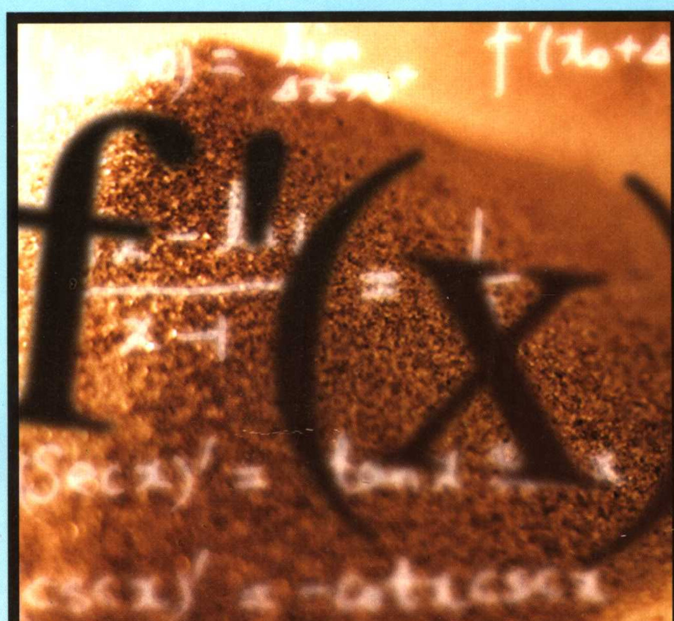
南开大学公共数学系列教材

高等数学

习题课讲义

（上）

薛运华　赵志勇／编著



南開大學出版社

南开大学公共数学系列教材

高等数学习题课讲义

（上）

薛运华　赵志勇　编著

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课讲义（上）/ 薛运华，赵志勇编著. —天津：南开大学出版社，2006.8

（南开大学公共数学系列教材）

ISBN 7-310-02587-3

Ⅰ.高...　Ⅱ.张...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078928 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

787×960 毫米　16 开本　14.875 印张　2 插页　280 千字

定价:26.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

总 序

高等数学是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课。由于各个学科门类的情况差异较大，该课程又形成了包含多个层次多个类别的体系结构。层次不同，类别不同，教学目标和教学要求也就有所不同，课程内容的深度与宽度也就有所不同，自然所使用的教材也应有所不同。

教材建设是课程建设的一个重要方面，属于基础性建设。时代在前进，教材也应适时更新而不能一劳永逸。因此，教材建设是一项持续的不可能有"句号"的工作。

20世纪80年代以来，南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材。其中，如《文科数学基础》一书作为“十五”国家级规划教材由高等教育出版社于2003 年出版，经过几年的使用取得较好收效。这些教材为南开的数学教学作出了重要贡献，也为公共数学教材建设奠定了基础，积累了经验。

21世纪是一个崭新的世纪。随着新世纪的到来，人们似乎对数学也有了一个崭新的认识：数学不仅是工具，更是一种素养，一种能力，一种文化。已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑。他尤其对大学生们寄予厚望。他不仅关心着数学专业的学生，也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子。2004年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题字，并与获奖学生合影留念。这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策。另一方面，近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现。这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求。而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进。现在呈现在读者面前的便是南开大学公共数学系列教材。

本套教材的规划和出版得到了南开大学教务处、南开大学数学科学学院和南开大学出版社的高度重视、悉心指导和大力支持。此项工作是南开大学新世纪教学改革项目"公共数学课程建设改革与实践"的重要内容之一。编委会的各位老师为组织、规划和编写本套教材付出了不少心血。此外，还有很多热心的老师和同学给我们提出了很多很好的建议。对来自方

方面面的关心、支持和帮助，我们在这里一并表示衷心感谢。

由于我们的水平有限，缺点和不足在所难免，诚望读者批评指正。

南开大学公共数学系列教材编委会

2006年6月

前言

鉴于大学非数学类专业对数学素质要求愈来愈高，《高等数学》课程的教学越来越受到高校的重视。习题课作为《高等数学》的重要辅助课程，在帮助学生深入理解课程内容、熟练掌握并灵活运用所学数学方法方面起着非常大的作用。多年的教学实践证明，习题课是整个教学活动中一个不可缺少的重要环节。南开大学数学科学学院高等数学教学部历来重视习题课建设，并且得到了全校各有关学院的领导和同学们的大力支持和帮助。他们坚持规范与创新并重，从而使习题课教学的水平逐年提高，其效果也日益明显。作者把习题课教学中的一些经验和想法整理编辑成册，诚望同行批评指正。

