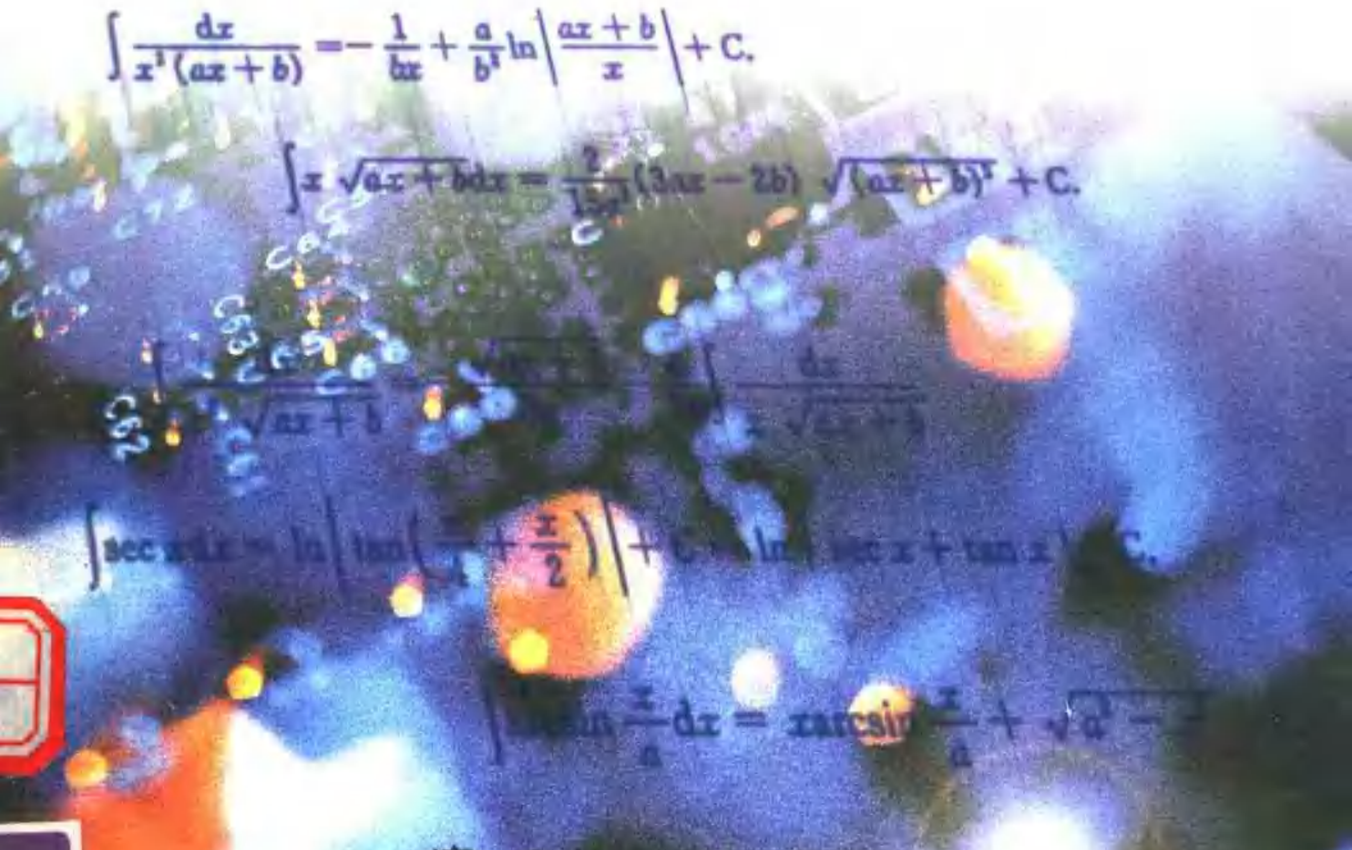
高 等 教 育 教 材

高等数学

主编 林 益



高等教育出版社

高 等 教 育 教 材

高 等 数 学

主 编 林 益

编 者 吴 洁 邵 琨

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是为高等职业教育编写的公共课教材，内容包括：函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、多元函数微分学和无穷级数.

