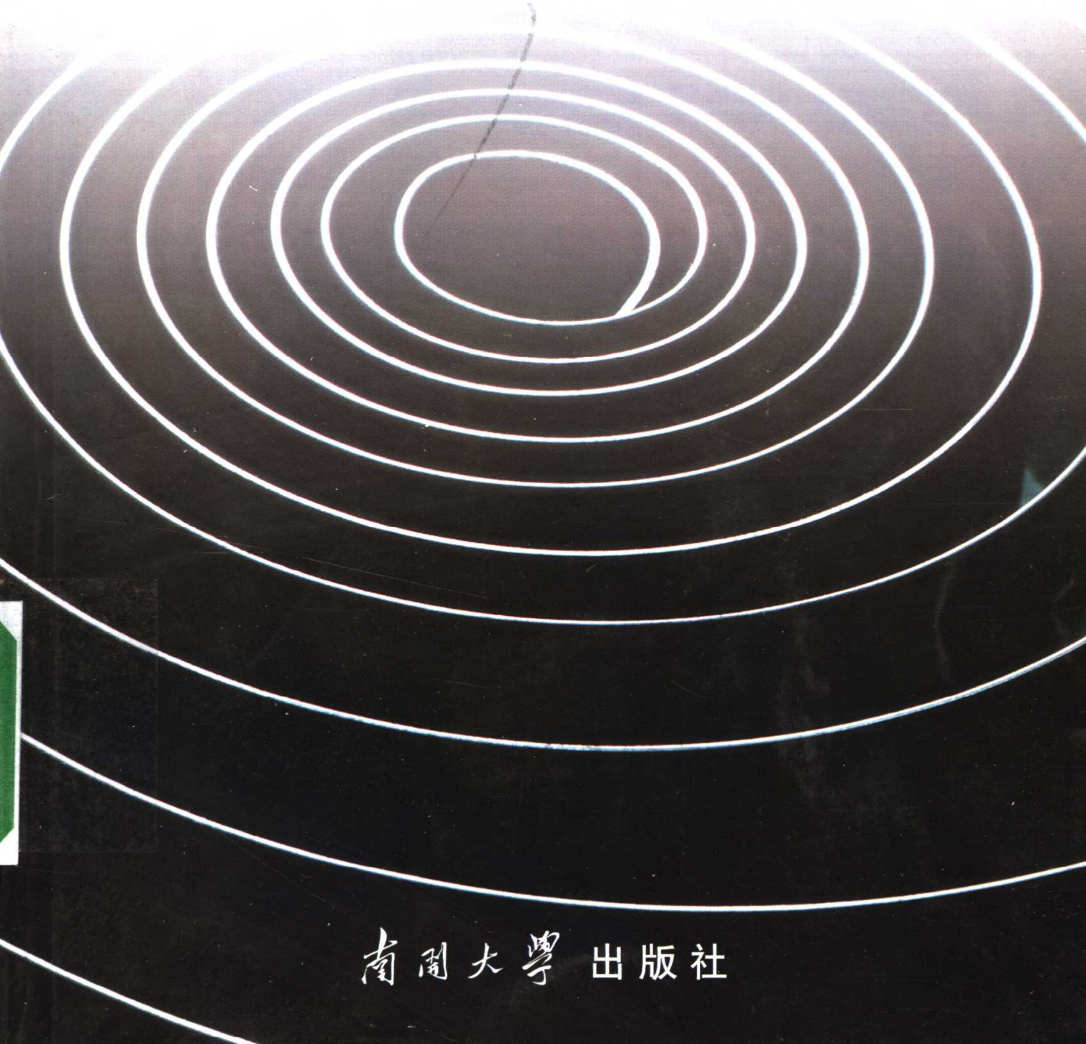
高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列

线性代数学习指导

（第二版）

胡显佑·编著



南开大学出版社

高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导

线性代数学习指导

（第二版）

胡显佑 编著

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导／胡显佑编著. —2版. —天津：南开大学出版社，2006.11

ISBN 7-310-00995-9

Ⅰ.线... Ⅱ.胡... Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 111423 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 11 月第 2 版 2006 年 11 月第 6 次印刷

880×1230 毫米 32 开本 8.75 印张 245 千字

定价:18.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内 容 提 要

这一套“高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列”共分三个分册：《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》，面向高等学校经济和管理类各专业，以及理工类有关专业。这套书自1997年出版以来已经多次重印。在读者反馈的基础上，根据近年来使用的教材和研究生入学考试大纲，我们重新编写了这套丛书。

本册书是参照经济和管理类各专业，以及理工类(非数学)各专业通用的“线性代数”教材编写的。每一章由四部分构成：一，内容提要；二，典型例题分析；三，自我检测题；四，自检题答案或提示。全书针对性强，是学习线性代数课程难得的参考书。

这一套“学习指导”的读者对象是高等学校师生，主要是经济和管理类各专业，以及理工科(非数学)有关专业的师生；对于准备报考硕士研究生和MBA者也是一套很好的参考书；亦可供数学专业师生参考使用。

