普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

经济数学——线性代数

学习辅导与习题选解

主编 吴传生

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

经济数学——线性代数

学习辅导与习题选解

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

经济数学——线性代数
学习辅导与习题选解

主编　吴传生
编者　吴传生　黄小为　陈晓江

高等教育出版社

内容提要

本书是与吴传生主编的《经济数学——线性代数》(高等教育出版社出版)配套使用的学习辅导与解题指南,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作为复习之用。

本书的内容按章编写。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解、补充习题四个部分,基本与教材同步。典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好的材料。通过对内容和方法进行归纳总结,把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸,注重数学与应用有机结合。习题选解部分选出了教材中一部分习题作了习题解法提要,对一些富有启发性的习题,给出了较详细的分析和解答。补充习题大多数选自与各章节相关的历年的研究生入学考试的典型试题,并给出了相应的参考答案,供学生作为自测和复习之用。

本书内容丰富,思路清晰,例题典型,注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,对培养和提高学生的学习兴趣以及分析问题和解决问题的能力将起到极大的作用。它是经济管理类专业及工科类学生学习线性代数课程的很好的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学——线性代数学习辅导与习题选解/吴传生主编.—北京:高等教育出版社,2007.1
ISBN 978-7-04-020195-6

Ⅰ.经...　Ⅱ.吴...　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 146167 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张　志
版式设计 张　岚　**责任校对** 朱惠芳　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	潮河印业有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007 年 1 月第 1 版
印　　张	11.75	印　　次	2007 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	定　　价	12.90 元

物料号　20195-00

前言

本书是与吴传生主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材《经济数学——线性代数》(由高等教育出版社出版)配套使用的辅导教材,主要面向使用该教材的教师和学生,同时也可供报考研究生的学生作复习之用。

近几年来,我国的高等教育已经完成了从精英教育向大众化教育的转变,教育界和社会各方面对高等教育的质量十分关注。我们编写这本配套教材,主要是为了适应这种变化的形势,一方面满足广大学生学习线性代数课程的需要,期望对保证和提高线性代数课程的教学质量,对广大学生掌握教学基本要求起到一种辅导作用;另一方面也是为了满足不同层次的学生的学习需要,利用辅导教材这一比较灵活的形式,对教材的内容作适当的扩展和延伸,对在大众化教育的形势下如何培养具有创新精神的优秀人才的问题作出有益的探讨。

根据配套辅导教材的编写要求,本书的内容按章编写,基本与教材的章节同步。每章包括教学基本要求、典型方法与范例、习题选解、补充习题等四个部分。

教学基本要求部分主要是根据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的经济管理类本科生线性代数课程的教学基本要求确定,同时也根据教学实际作了适当的修改。沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

典型方法与范例部分是本书的重心所在,它是教师上习题课和学生自学的极好的材料。其特色是:对内容和方法进行归纳总结,力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中。范例具有典型性、示范性,有助于读者举一反三;范例的选取注重数学与实际应用(尤其是经济应用)相结合,注重对教材的内容作适当的扩展和延伸,有些扩展内容用 * 号标明。范例中注重分析解题思路,揭示解题规律,引导读者思考问题,培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力。大多数例题加以分析和评注,以开拓思路。

习题选解部分选出了教材中一部分习题作出了习题解法提要,每章的总习题是为学有余力或准备考研的学生编写的,它们大多数是一些富有启发性的习题,书中给出了较详细的分析和解答。需要指出的是,我们希望读者认真学习课程的基本内容,先自行思考,自己解题,再与题解进行对照、比较,达到对问题的更深刻和更透彻的理解的目的。如果不动脑筋独立思考,不亲自动手做题,而是照抄,那是绝对有害的。

补充习题部分大多数选自与各章节相关的历年的研究生入学考试的典型试题,并给出了相应的参考答案,供学生作为复习和自测之用。

本书由吴传生主编,参加编写的有:吴传生(第一、三章),黄小为(第二、五、六、七章),陈晓江(第四章)。全书由吴传生统稿定稿。

本书的出版得到了高等教育出版社的领导和同志们的支持,得到了武汉理工大学教务处、理学院和数学系的支持与帮助,李艳馥、马丽等同志为本书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并致谢!

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正!

编者

2006.8

目　录

第一章

线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

Ⅰ 教学基本要求

1. 理解线性方程组及其相关概念.

2. 理解矩阵的概念.

3. 熟练掌握求解线性方程组的消元法.

4. 理解初等变换的概念,会用初等行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵、行最简形矩阵,会用初等变换将矩阵化为标准形.

Ⅱ 典型方法与范例

一、用消元法求解线性方程组

1. 用消元法求解线性方程组,一般是将非齐次线性方程组的增广矩阵(或齐次线性方程组的系数矩阵)经过初等行变换化为行阶梯形矩阵或行最简形矩阵,然后求它们所对应的方程组的解,此方程组与原方程组同解.