本书以"必需、够用"为度，注重"数学为人人"的理念，努力提高学生的学习兴趣和素养，增强应用数学的能力.

本书适用于高等职业技术学院理工科各专业、成人高等教育各理工科专业及普通理工科大学中对数学要求略低的本科专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/林益主编. —北京：高等教育出版社，2003.6

(高等职业教育系列教材)

ISBN 7-04-012013-5

Ⅰ.高... Ⅱ.林... Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 041597 号

责任编辑 孙鸣雷 **特约编辑** 周 滔

封面设计 吴 昊 **责任印制** 潘文瑞

书 名 高等数学

编 著 林益

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号		021-56964871
邮政编码	100011	**免费咨询**	800-810-0598
总 机	010-82028899	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
传 真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com

排 版 南京理工排版校对公司

印 刷 江苏南洋印务集团

开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2003年6月第1版
印 张	13.5	**印 次**	2003年6月第1次
字 数	330 000	**定 价**	17.00元

前　言

本书是为高等职业教育编写的公共课教材，其内容包括一元函数微积分、多元函数微分学、微分方程与差分方程、级数等.

高等数学是高职教育的重要基础课程，它不仅为后续的专业课程提供必要的工具，同时也是培养专业技术人才素质的重要组成部分.结合高职教育的特点和要求，本书在内容取舍上不追求理论上的完整性和系统性.在取各家之长与精选的基础上，其内容符合“必需、够用”为度的要求.编写时作者有意识地引导学生了解数学与社会的关系，注意从学生身边的各种社会、生活及科学的问题出发，展开数学理论和应用.在教学观念上，不过分强求学生如何去深刻理解数学概念、原理及研究的过程，而是注重让学生体会数学的本质以及数学的价值，让学生感受到“数学为人人”的思想.

本书作者具有丰富的教学经验，全书语言流畅，内容深入浅出，通俗易懂，可读性强.特别是书中列举的应用问题新颖、趣味性强，有利于激发学生的学习兴趣，亲近数学理论，提高学生应用数学的兴趣和能力.

书中带*号的章节为选学内容.

本书由林益主编，吴洁编写了一元函数微分学与多元函数微分学部分，邵琨编写了一元函数积分学、方程和级数部分，参加编写的还有卢强、朱水清、胡明娣.在本书的编写过程中始终得到高等教育出版社的大力支持，在此特致以衷心的感谢！

由于作者水平、经验有限，时间紧迫，因此不可避免地会有谬误和不尽人意之处，恳请有关专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2003 年 5 月

郑 重 声 明

反盗版举报电话：(010)82028899 转 6897　(010)82086060

传　　真：(010)82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮　　编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，极限方法是微积分研究所采用的基本方法．本章将对函数、极限等有关概念进行较系统的介绍，为以后各章的学习作好准备．

§1.1　函数的概念与性质

函数是变量与变量的一种对应关系．本书研究的变量均取值于实数，因此我们必须了解实数的一些性质以及实数集的常见表示法．

1.1.1　实数

数是人类在争取生存、进行生产和交换中创造的一种特殊语言，是量的描述及其运算的手段．

实数是**有理数**与**无理数**的总称，它有以下性质：

(1) 实数对四则运算（即加、减、乘、除）是封闭的，即任意两个实数进行加、减、乘、除（除法要求除数不为零）运算后，其结果仍是实数．

(2) 有序性，即任意两个实数 a 与 b 可以比较大小，满足且只满足下列关系之一：

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

且大小关系具有传递性，即若 $a < b$, $b < c$，则 $a < c$.

