

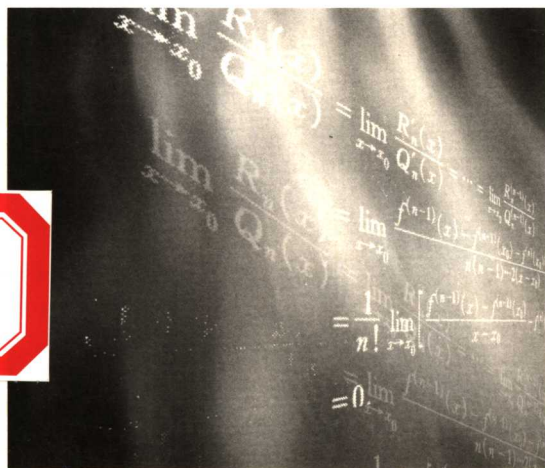


经典教材辅导用书
数学系列

数学分析 习题详解(下)

高教版·《数学分析·下册》(第三版)
(华东师范大学数学系编)

林 益 邵 琨 罗德斌 俞小清 编



华中科技大学出版社
<http://press.hust.edu.cn>

017-44
15/2

经典教材辅导用书·数学系列丛书

数学分析习题详解(下)

高教版·《数学分析·下册》(第三版)
(华东师范大学数学系编)

林 益 邵 琨 编
罗德斌 俞小清

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题详解(下)/林益 邵琨 罗德斌 俞小清 编
武汉:华中科技大学出版社,2005年9月
ISBN 7-5609-3489-7

I. 数…

II. ①林… ②邵… ③罗… ④俞…

III. 数学分析-习题

IV. O17

数学分析习题详解(下) 林益 邵琨 罗德斌 俞小清 编

责任编辑:周芬娜

封面设计:潘 群

责任校对:刘 飞

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:13.25

字数:318 000

版次:2005年9月第1版

印次:2005年9月第1次印刷

定价:18.80元

ISBN 7-5609-3489-7/O · 367

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 介 绍

本书是对华东师范大学数学系所编写的、高等教育出版社出版的《数学分析》(第三版)下册全部习题的详解. 为便于学生学习, 在每章的习题解答之前, 增加了知识要点部分, 此部分不是对该章主要内容的罗列, 而是帮助学生从更高的观点上来理解该章的主要内容, 分析理论作用, 指出各概念、各定理的相互关联等, 并指导解题方法, 提示注意事项等. 习题详解部分则周密、细致、规范, 富有启发性, 注意解题方法及技巧的运用, 能给学生起到举一反三的作用. 本书可供学生学习数学分析课程参考.

前 言

数学分析是数学系学生一门极其重要的基础课。它集中反映了数学科学的学科特点,并对学生进行了最基本、最必要的基础训练,是学生今后学习数学、攀登数学高峰的重要落脚点。它在本科数学学习中占有特殊的地位,因此加强数学分析课程的教学是必需的。

对于刚入学的数学系一年级学生而言,学习数学分析课程都有“难”的感觉。这是由数学的学科特点所决定的。因为数学的思维方法、理论体系与平常人的日常习惯是大相径庭的,一开始难以适应。学习上最突出的矛盾反映在“解题”这个环节上。众所周知,要学好数学就要动手解题(而且要有足够多的题量),但是要学会解题就必须全面、正确地理解基本概念、基本理论和基本方法的基础上,运用辩证法来分析矛盾或转化矛盾,用逻辑推理来演化或推导等来解决问题。同时数学又是一种语言,要求学生用精确的数学语言表达自己的思路与论证。可见,提高解题能力绝非一日之功,而是需要长时间、坚持不懈地严格训练才能奏效的。而平时学生在这方面的努力与成果,是通过作业来反映的。教师批改作业时的“√”与“×”还是不能充分反映学生学习的不足,也缺乏足够的视野空间。因此同学们自然希望手头有一本能弥补自己不足的数学参考书,特别是习题解答,以启发自己的思维,寻找自己知识的不足,提高语言表达能力等。

毫无疑问,华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)

是一本优秀的理科教材,目前正被各高等院校广泛地采用.我们应邀编写该教材(上、下册)全部的习题解答,仅供学习参考.