2. 下面的三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 对调矩阵的两行(对调第 i,j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(2) 以非零常数 k 乘矩阵某一行的各元素(第 i 行乘 k,记作 $r_i \times k$);

(3) 把某一行所有的元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$).

把上述的"行"变成"列",即得矩阵的**初等列变换**(所用记号是把"r"换成"c").

矩阵的初等行变换与初等列变换,统称为**初等变换**.

例 1 下列 4 个 3×4 的矩阵中,哪些是行最简形矩阵?

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

解　由行最简形矩阵的定义，矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_4$ 是行最简形矩阵(即非零行的第一个非零元为 1，非零行的第一个非零元所在的列的其他元素都为零，这时也称非零行的非零首元所在的列是单位坐标列向量)；矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 不是行最简形矩阵，因为它的第 2 行的非零首元所在的列不是单位坐标列向量；但在求解线性方程组以及在以后遇到的一些其他问题中，$\boldsymbol{A}_2$ 这种形式的矩阵和行最简形矩阵具有相似的功能；$\boldsymbol{A}_3$ 不是行最简形矩阵，因为它首先不是阶梯形矩阵.

例 2　试述一个非零矩阵的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵的区别和联系，它们在功能上有什么不同?

解　一个非零矩阵的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵都是矩阵作初等行变换后的在一定意义上的“标准形”，任一个非零矩阵总可以经过有限次初等行变换先化成行阶梯形矩阵再化成行最简形矩阵；由定义可知，行最简形矩阵一定是行阶梯形矩阵，但行阶梯形矩阵不一定是行最简形矩阵；行阶梯形矩阵不是唯一的，但行最简形矩阵是唯一的，它是一个非零矩阵经初等行变换后能得到的“最简单”的形状.

矩阵的初等行变换直接源于求解线性方程组的消元法，将一个非齐次线性方程组的增广矩阵(或齐次线性方程组的系数矩阵)利用初等行变换化成行阶梯形矩阵后，求解对应的同解的线性方程组，一般还需要有一个“回代过程”，但是化成行最简形矩阵后，求解对应的同解线性方程组，几乎不需要“回代过程”就可以直接写出解，因此，在求解线性方程组时，一般总是将增广矩阵(或系数矩阵)化成行最简形矩阵后求解，这一过程称为解线性方程组的“标准程序”. 当然，将一个非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换化成行阶梯形矩阵后，若发现其无解，则不必再将其化成行最简形矩阵.

另外，在第三章和第四章，我们将会进一步看到，利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵，可以求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组；而利用行最简形矩阵，不仅可以求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组，还可以求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性关系，求线性方程组的基础解系，以及求逆矩阵和解矩阵方程.

总之，在开始学习线性代数时，我们就必须十分重视矩阵的初等行变换，并熟练掌握矩阵的初等行变换将矩阵化成行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

例 3 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

解 这是一个齐次线性方程组,对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times\left(-\frac{1}{3}\right)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因此原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_3-\frac{5}{3}x_4=0, \\ x_2+2x_3+\frac{4}{3}x_4=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1=2x_3+\frac{5}{3}x_4, \\ x_2=-2x_3-\frac{4}{3}x_4 \end{cases} \quad (x_3,x_4\text{可任意取值}).$$

令 $x_3=c_1$,$x_4=c_2$,将它写成参数形式

$$\begin{cases} x_1=2c_1+\frac{5}{3}c_2, \\ x_2=-2c_1-\frac{4}{3}c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2; \end{cases}$$

写成向量形式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \dfrac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \dfrac{4}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

例 4 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{4} & \dfrac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{7}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此原方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}c_1 - \dfrac{3}{4}c_2 + \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{3}{2}c_1 + \dfrac{7}{4}c_2 - \dfrac{1}{4} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

注:(1) 在求解线性方程组的时候,可能得出解的不同的表达形式,这是完全可以的.但这种情况发生往往是因为没有将增广矩阵(或系数矩阵)化成行最简形矩阵所致.

(2) 开始学习解线性方程组的时候,应该遵循例 3、例 4 的"标准程序"的示范,并熟练掌握,在此基础上,再灵活求解后继内容中遇到的各种线性方程组.

例 5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\3&-1&5&-3&2\\2&1&2&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&5&-4&0&-1\\0&5&-4&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1&1\\0&5&-4&0&-1\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

其中第三行所表示的方程 $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2$ 显然无解,故原线性方程组无解.

由例 5 可知,若已发现方程组无解,则不必将增广矩阵化为行最简形.

二、化矩阵为行最简形和标准形

例 6 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix},$$

试求(1) A 的行最简形矩阵;(2) A 的标准形.