(3) 稠密性，即任意两实数之间仍有实数．特别地，有理数和无理数在实数集中是稠密的．

(4) 连续性，即实数可以与数轴上的点一一对应．

微积分中经常比较两变量的大小．为此我们必须熟悉一些常见的不等式．

实数 a 的**绝对值** $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时；} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时．} \end{cases}$$

它表示数轴上的点 a 到原点的距离．以下两种不等式是常见的含有绝对值的不等式．

三角不等式：设 a, b 为实数，则

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|.$$

利用数学归纳法可将它推广为

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

其中 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为实数．

平均值不等式：设 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是非负实数，则有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

区间是今后常用的实数集.

设 a, b 是两个实数,且 $a < b$, 则

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体叫做以 a, b 为端点的**开区间**,记作(a, b),即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体叫做以 a, b 为端点的**闭区间**,记作$[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

(3) 满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的实数 x 的全体叫做以 a, b 为端点的**半开半闭区间**,记作$[a, b)$或$(a, b]$,即

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},\ (a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

以上三种区间称为有限区间,数 $b-a$ 称为它们的长度.从数轴上看,有限区间的长度为有限的线段(不包括端点,或包括一个、两个端点)(图 1-1).

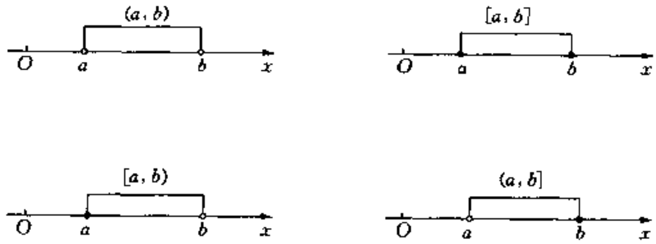


图 1-1

除上述有限区间外,还有无限区间.为了表示无限区间,首先引进记号$+\infty$与$-\infty$(不是数!),分别读作正无穷大与负无穷大.

(4) 满足不等式 $x > a$(也表示为 $a < x < +\infty$) 或 $x < b$(也表示为 $-\infty < x < b$) 的实数 x 的全体记作$(a, +\infty)$或$(-\infty, b)$,称为**无限开区间**,即

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\},(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

(5) 满足不等式 $x \geqslant a$(也表示为 $a \leqslant x < +\infty$) 或 $x \leqslant b$(也表示为 $-\infty < x \leqslant b$) 的实数 x 的全体记作$[a, +\infty)$或$(-\infty, b]$,称为**无限半开区间**,即

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},\ (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}.$$

图 1-2

$[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$以及$(-\infty, b)$在数轴上表现为长度为无限的半直线(图 1-2).

全体实数 **R** 记作$(-\infty, +\infty)$,它也是**无限开区间**.

以 a 为中心的开区间$(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta>0)$称为 a 的 δ **邻域**,δ 称为此邻域的半径(图 1-3),

常将邻域$(a-\delta,\ a+\delta)$记作$O(a,\ \delta)$或$O(a)$. 在$O(a,\ \delta)$中去掉中心点a后,称为a的δ **去心邻域**(图1-4),记作$O^{\circ}(a,\ \delta)$或$O^{\circ}(a)$.

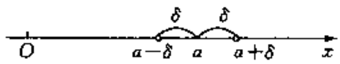


图 1-3

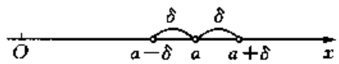


图 1-4

由于$a-\delta<x<a+\delta$相当于$|x-a|<\delta$, 因此

$$O(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为$|x-a|$表示点x与点a的距离,所以$O(a,\ \delta)$表示与点a的距离小于δ的实数x的全体.

类似的,$O^{\circ}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$,这里$|x-a|>0$表示$x\neq a$.

如果一个实数x在某个区间$(a,\ b)$内,就用符号$x\in(a,\ b)$表示,如$2\in(0,\ 3)$.

例 1 用区间表示x的变化范围.