出版说明

这一套“学习指导”，是按照高等学校经济和管理类各专业，以及理工科有关专业通用的教材编写的，是上述各专业必修的数学基础课程的教学参考书，包括《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》等三个分册。这套书自1997年出版以来，已经重印了多次。考虑到近年来上述各专业的教材都有所变化或更新，特别是教材中例题和习题的题型也有所变化，出现了许多新颖的题型；而且数学(包括“微积分”、“线性代数”和“概率统计”)是“全国硕士研究生入学统一考试”的必考科目，并且在全部必考4科的总分500分中数学占150分，所以我们决定修订这一套“学习指导”。

修订版保持了原书的结构和格式，只是使每一章前面的“内容提要”更贴近现行的有关教材和“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的要求。“典型例题分析”更新了大部分例题，特别注意吸纳了历年“研究生入学统一考试”试题中比较新颖且有代表性的试题，通过例题向读者演示各种解题方法和技巧，并且使读者能更深入地领会有关理论知识。

编　者

2006年3月

前　言

线性代数是经济类、管理类和工学类各专业的一门重要的数学基础课。学生在学习过程中都感到线性代数课程中概念多，内容抽象，逻辑严密，方法灵活，不易掌握。为了帮助同学们克服学习中的困难，提高分析问题、解决问题的能力，我们编写了本书。

本书按照现行的经济类、管理类和工学类线性代数教学大纲和硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求编写，与大多数现行的线性代数教材的体系相同，可以作为学生在学习过程中的参考书或报考硕士研究生的复习资料，也可以作为担任该课程的教师的教学参考书。

本书每章按照内容提要、典型例题分析、自我检测题和答案与提示四部分编写。在典型例题部分安排了较多的例题，对不同类型题目的解题方法都适时地给予总结和说明，有助于学生提高解题能力。各章的自我检测题题型多样，由浅入深，都附有答案和较详细的提示，便于教师和学生使用。

限于水平，书中的不足之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一章　行列式

一　内容提要

（一）排列和逆序

1. **排列**　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数 $n!$ 个.

2. **逆序数**　在一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若 $i_t>i_s$ $(t<s)$，则称这一对数 $i_t\, i_s$ 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数. 记作 $\tau(i_1\, i_2\cdots\, i_n)$. 若 τ 为奇数，则称 $i_1\, i_2\cdots\, i_n$ 为奇排列；若 τ 为偶数，则称此排列为偶排列.

在排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，交换任意两个数 i_t 和 i_s 的位置，称为一次对换，记为 $(i_t\ \ i_s)$. 对换改变排列的奇偶性.

在所有的 n 级排列中，奇排列个数＝偶排列个数＝$\dfrac{n!}{2}$.

（二）n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}\, a_{2j_2}\cdots\, a_{nj_n}$ 的代数和，其中列标 $j_1\, j_2\cdots\, j_n$ 构成一个 n 级排列. 当 $j_1\, j_2\cdots\, j_n$ 是偶排列时，该项取

正号；当 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项取负号. 即 n 阶行列式

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

(三)行列式的性质

1. 行列式的行列互换，行列式的值不变.

2. 互换行列式的两行(列)，行列式的值反号.

3. 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于 k 乘此行列式.

由此可得：

行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面；

如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则此行列式的值为零；

如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

4. 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素之和，则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个相加元素之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 行列式某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式其值不变.

(四)行列式按行(列)展开

1. **余子式和代数余子式** 在 n 阶行列式 D_n 中,划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列,余下的元素按原有顺序构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij}. 余子式 M_{ij}之前加上符号$(-1)^{i+j}$,称为元素 a_{ij}的代数余子式,记作

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

2. **行列式按行(列)展开定理** n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$等于其某一行(列)的所有元素与它的代数余子式的乘积之和. 一般地,有

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=\begin{cases}D, & i=s,\\ 0, & i\neq s;\end{cases}\quad (i,s=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=\begin{cases}D, & j=t,\\ 0, & j\neq t.\end{cases}\quad (j,t=1,2,\cdots,n)$$

(五)拉普拉斯定理

1. **k 阶子式及其代数余子式** 在 n 阶行列式 D_n 中,任取 k 行 k 列$(1\leqslant k\leqslant n)$,其交叉位置上的元素按原有顺序构成的 k 阶行列式,称为 D_n 的一个 k 阶子式,记作 M. 在 D_n 中划去这 k 行 k 列后,剩下的元素按原有顺序构成的 $n-k$ 阶行列式,称为 k 阶子式 M 的余子式,记作 N. 如果设 k 阶子式 M 在 D_n 中所在行、列的行标和列标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则在余子式 N 之前加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$,称为 k 阶子式 M 的代数余子式,记作

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N.$$

2. **拉普拉斯定理** 在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行$(1\leqslant k\leqslant n)$,由这 k 行元素组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D. 即

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\quad\left(t=\mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\right),$$

其中 A_i 是子式 M_i $(i=1,2,\cdots,t)$对应的代数余子式.

（六）几个重要的行列式

1. 上（下）三角行列式的值等于其主对角线元素的乘积.