为了学生学习方便,本书完全按照原教材的章、节编写,题号及数学符号与原教材一致.每章内容由两部分组成:一是知识要点,二是习题详解.知识要点不是对该章主要内容的罗列,而是从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指导解题方法,提示注意事项等.习题详解则周密、细致、规范,富有启发性.

当然,习题解答是一把双刃剑,使用得当将受益,使用不当将受害.只有在独立完成习题的基础上对照阅读解答,或者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答,然后掩卷再独立完成,这样才能提高自身的数学素养,达到更好地学习数学分析课程的目的.

希望读者正确使用本书,并对本书的不足予以指正.

编 者

2005年7月

目 录

第十二章 数项级数	(1)
知识要点	(1)
习题详解	(3)
§1 级数的收敛性	(3)
§2 正项级数	(9)
§3 一般项级数	(18)
§4 总练习题	(26)
第十三章 函数列与函数项级数	(30)
知识要点	(30)
习题详解	(31)
§1 一致收敛性	(31)
§2 一致收敛函数列与函数项级数的性质	(42)
§3 总练习题	(49)
第十四章 幂级数	(55)
知识要点	(55)
习题详解	(56)
§1 幂级数	(56)
§2 函数的幂级数展开	(66)
§3 复变量的指数函数·欧拉公式	(70)
§4 总练习题	(71)
第十五章 傅里叶级数	(76)
知识要点	(76)
习题详解	(77)

§ 1 傅里叶级数	(77)
§ 2 以 $2l$ 为周期的函数的展开式	(89)
§ 3 收敛定理的证明	(96)
§ 4 总练习题	(100)
第十六章 多元函数的极限与连续	(104)
知识要点	(104)
习题详解	(105)
§ 1 平面点集与多元函数	(105)
§ 2 二元函数的极限	(115)
§ 3 二元函数的连续性	(124)
§ 4 总练习题	(129)
第十七章 多元函数微分学	(135)
知识要点	(135)
习题详解	(136)
§ 1 可微性	(136)
§ 2 复合函数微分法	(146)
§ 3 方向导数与梯度	(152)
§ 4 泰勒公式与极值问题	(157)
§ 5 总练习题	(175)
第十八章 隐函数定理及其应用	(182)
知识要点	(182)
习题详解	(183)
§ 1 隐函数	(183)
§ 2 隐函数组	(189)
§ 3 几何应用	(199)
§ 4 条件极值	(206)
§ 5 总练习题	(215)

第十九章 含参量积分	(226)
知识要点	(226)
习题详解	(228)
§ 1 含参量正常积分	(228)
§ 2 含参量反常积分	(235)
§ 3 欧拉积分	(245)
§ 4 总练习题	(248)
第二十章 曲线积分	(253)
知识要点	(253)
习题详解	(255)
§ 1 第一型曲线积分	(255)
§ 2 第二型曲线积分	(260)
§ 3 总练习题	(265)
第二十一章 重积分	(270)
知识要点	(270)
习题详解	(272)
§ 1 二重积分概念	(272)
§ 2 直角坐标系下二重积分的计算	(278)
§ 3 格林公式·曲线积分与路线的无关性	(289)
§ 4 二重积分的变量变换	(296)
§ 5 三重积分	(307)
§ 6 重积分的应用	(314)
§ 7 n 重积分	(321)
§ 8 反常二重积分	(324)
§ 9 总练习题	(326)
第二十二章 曲面积分	(340)
知识要点	(340)
习题详解	(343)