(1) $2<x\leqslant 6$; (2) $x\geqslant 0$; (3) $x^2<9$; (4) $|x-3|\leqslant 4$.

解 (1) $(2,\ 6]$; (2) $[0,\ +\infty)$; (3) $(-3,\ 3)$; (4) $[-1,\ 7]$.

1.1.2 函数的定义

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中,人们会碰到各种各样的量,在某个问题的研究过程中保持不变的量称为**常量**,可以取不同数值的量称为**变量**.

例如,将一个密闭容器中的气体加热时,容器中气体的体积和分子个数保持不变,是常量;而气体的温度和容器内的气压在不断变化,因而是变量.

又如,一个商场的面积是常量,而每天到商场购物的人数是变量.

在研究同一问题中,往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 我们先看以下几个例子.

例 2 在物体作自由落体运动的过程中,物体的高度h,运动速度v,下落时间t,下落距离s都是变量;下落开始时的初始高度h_0及加速度g是常量. 它们之间有以下关系:

$$s+h=h_0,\qquad v=gt,\qquad s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 3 把一杯热的饮料放到冰箱中去,饮料的温度随时间的变化而变化.

例 4 经济学经常研究消费与收入之间的关系. 一般地,消费随收入的变化而变化.

抛开上述例子各自的具体含义,其共同本质是变量之间相互依赖的关系. 当其中一个变量取定了一个数值时,按照某种确定的对应关系,就可以求得另一个变量的一个相应值. 函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义 设在某一问题中有两个变量x和y,变量x的变化范围为D. 如果对D中每一个值x,按照某种对应法则f,都可唯一确定变量y的一个相应值,则称变量y是变量x的一个**函数**,记为

$$y=f(x),\qquad x\in D.$$

称x为自变量,y为因变量或函数. x的变化范围D称为函数的**定义域**,y的变化范围称为函数

的**值域**,一般记为 W.

表示一个函数通常有三种方法：

1. 公式法

就是用公式表示两变量之间的关系,公式法又称为**解析法**.例如, $y=\sqrt{x}$, $y=\sin x$, $S=\pi r^2$ 等都是用公式表示的函数.

上面所列举的函数,都是用一个公式表示了一个函数,但是有的函数用一个公式表示不出来,需要用两个或两个以上的公式表示,这样的函数叫**分段函数**,例如：

绝对值函数 $$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时;} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

符号函数 $$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时;} \\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

在实际生活中,分段函数的例子也是常见的.

例 5 某路公共汽车,票价 y(单位:元)与站数 x 间的函数关系是

$$y=\begin{cases} 1, & \text{当 } 1\leqslant x\leqslant 5 \text{ 时;} \\ 1.5, & \text{当 } 6\leqslant x\leqslant 10 \text{ 时;} \\ 2, & \text{当 } 11\leqslant x\leqslant 15 \text{ 时;} \\ 3, & \text{当 } x>15 \text{ 时.} \end{cases}$$

也就是说,乘客乘车的站数不超过 5 站,只须购买 1 元的车票;乘车的站数超过 5 站但不超过 10 站,须购买 1.50 元的车票,等等.

例 6 下面是个人工资、薪金所得应缴纳所得税的税款 y(单位:元)与其工资、薪金所得 x(单位:元)之间的关系.

$$y=\begin{cases} 0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 800 \text{ 时;} \\ (x-800)\times 5\%, & \text{当 } 800<x\leqslant 1\,300 \text{ 时;} \\ 25+(x-1\,300)\times 10\%, & \text{当 } 1\,300<x\leqslant 2\,800 \text{ 时;} \\ 25+150+(x-2\,800)\times 15\%, & \text{当 } 2\,800<x\leqslant 5\,800 \text{ 时;} \\ 175+450+(x-5\,800)\times 20\%, & \text{当 } 5\,800<x\leqslant 20\,800 \text{ 时;} \\ 625+3\,000+(x-20\,800)\times 25\%, & \text{当 } 20\,800<x\leqslant 40\,800 \text{ 时;} \\ 3\,625+5\,000+(x-40\,800)\times 30\%, & \text{当 } 40\,800<x\leqslant 60\,800 \text{ 时;} \\ 8\,625+6\,000+(x-60\,800)\times 35\%, & \text{当 } 60\,800<x\leqslant 80\,800 \text{ 时;} \\ 14\,625+7\,000+(x-80\,800)\times 40\%, & \text{当 } 80\,800<x\leqslant 100\,800 \text{ 时;} \\ 21\,625+8\,000+(x-100\,800)\times 45\%, & \text{当 } x>100\,800 \text{ 时.} \end{cases}$$