2. 副对角形行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ * & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_1 \\ 0 & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & * & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

（七）克莱姆法则

1. 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则这个方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是把 D 中第 i 列元素换为常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后所得到的行列式.

2. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

的系数行列式 $D\neq0$,则这个方程组只有零解.

这一结论还可以叙述为:若齐次线性方程组(Ⅱ)有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

二　典型例题分析

1.行列式的有关概念

例 1.1　试确定排列 4 2 5 3 1 和 5 2 4 1 6 3 的奇偶性.

解　从一个排列的左边第二个数算起,与其左边的各数比较,可求出排列中各元素对应的逆序个数.如下表:

排　列	4 2 5 3 1
逆序数	1 0 2 4

排　列	5 2 4 1 6 3
逆序数	1 1 3 0 3

排列 4 2 5 3 1 的逆序数 $\tau(4\ 2\ 5\ 3\ 1)=1+0+2+4=7$,故该排列为奇排列.

而 $\tau(5\ 2\ 4\ 1\ 6\ 3\ 7)=1+1+3+0+3=8$,因此排列 5 2 4 1 6 3 7 为偶排列.

例 1.2　选择 k,l,使 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{5l}a_{3k}$成为五阶行列式中取"—"号的项.

解　先将此乘积中各因数的行标(第一下标)按自然顺序排列得到 $a_{14}a_{23}a_{3k}a_{45}a_{5l}$,则各因数的列标(第二下标)组成排列 4 3 k 5 l.若它为奇排列,则这一项应取负号.显然,k,l 只能取 1 或 2.设 $k=1,l=2$,则 $\tau(4\ 3\ 1\ 5\ 2)=6$ 为偶数.经一次对换,即设 $k=2,l=1$,则 $\tau(4\ 3\ 2\ 5\ 1)=7$;此时 $a_{23}a_{14}a_{45}a_{51}a_{32}$是五阶行列式中取负号的项.

例 1.3　写出四阶行列式中所有带负号并且包含因子 $a_{11}a_{23}$的项.

解　在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，含 $a_{11}a_{23}$的一般项$(-1)^{\tau(1\,3\,p\,s)}a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4s}$，这里的 p,s 是 2，4 的所有排列，即 2 4 或 4 2. 因此含 $a_{11}a_{23}$的项有两项，即 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$和$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$. 显然，带负号的项只有$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

例 1.4 试用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 与 x^3 项的系数.

解 四阶行列式的展开式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

要出现 x^4 的项，则 a_{ij_i}均需取到含 x 的元素，因此含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4,$$

该项的系数为 10.

由类似的分析可知，含 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2\,1\,3\,4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$$

和

$$(-1)^{\tau(4\,2\,3\,1)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3,$$

故含 x^3 项的系数为$(-2)+(-3)=-5$.

例 1.5 设行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________；第四行元素代数余子式之和为________.

分析 D_4 按第四行展开应该是

$$
\begin{aligned}
D_4 &= a_{41}(-1)^{4+1}M_{41}+a_{42}(-1)^{4+2}M_{42}+\\
&\quad a_{43}(-1)^{4+3}M_{43}+a_{44}(-1)^{4+4}M_{44}\\
&= a_{41}(-M_{41})+a_{42}(-M_{42})+\\
&\quad a_{43}(-M_{43})+a_{44}(-M_{44}).
\end{aligned}
$$

如果令 $a_{41}=-1, a_{42}=1, a_{43}=-1, a_{44}=1$，则第四行各元素的余子式之和就等于行列式之值，即

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\overline{D}_4.$$

解 行列式 D_4 的第四行各元素余子式之和

$$
\begin{aligned}
M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\overline{D}_4 &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\\
&= 7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\\
&= 14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.
\end{aligned}
$$

如果令 $a_{41}=a_{42}=a_{43}=a_{44}=1$，则

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

2. **行列式计算**

本章的重点是行列式计算. 计算行列式的基本方法是降阶法，即利用行列式性质将行列式化简后按行(列)展开，化为较低阶行列式进行计算. 其他常用的方法还有：定义法、三角化法、递推法、加边法、公式法等.

(1)定义法

例 1.6 试用行列式的定义计算下列行列式

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix};$$

$$(2)D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 按行列式定义，D_n 的展开式的一般项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，仅当 $j_1=n-1, j_2=n-2, \cdots, j_{n-1}=1, j_n=n$ 时，对应的项不等于零. 因此

$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{\tau[(n-1)\ (n-2)\ \cdots\ 1\ n]}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n \\ &=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_o. \end{aligned}$$

(2)类似于(1)的分析，求出 D_4 中不为零的项的代数和，即

$$\begin{aligned} D_4 &=(-1)^{\tau(1\,4\,2\,3)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+(-1)^{\tau(3\,1\,2\,4)}a_{12}a_{21}a_{32}a_{44} \\ &=(-1)^2\times1\times(-1)\times1\times1+(-1)^2a\times2\times1\times2 \\ &=4a-1. \end{aligned}$$

定义法适用于行列式中有大量零元素的情形. 除非规定使用此方法计算，一般不要用这一方法计算行列式.

(2)降阶法

例 1.7 计算四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 注意到第三列元素最为简单. 于是