§ 1 第一型曲面积分	(343)
§ 2 第二型曲面积分	(346)
§ 3 高斯公式与斯托克斯公式	(350)
§ 4 场论初步	(359)
§ 5 总练习题	(367)
第二十三章 流形上微积分学初阶	(373)
知识要点	(373)
习题详解	(374)
§ 1 n 维欧氏空间与向量函数	(374)
§ 2 向量函数的微分	(381)
§ 3 反函数定理和隐函数定理	(394)
§ 4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式	(402)
§ 5 总练习题	(407)

第十二章 数项级数

知识要点

1. 数项级数是无数多个数“相加”，只有收敛时其“和”才有意义。而数的加法满足的交换律和结合律对级数而言则未必成立。只有绝对收敛的级数才可以任意改变级数项的次序，其收敛性不变，和也不变。而一般收敛的级数则可任意加括号，加括号后的新级数收敛性不变，和也不变。对于加括号有个常用的性质：加括号后的级数发散，则原级数发散。

2. 级数收敛与其部分数列收敛等价，故级数收敛问题，常转化为数列收敛的问题予以讨论。

3. 判断正项级数敛散性，通常有以下方法。

(1) 利用级数通项 a_n 判敛。

i) 若 $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

ii) 达朗贝尔判别法、柯西判别法、拉贝判别法。

iii) 等价量判别法：若 $a_n \sim \frac{1}{n^p} (n \rightarrow \infty)$ ，则 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛； $p \leq 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

估计 a_n 的阶数时常使用泰勒公式 $\left(x_0 = 0, x = \frac{1}{n} \right)$ 。

(2) 与已知收敛性的级数作比较的比较原则。

寻找比较级数时注意：若证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，应设法将 a_n 放大为 b_n ，使得 $0 \leq a_n$

$\leq b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;若证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,应设法将 a_n 缩小为 c_n ,使得 $0 \leq c_n \leq a_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

(3) 柯西积分判别法.

(4) 柯西收敛准则、级数收敛定义等.

4. 绝对收敛的级数必收敛;收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛的级数.

5. 一般项级数判别方法.

(1) 若 $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 对交错级数应用莱布尼茨判别法.

(3) 应用达朗贝尔判别法或柯西判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收敛性,若判得

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;若判得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(4) 将级数通项表成两项的乘积时,可考虑阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

(5) 柯西收敛准则或级数收敛定义.

注意:证明条件收敛时必须同时证明两点,一是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,二是 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.

6. 绝对收敛的级数与条件收敛的级数在性质上有很大差别:绝对收敛的级数可重排,重排后的级数仍然绝对收敛且和不变,而条件收敛的级数重排后会改变其收敛性或和.

两绝对收敛的级数还可以相乘,所得新级数绝对收敛且和为这两级数和的乘积(柯西定理).

习题详解

§1 级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性, 并求其和数:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots;$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n});$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(5k-4)(5k+1)} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5k-4} - \frac{1}{5k+1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right), \end{aligned}$$

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5}$, 故级数收敛且其和为 $\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \times 3^n}, \end{aligned}$$

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$, 故级数收敛且其和为 $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} (3) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right], \end{aligned}$$

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$, 故级数收敛且其和为 $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
 (4) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) - \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) - (\sqrt{n+1} - 1) \\
 &= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},
 \end{aligned}$$

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$, 故级数收敛且其和为 $1 - \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad S_n &= 2S_n - S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{2^k} - \frac{2n-1}{2^n} \\
 &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \quad (n \geq 2),
 \end{aligned}$$

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$, 故级数收敛且其和为 3.

2. 证明: 若级数 $\sum u_n$ 发散, $c \neq 0$, 则 $\sum cu_n$ 也发散.

证 因为级数 $\sum u_n$ 发散, 即 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对任何 $N \in \mathbf{N}_+$, 总有

$$m_0 \in \mathbf{N}_+ \quad \text{和} \quad p_0 \in \mathbf{N}_+,$$

使 $|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0$.