也就是说,当 $x\leqslant 800$ 时,不必纳税;当 $800<x\leqslant 1\,300$ 时,纳税部分是 $x-800$, 税率为 5%;当 $1\,300<x\leqslant 2\,800$ 时,其中 800 元不纳税,500 元应纳 5%的税,即 $500\times 5\%=25$(元),再多的部分,即$(x-1\,300)$, 按 10%纳税;等等.

对于分段函数要注意下面几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是几个函数.

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(3) 在处理问题时,对属于某一段的自变量就应用该段的表达式.

公式法的优点是准确、简单、便于进行理论研究.

2. 列表法

就是将自变量的一系列值与其对应的函数值列成一张表来表示的函数关系,例如中学数学用表中所列的立方根表、三角函数表等. 在现实生活中,抽彩的中奖号码是日子的函数,可以列表将两者对应起来,但是我们没有一个能使我们致富的抽彩中奖公式.

列表法的优点是便于应用.

3. 图像法

就是在平面直角坐标系中用图像来表示函数 $y=f(x)$. 如股票指数的运行图(实际上,这时我们很难用公式表示股票指数与时间的关系).

用图像表示函数的优点是它的直观性,函数的变化趋势从图像上可以一目了然,便于对函数进行定性分析.

例 7 在统计学上饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数,它反映了一个国家或地区的富裕程度,是国际通用的一项重要经济指标. 联合国根据恩格尔系数来划分一个国家国民富裕程度:恩格尔系数小于 20 为绝对富裕;20 到 40 之间属比较富裕;40 到 50 之间算小康水平;50 到 60 之间则刚够温饱;60 以上则为贫困. 以 x 表示恩格尔系数,y 表示富裕程度,则国民富裕程度,如图 1-5 所示.

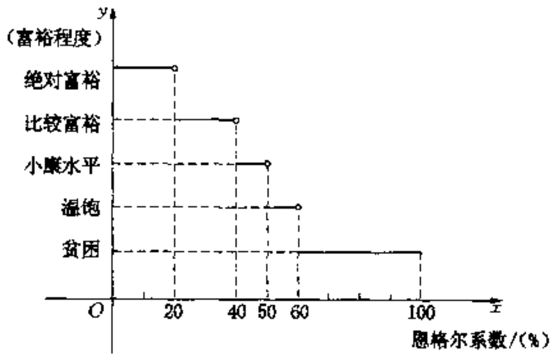


图 1-5

本书中函数的表示将以公式法为主,并尽可能地辅以图像说明.

一个函数主要是由对应法则和其定义域 D 所确定的,与其变量所选用的记号没有关系. 函数的定义域 D 可根据问题的实际意义来确定. 例如,在圆的面积 $S=\pi r^2$ 中,定义域 $D=\{r \mid r \geqslant 0\}$. 若考虑由某一公式表示的函数 $y=f(x)$,如果不特别声明,则认定其定义域为使 $f(x)$ 有意义的 x 的全体. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1, 1]$. 通常求定义域时应注意如下几点:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 偶次根式中,被开方式的值非负;

(3) 对数式中的真数必须大于零,底数大于零且不等于 1,等等.

例 8 判断下述函数 $f(x)$、$g(x)$ 是否相等.