本书上册包括极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分及其应用等内容，全书的结构采取专题“课”的形式，适合于每周两个课时的习题课教学安排。

在每个专题“课”中，“本课重点内容提示”部分归纳基础理论，深入剖析重点难点，升华数学思想，力图使读者对相关知识有更加深入透彻的理解和把握。“精讲例题与分析”部分选择了一定数量且题型比较广泛的典型例题。讲解中注重体现严谨的数学逻辑思维，详尽地阐释解题的方法和技巧，并将各类相似题型加以联系比较，旨在帮助读者通过习题训练，在掌握常用的数学方法和技巧的过程中对基础知识融会贯通、灵活运用。“课外练习”部分选取了不同难度的练习题，由易到难，由浅入深，由单一到综合，适合于不同基础的同学使用，体现了分类教学的理念。五个“综合训练”适合读者对知识掌握程度的自我测评。

本书所选的习题，一部分来源于南开大学《高等数学》课程的课堂和习题课教学，另一部分来源于近年硕士研究生入学考试以及天津市大学生数学竞赛的真题。

本书可作为非数学类专业的高等数学习题课或课外辅导的教师参考用书，可作为学生课下同步练习或期末复习用书，也可作为考研复习或者自学者的学习资料。

本书分上下两册，上册由薛运华完成，下册由赵志勇完成。张效成教授、薛峰老师在本书的策划方面给了很多中肯的意见，并且张效成教授仔细审阅了初稿。对来自各个方面的帮助我们表示由衷的感谢。

由于编者的水平有限，书中难免疏漏之处，望读者批评指正。

编者

于南开园

目 录

第一课　函数的性质与数列极限的概念

1.1　本课重点内容提示

1. 函数的性质（定义域、值域、奇偶性、增减性、单调性、周期性、反函数等内容）的复习和总结. 除了高中所学习的初等函数外，再介绍几个初等函数和几个常用的非初等函数.

(1)双曲函数（初等函数）

双曲正弦

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

双曲余弦

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

双曲正切

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

双曲余切

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

(2)几个常用的非初等函数

取整函数

$$y = [x].$$

其函数值为不超过x的最大整数.

符号函数

$$y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Dirichlet函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

Riemann函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 若x=\dfrac{m}{n},其中m和n互质,\\ 0, & 若x为无理数.\end{cases}$$

2. 充分理解数列的极限的定义，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的分析定义：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N（依赖于ε），当$n>N$时，均有$|x_n-a|<\varepsilon$.

(1)ε为任意正数，是衡量x_n与a的逼近程度的阈限值．可以看出，虽然ε为任意正数，但是只有当ε充分小时，才能刻画x_n以a为极限的意义.

(2)N与ε有关系，N有最小值，但是其选取不惟一.

3. 利用$\varepsilon-N$语言证明数列的极限的存在性，关键是将$|x_n-a|$适当放大，找到自然数N，N的表达式越简单越好，没有必要找到的N总是满足$|x_n-a|<\varepsilon$的最小的自然数．例如，用$\varepsilon-N$语言证明下面数列的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-8}{5n^2-6n+1}=\frac{3}{5}. \tag{1-1}$$

本题的目的是要从$|x_n-a|<\varepsilon$找到自然数N，因此

$$\left|\frac{3n^2-8}{5n^2-6n+1}-\frac{3}{5}\right|=\left|\frac{18n-43}{5(5n^2-6n+1)}\right|\leqslant\left|\frac{18n}{5n^2-6n}\right|\leqslant\frac{18n}{n^2}=\frac{18}{n}<\varepsilon,$$

从而取$N=\max\left\{\left[\dfrac{18}{\varepsilon}\right],2\right\}$，当$n>N$时，必有

$$\left|\frac{3n^2-8}{5n^2-6n+1}-\frac{3}{5}\right|<\varepsilon. \tag{1-2}$$

这里可以看出，直接从(1-2)式求出的N是满足该不等式的最小的自然数，但是表达式会比较麻烦，可以将其适当放大，在放大的过程中应当注意放大的条件，例如本题放大的过程中，使用了$18n-43>0$及$4n^2-6n>0$这两个条件，只需$n>2$就可满足，因此就知道上面的N那样取值的原因了．这样的N可能不是最小的，但是表达式比较简单，也满足数列的极限的定义的要求.

4. 理解数列$\{x_n\}$不以a为极限的分析表述.

存在$\varepsilon_0>0$，对于任意的正整数N，总存在一项$x_n(n>N)$，使得

$$|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

5. 数列$\{x_n\}$没有极限、数列$\{x_n\}$无界、数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$是三个不同的概念，其分析定义是不同的，在学习的过程中应当注意区分.