所以 $|cu_{m_0+1} + cu_{m_0+2} + \cdots + cu_{m_0+p_0}| = |c| |u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}|$
 $\geq |c| \varepsilon_0$,

于是 $\sum cu_n$ 亦发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散, 试问 $\sum (u_n + v_n)$ 一定发散吗? 又若 u_n 与 $v_n (n=1, 2, \cdots)$ 都是非负数, 则能得出什么结论?

解 若 $\sum u_n$, $\sum v_n$ 都发散, 则 $\sum (u_n + v_n)$ 不一定发散.

例如, $\sum 1$ 和 $\sum (-1)$ 是发散的, 但 $\sum (1 + (-1))$ 是收敛的;

$\sum 1$ 和 $\sum 2$ 是发散的, $\sum (1+2) = \sum 3$ 亦是发散的.

若 $\sum u_n, \sum v_n$ 都发散且 $u_n \geq 0, v_n \geq 0$, 则 $\sum (u_n + v_n)$ 发散. 由柯西收敛准则, 知 $\exists \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$, 对任何的 $N \in \mathbb{N}_+$, 总存在 $m_0, p_0, m_1 \in \mathbb{N}_+$, 使

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| = u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \geq \varepsilon_0,$$

和 $|v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1}| = v_{m_1+1} + v_{m_1+2} + \cdots + v_{m_1+p_1} \geq \varepsilon_1.$

故 $|(u_{m_0+1} + v_{m_0+1}) + (u_{m_0+2} + v_{m_0+2}) + \cdots + (u_{m_0+p_0} + v_{m_0+p_0})|$
 $= (u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}) + (v_{m_0+1} + v_{m_0+2} + \cdots + v_{m_0+p_0})$
 $\geq \varepsilon_0,$

即 $\sum (u_n + v_n)$ 必发散.

4. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数

$$\sum (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a.$$

证 由已知条件知, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

从而

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a_1 - a.$$

5. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

(1) 级数 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}.$

证 (1) 因为 $S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty,$$

故 $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}},$$

即

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{b_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_1},$$

故级数 $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$ 收敛于 $\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4, 5 题的结果求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}.$$

解 (1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n} \right),$$

而数列 $\left\{ \frac{1}{a+n-1} \right\}$ 收敛于 0, 故由第 4 题的结论, 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a+1-1} - 0 = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(-1)^n}{n} - \left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) \right],$$

而数列 $\left\{ -\frac{(-1)^n}{n} \right\}$ 收敛于 0, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)} = -\frac{(-1)^1}{1} - 0 = 1.$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} \right],$$

而数列 $\left\{ \frac{1}{n^2+1} \right\}$ 收敛于 0, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} = \frac{1}{1^2+1} - 0 = \frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum \frac{\sin 2^n}{2^n}; \quad (2) \sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1};$$

$$(3) \sum \frac{(-1)^n}{n}; \quad (4) \sum \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}.$$

解 (1) 由于 $|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}|$

$$= \left| \frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}} + \frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}} \right|$$

$$< \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+p}} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+p}} < \frac{1}{2^m},$$

因此,对任意的 $\epsilon > 0$. 取

$$m = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon} \right],$$

使得当 $m > N$ 及对 $\forall p \in \mathbb{N}_+$, 由上式就有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon \text{ 成立,}$$

故由柯西准则可推出 $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, 故取 $\epsilon_0 = \frac{1}{4}$. 对任一 $N \in \mathbb{N}_+$, 总存在 $m_0 > 0$ 和 $p_0 = 1$, 有

$$|u_{m_0+1}| = \frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1} > \frac{1}{4} = \epsilon_0,$$

由柯西准则可知 $\sum \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散.

(3) 由于数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 单调减, 故

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p}|$$

$$= \left| \frac{1}{m_0+1} - \frac{1}{m_0+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{m_0+p} \right|$$

$$< \frac{1}{m_0+1} < \frac{1}{m_0},$$

因此, $\forall \epsilon > 0$, 取

$$N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1,$$

当 $m_0 > N$ 及 $p \in \mathbb{N}_+$ 时, 都有

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p}| < \epsilon \text{ 成立.}$$