(1) $f(x)=x$, $\quad g(x)=(\sqrt{x})^2$; $\qquad$ (2) $f(x)=x+1$, $\quad g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(3) $f(x) = 2\lg x$, $\quad g(x) = \lg x^2$; $\qquad$ (4) $f(x) = x$, $\quad g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$.

解 因为两函数相等的充分必要条件是定义域与对应法则完全一致,因此,

(1) $f(x)$与 $g(x)$不相等. 因为 $f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$[0, +\infty)$,定义域不同.

(2) $f(x)$与 $g(x)$不相等. 因为 $f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,定义域不同.

(3) $f(x)$与$g(x)$不相等. 因为$f(x)$的定义域是$(0, +\infty)$,而$g(x)$的定义域是$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,定义域不同.

(4) $f(x)$与 $g(x)$相等. 首先是定义域均为$(-\infty, +\infty)$,其次是对应法则相同,因为$g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \dfrac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x = f(x)$.

1.1.3 函数的性质

研究函数性质的目的是为了了解函数所具有的特性,以便掌握它的变化规律.

1. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称,即 $x \in (-a, a)$. 若函数满足

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in (-a, a),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**;若函数满足

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in (-a, a),$$

则称 $f(x)$为**奇函数**.

例如, $y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数; $y = x^3$ 和 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴是对称的[图 1-6(1)];奇函数的图像关于原点是对称的[图 1-6(2)].

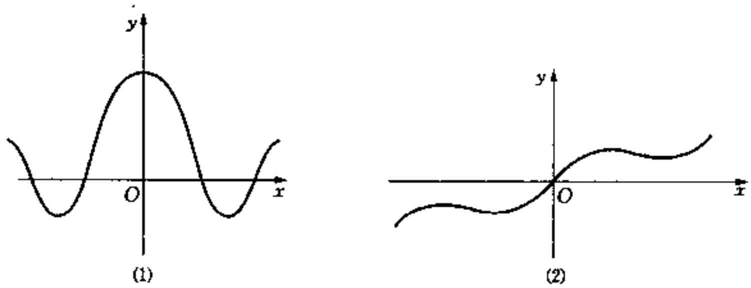


图 1-6

注意 不能说函数 $f(x)$非奇即偶或非偶即奇. 如 $f(x) = x + 1$ 既不是奇函数,也不是偶函数. 因 $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$,既无 $f(-1) = -f(1)$,也无 $f(-1) = f(1)$.

2. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,任意的 x_1、$x_2 \in I$. 若 $x_1 < x_2$ 时, 总有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \qquad [f(x_1) \geqslant f(x_2)],$$

则称 $f(x)$在区间 I 上是**单调增**(**单调减**)的. 单调增与单调减统称为**单调**. I 称为 $f(x)$的**单调区间**, $f(x)$称为 I 上的**单调函数**.

若将上面的不等号$\leqslant(\geqslant)$换成$<(>)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**严格单调增**(**严格单调减**)的. 严格单调增与严格单调减统称为**严格单调**. 由于 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 包含了 $f(x_1) < f(x_2)$, 故严格单调函数也是单调函数.

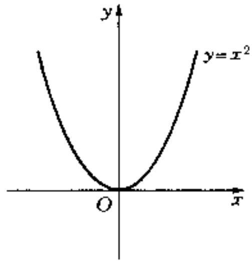


图 1-7

例如,函数 $y = x^2$ 在$(-\infty, 0)$内是单调减的;而在$(0, +\infty)$内是单调增的. 从图像上看,单调增函数的图像当 x 往右边移动时上升,而单调减函数的图像当 x 往右边移动时下降(图 1-7). 常数函数 $y = C$ 既是单调增函数又是单调减函数.

3. 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D. 若存在 $T_0 > 0$,对任意 $x \in D$,有 $f(x + T_0) = f(x)$, 则称$f(x)$是**周期函数**,满足上面等式的最小正数 T_0 叫做 $f(x)$的**周期**.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是以 2π 为周期的函数, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 是以 π 为周期的函数.