解 (1) 对矩阵 A 作初等行变换:

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\3&-6&4&2\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&-4&5&3\\1&-2&-1&-1\\4&-8&17&11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\2&-4&5&3\\4&-8&17&11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1\\0&0&7&5\\0&0&21&15\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-21r_2\\r_1+r_2}]{r_2\times\frac{1}{7}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

此即为 A 的行最简形矩阵.

(2) 对 A 的行最简形矩阵作初等列变换:

$$A\to\begin{pmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{2}{7}\\0&1&0&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+\frac{2}{7}c_1-\frac{5}{7}c_2]{c_3+2c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

此即为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形.

Ⅲ 习题选解

习题 1－1　线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

1. 用消元法解线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2-x_3=-3, \\ x_1-4x_2+2x_3=-5; \end{cases}$

解 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -8 & 0 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(3,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

(3) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0; \end{cases}$

解 $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

故 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(k,k,k)^{\mathrm{T}}, k\in\mathbf{R}$.

(4) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=4, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=11, \\ x_1-4x_2-x_3=3, \\ -2x_1+x_2+3x_3=-7; \end{cases}$

解 $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 11 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 14 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -11 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

故$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(2+11k,k,-1+7k)^{\mathrm{T}},k\in\mathbf{R}$.

$$(5)\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-\ \ x_4=1,\\3x_1-\ \ x_2+5x_3-3x_4=2,\\2x_1+\ \ x_2+2x_3-2x_4=3.\end{cases}$$

解 参见例5.

2. 将下列矩阵化为行最简形矩阵：

$$(2)\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}.$$

解

$$\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. 一投资者想把1万元投入给三个企业A_1,A_2,A_3,所得利润率分别是12%,15%,22%.如果投入给A_2的钱是投给A_1的钱的2倍,他想得到2000元的利润,那么应当分别给A_1,A_2,A_3投资多少？

解 设投资给A_1,A_2,A_3的钱分别为x_1,x_2,x_3(单位:元),则由题意

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=10\ 000,\\2x_1-x_2=0,\\0.12x_1+0.15x_2+0.22x_3=2\ 000,\end{cases}$$

解得

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{2\ 500}{3},\frac{5\ 000}{3},7\ 500\right)^{\mathrm{T}},$$

即投资给A_1,A_2,A_3的钱分别为$\frac{2\ 500}{3}$元,$\frac{5\ 000}{3}$元,7 500元.

4.(物资调运问题) 有三个生产同一产品的工厂A_1,A_2,A_3,其年产量分别为40(吨),20(吨)和10(吨),该产品每年有两个用户B_1和B_2,其用量分别为45(吨)和25(吨),由各产地A_i到各用户B_j的距离为C_{ij}(千米)如下表所示($i=$

1,2,3; $j=1,2$),不妨假设每吨货物每千米的运费为 1(元),问各厂的产品如何调配才能使总运费最少?

C_{ij}	A_1	A_2	A_3
B_1	45	58	92
B_2	58	72	36

解　假设各厂运到各用户的产品数量如表所示

	A_1	A_2	A_3
B_1	x_1	x_2	x_3
B_2	x_4	x_5	x_6

则总运费为 $S=45x_1+58x_2+92x_3+58x_4+72x_5+36x_6$,且

$$\begin{cases} x_1+x_4=40, \\ x_2+x_5=20, \\ x_3+x_6=10, \\ x_1+x_2+x_3=45, \\ x_4+x_5+x_6=25 \end{cases} \qquad (x_i\geqslant 0, i=1,2,3,4,5,6).$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&40 \\ 0&1&0&0&1&0&20 \\ 0&0&1&0&0&1&10 \\ 1&1&1&0&0&0&45 \\ 0&0&0&1&1&1&25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&40 \\ 0&1&0&0&1&0&20 \\ 0&0&1&0&0&1&10 \\ 0&1&1&-1&0&0&5 \\ 0&0&0&1&1&1&25 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&40 \\ 0&1&0&0&1&0&20 \\ 0&0&1&0&0&1&10 \\ 0&0&1&-1&-1&0&-15 \\ 0&0&0&1&1&1&25 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1&0&0&0&-1&-1&15 \\ 0&1&0&0&1&0&20 \\ 0&0&1&0&0&1&10 \\ 0&0&0&1&1&1&25 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

故 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(15+x_5+x_6,20-x_5,10-x_6,25-x_5-x_6)^{\mathrm{T}}$,从而

$$S=4\ 205+x_5-69x_6 \quad (0\leqslant x_5\leqslant 20, 0\leqslant x_6\leqslant 10, 0\leqslant x_5+x_6\leqslant 25).$$

显然当 $x_5=0, x_6=10$ 时,S 最小,此时

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)^{\mathrm{T}}=(25,20,0,15,0,10)^{\mathrm{T}}.$$