数列$\{x_n\}$没有极限，若数列$\{x_n\}$不以任何实数a为极限.

数列$\{x_n\}$无界，即对于任何实数$M>0$，均存在n(依赖于M)，使得

$$|x_n|>M.$$

数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，若对于任何实数$M>0$，存在$N$(依赖于$M$)，当$n>N$时，都有

$$x_n>M.$$

注 从定义可以看出，数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$是数列$\{x_n\}$无界的一种特殊情形.

6. 掌握三个重要极限的证明方法，作为求数列极限的基础.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，其中$|q|<1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$.

1.2 精讲例题与分析

1.2.1 基本习题讲解

例 1.1 求$y=(-1)^x$的定义域和值域.

解 若x为无理数，用不同的有理数逼近求值时不惟一，故x为有理数，即具有$\dfrac{m}{n}$（n,m互质）形式.

若m为偶数，由于n,m互质，则n为奇数.

若m为奇数，要使得定义有意义，则n为奇数且与m互质.

所以其定义域为形式：$\left\{\dfrac{l}{2k+1}\right\}$（$l,k$为整数且$l,2k+1$互质），值域为$\{1,-1\}$.

例 1.2 证明：$y=x-[x]$为周期函数，并求出它的最小正周期.

证明 $[x]$表示不超过x的最大整数. 设周期为T，则：

$$x-[x]=x+T-[x+T],$$

得

$$T=[x+T]-[x].$$

可得到T为任意整数，故最小正周期为1.

例 1.3 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

并举例说明：若$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 未必成立.

证明　由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，知任意的正数$\varepsilon > 0$，∃自然数$N$，使得对于一切$n > N$，恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

又由于

$$||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon,$$

所以就有

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

设$x_n = (-1)^n$，有

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1,$$

而极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在.

注　若$a = 0$，二者是否等价呢?

1.2.2　拓展习题讲解

例 1.4　给出函数$f(x)$在区间(a,b)内有界、数列$\{x_n\}$有界的定义.

解　$f(x)$在区间(a,b)内有界，即存在$M > 0$，使得对任意$x \in (a,b)$都有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

数列$\{x_n\}$有界，即存在实数$M > 0$，对于任意的自然数n，均有

$$|x_n| \leqslant M.$$

例 1.5　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的定义与下面的叙述是否等价?

(1)$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

解　是，由定义可以得到.

(2)$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时，恒有$|x_n - a| < M\varepsilon$. (其中M是与ε无关的正数.)

解　是.

(3)$\forall\varepsilon > 0$，满足$|x_n - a| \geqslant \varepsilon$的$n$至多有有限多个.

解　是.

(4)$\forall\varepsilon > 0$，满足$|x_n - a| < \varepsilon$的n有无限多个.

解　否. 如数列$x_{2n} = 1$，$x_{2n-1} = \dfrac{1}{n}$满足条件，但是该数列发散.

(5) $\exists N$，$\forall\varepsilon > 0$，当$n > N$时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

解 否，是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的充分条件，但非必要条件.

(6)任意的正整数m，存在N，$\forall n > N$，$|x_n - a| < \dfrac{1}{m}$均成立.

解 是.

(7)$\forall 0 < \varepsilon < 10^{-10}$，$\exists N$，当$n > N$时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

解 是.

例 1.6 设$a > 1$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

证明 方法一，由均值不等式

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a\cdot 1\cdot 1\cdots 1} \leqslant \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n},$$

由于$a > 1$，所以$\sqrt[n]{a} > 1$，有

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leqslant \frac{a+n-1}{n} - 1 = \frac{a-1}{n},$$

从而，$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right] + 1$，当$n > N$时，有

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

方法二，令$b_n = \sqrt[n]{a}$，则

$$a - 1 = (b_n^n - 1) = (b_n - 1)(b_n^{n-1} + \cdots + b_1 + 1) \geqslant n(b_n - 1)$$

所以

$$|b_n - 1| \leqslant \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

得证.

注 方法一的证明不同于教材上的方法.

例 1.7 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明 设$a_n = \sqrt[n]{n}$，令$a_n = 1 + \lambda_n$，得$\lambda_n > 0$，且

$$a_n^n = (1+\lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n^2 + \cdots + \lambda_n^n > \frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n^2.$$

当$n > 2$时，$n - 1 > \dfrac{n}{2}$，有

$$a_n^n > \frac{n^2}{4}\lambda_n^2 = \frac{n^2}{4}(a_n - 1)^2,$$

即

$$n > \frac{n^2}{4}\lambda_n^2 = \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n} - 1)^2.$$