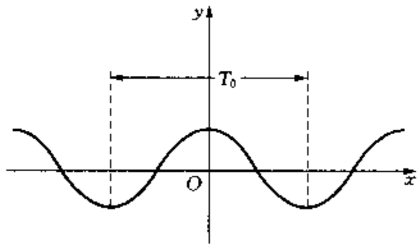


图 1-8

有很多自然现象,像季节、气候等都是年复一年的呈周期变化的;有很多经济活动,小到商品销售,大到经济宏观运行,其变化具有周期规律性. 从图像上看,以 T 为周期的函数 $f(x)$的图像沿 x 轴平行移动 T 仍然保持不变(图 1-8).

4. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D. 若存在 $M > 0$,对任意 $x \in D$, 都有

$$| f(x) | \leqslant M,$$

则称 $f(x)$在 D 内**有界**,否则称 $f(x)$在 D 内**无界**.

例如,函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,有 $M = 1$, 使得

$$| \sin x | \leqslant 1, \quad | \cos x | \leqslant 1.$$

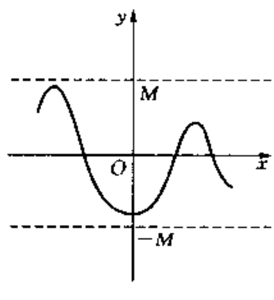


图 1-9

从图像上看,有界函数的图像介于带状区域之间(图 1-9).

可以证明:在闭区间$[a, b]$上的单调函数 $f(x)$是$[a, b]$上的有界函数.

例 9 根据定义证明 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在$(0, +\infty)$内是单调增加的.

证 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1} = \left(1 - \frac{1}{1+x_2}\right) - \left(1 - \frac{1}{1+x_1}\right) = \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2}$$

$$= \frac{(1+x_2) - (1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} = \frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} > 0.$$

故函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

例 10 证明:定义在$(-a,a)$内的任何函数 $f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 设 $f(x)$为定义在$(-a,a)$内的任意一个函数.令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为 $$\varphi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x),$$

所以 $\varphi(x)$是偶函数,$\psi(x)$是奇函数,而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x),$$

故 $f(x)$可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

例 11 设实数 $a<b$,函数 $f(x)$对任意实数 x,有

$$f(a-x)=f(a+x),\ f(b-x)=f(b+x).$$

证明 $f(x)$是以 $2b-2a$ 为周期的周期函数.

证 $$\begin{aligned} f[x+2(b-a)]&=f[b+(x+b-2a)]=f[b-(x+b-2a)]\\ &=f(2a-x)=f[a+(a-x)]=f[a-(a-x)]=f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

通常,可用下述方法判断一个函数是否为周期函数.

(1) 将函数分解成我们熟知的周期函数的代数和,再求这些周期函数的周期的最小公倍数.

例如,$y=\sin^2 x$.因 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,且 $\cos 2x$ 是以 π 为周期的函数,所以 $y=\sin^2 x$ 是以 π 为周期的函数.

(2) 列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$,以 T 为未知量解此方程.若

① 解出的 T 是与 x 无关的正数,则 $f(x)$是周期函数;

② 解出的 T 与 x 有关,或者利用一些熟知的运算法则推出矛盾的结果,就可断定函数是非周期函数.

例 11 证明 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

证 用反证法.设它存在正周期 T,则

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2.$$

令 $x=0$,得

$$\sin T^2=0.$$

解方程,得 $T^2=k\pi$,即 $T=\sqrt{k\pi}$,其中 $k\in\mathbf{N}$.再令 $x=\sqrt{2}T$,得

$$\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi]=0,$$

即
$$(\sqrt{2}+1)^2 k\pi = l\pi \quad (l \in \mathbf{N}),$$
则
$$(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{l}{k} \quad (l,\ k \in \mathbf{N}).$$

因$\frac{l}{k}$为有理数,而 $(\sqrt{2}+1)^2$ 不是有理数,矛盾.所以 $y = \sin x^2$ 不是周期函数.

习题 1.1

1. 求下列各函数值:

(1) 设 $f(x) = x^3 - 1$, 求 $f(0)$, $f(-x)$;

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 当\ x > 0\ 时; \\ 1, & 当\ x = 0\ 时; \\ -x, & 当\ x < 0\ 时. \end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$;

(3) 设 $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, 求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$;

(4) 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & 当\ |x| < \frac{\pi}{3}\ 时; \\ 0, & 当\ |x| \geqslant \frac{\pi}{3}\ 时, \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$.

2. 指出下列各对函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同,并说明理由:

(1) $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$;　　(2) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln|x|$;　　(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{x-1}$;　　(2) $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$;

(3) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(5) $y = \sqrt{9-x^2}$;　　(6) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$;

(7) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y = \lg(1-x) + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^5 - 2x^3 - 4x$;　　(2) $f(x) = \cos x - \sin x$;

(3) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$;　　(4) $y = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$.

5. 判断下列函数在所给区间上的有界性:

(1) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $(-\infty < x < +\infty)$;　　(2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

§1.2　函数的运算、初等函数

1.2.1　函数的四则运算

设 $f(x)$、$g(x)$是分别定义于 D_1 与 D_2 上的函数,D_1 与 D_2 的交集 $D = D_1 \cap D_2$ 非空,对每

个 $x \in D$，分别称

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad [g(x) \neq 0],$$

为函数的和、差、积、商. 函数的四则运算也称作有理运算.

如果 $f(x)$、$g(x)$具备某种特性(如奇偶性、单调性、有界性及周期性)，那么经四则运算后的函数是否仍具备该性质呢？我们看以下几个例子.

例 1 若 $f(x)$、$g(x)$是$(-a, a)$上的奇函数，则在$(-a, a)$上，$f(x) \pm g(x)$是奇函数，$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x) \neq 0]$是偶函数.

证 设 $F_1(x) = f(x) \pm g(x)$，$F_2(x) = f(x)g(x)$，$F_3(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，则对任意 $x \in (-a, a)$，

$$F_1(-x) = f(-x) \pm g(-x) = -[f(x) \pm g(x)] = -F_1(x);$$

$$F_2(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F_2(x);$$

$$F_3(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = F_3(x).$$

这表明 $f(x) \pm g(x)$ 是奇函数，$f(x)g(x)$及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是偶函数.

类似地可以证明，两个偶函数的和、差、积、商仍是偶函数；而奇函数与偶函数的积与商是奇函数.

由以上结果推知，$x \pm \sin x$，$x^2 \sin x$，$x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数；$x\sin x$，$1+x^2$，$x^3 \operatorname{sgn} x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数.

例 2 若 $f(x)$、$g(x)$是区间 I 上的非负单调增函数，则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$也是 I 上的非负单调增函数.

证 设 $x_1 < x_2$，x_1，$x_2 \in I$，则由条件，得

$$0 \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_2), \ 0 \leqslant g(x_1) \leqslant g(x_2).$$

从而

$$0 \leqslant f(x_1)+g(x_1) \leqslant f(x_2)+g(x_2);$$

$$0 \leqslant f(x_1)g(x_1) \leqslant f(x_2)g(x_2).$$

这表明 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$是区间 I 上的非负单调增函数.

例 3 若 $f(x)$、$g(x)$是 D 上的有界函数，则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$也是 D 上的有界函数.

证 由条件知，存在 $M > 0$，$N > 0$，使得

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant N \quad (x \in D).$$

于是

$$|f(x) \pm g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M+N \quad (x \in D);$$

$$|f(x)g(x)| \leqslant |f(x)||g(x)| \leqslant MN \quad (x \in D).$$

这表明 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$是 D 上的有界函数.