經典

经典教材辅导用书

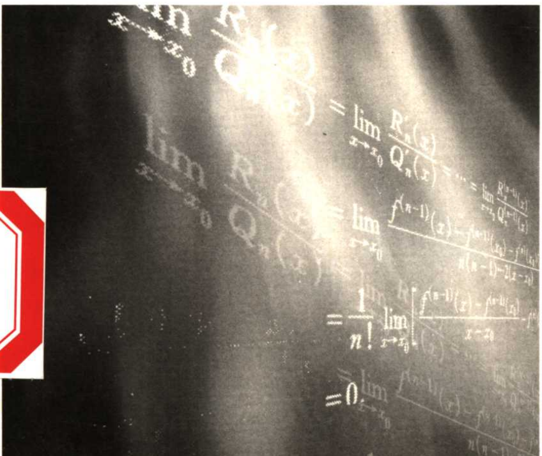
数学系列

数学分析习题详解(下)

高教版·《数学分析·下册》(第三版)

(华东师范大学数学系编)

林　益　邵　琨　罗德斌　俞小清　编



华中科技大学出版社

http://press.hust.edu.cn

经典教材辅导用书·数学系列丛书

数学分析习题详解(下)

高教版·《数学分析·下册》(第三版)
(华东师范大学数学系编)

林　益　邵　琨
罗德斌　俞小清　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题详解(下)/林益　邵琨　罗德斌　俞小清　编
武汉:华中科技大学出版社,2005 年 9 月
ISBN 7-5609-3489-7

Ⅰ.数…
Ⅱ.①林…　②邵…　③罗…　④俞…
Ⅲ.数学分析-习题
Ⅳ.O17

数学分析习题详解(下)　林益　邵琨　罗德斌　俞小清　编

责任编辑:周芬娜　　封面设计:潘　群
责任校对:刘　飞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:13.25　字数:318 000
版次:2005 年 9 月第 1 版　印次:2005 年 9 月第 1 次印刷　定价:18.80 元
ISBN 7-5609-3489-7/O・367

内 容 介 绍

本书是对华东师范大学数学系所编写的、高等教育出版社出版的《数学分析》(第三版)下册全部习题的详解. 为便于学生学习，在每章的习题解答之前，增加了知识要点部分，此部分不是对该章主要内容的罗列，而是帮助学生从更高的观点上来理解该章的主要内容，分析理论作用，指出各概念、各定理的相互关联等，并指导解题方法，提示注意事项等. 习题详解部分则周密、细致、规范，富有启发性，注意解题方法及技巧的运用，能给学生起到举一反三的作用. 本书可供学生学习数学分析课程参考.

前　言

数学分析是数学系学生一门极其重要的基础课．它集中反映了数学科学的学科特点，并对学生进行了最基本、最必要的基础训练，是学生今后学习数学、攀登数学高峰的重要落脚点．它在本科数学学习中占有特殊的地位，因此加强数学分析课程的教学是必需的．

对于刚入学的数学系一年级学生而言，学习数学分析课程都有“难”的感觉．这是由数学的学科特点所决定的．因为数学的思维方法、理论体系与平常人的日常习惯是大相径庭的，一开始难以适应．学习上最突出的矛盾反映在“解题”这个环节上．众所周知，要学好数学就要动手解题(而且要有足够多的题量)，但是要学会解题就必须在全面、正确地理解基本概念、基本理论和基本方法的基础上，运用辩证法来分析矛盾或转化矛盾，用逻辑推理来演化或推导等来解决问题．同时数学又是一种语言，要求学生用精确的数学语言表达自己的思路与论证．可见，提高解题能力绝非一日之功，而是需要长时间、坚持不懈地严格训练才能奏效的．而平时学生在这些方面的努力与成果，是通过作业来反映的．教师批改作业时的“√”与“×”还是不能充分反映学生学习的不足，也缺乏足够的视野空间．因此同学们自然希望手头有一本能弥补自己不足的教学参考书，特别是习题解答，以启发自己的思维，寻找自己知识的不足，提高语言表达能力等．

毫无疑义，华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第三版)

是一本优秀的理科教材,目前正被各高等院校广泛地采用.我们应邀编写该教材(上、下册)全部的习题解答,仅供学习参考.

为了学生学习方便,本书完全按照原教材的章、节编写,题号及数学符号与原教材一致.每章内容由两部分组成:一是知识要点,二是习题详解. 知识要点不是对该章主要内容的罗列,而是从更高的观点上来理解该章的主要内容,分析理论作用,指导解题方法,提示注意事项等. 习题详解则周密、细致、规范,富有启发性.

当然,习题解答是一把双刃剑,使用得当将受益,使用不当将受害.只有在独立完成习题的基础上对照阅读解答,或者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答,然后掩卷再独立完成,这样才能提高自身的数学素养,达到更好地学习数学分析课程的目的.

希望读者正确使用本书,并对本书的不足予以指正.

编　者

2005 年 7 月

目　　录

第十二章　数 项 级 数

知识要点

1. 数项级数是无数多个数“相加”，只有收敛时其“和”才有意义. 而数的加法满足的交换律和结合律对级数而言则未必成立. 只有绝对收敛的级数才可以任意改变级数项的次序，其收敛性不变，和也不变. 而一般收敛的级数则可任意加括号，加括号后的新级数收敛性不变，和也不变. 对于加括号有个常用的性质：加括号后的级数发散，则原级数发散.

2. 级数收敛与其部分数列收敛等价，故级数收敛问题，常转化为数列收敛的问题予以讨论.

3. 判断正项级数敛散性，通常有以下方法.

(1) 利用级数通项 a_n 判敛.

i) 若 $a_n \not\to 0(n\to\infty)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

ii) 达朗贝尔判别法、柯西判别法、拉贝判别法.

iii) 等价量判别法：若 $a_n \sim \dfrac{1}{n^p}$ $(n\to\infty)$，则 $p>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；$p\leqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

估计 a_n 的阶数时常使用泰勒公式 $\left(x_0=0, x=\dfrac{1}{n}\right)$.

(2) 与已知收敛性的级数作比较的比较原则.

寻找比较级数时注意：若证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，应设法将 a_n 放大为 b_n，使得 $0\leqslant a_n$

$\leqslant b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;若证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,应设法将 a_n 缩小为 c_n,使得 $0\leqslant c_n\leqslant a_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

(3) 柯西积分判别法.

(4) 柯西收敛准则、级数收敛定义等.

4. 绝对收敛的级数必收敛;收敛但不绝对收敛的级数称为条件收敛的级数.

5. 一般项级数判敛方法.

(1) 若 $a_n \not\to 0\ (n\to\infty)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 对交错级数应用莱布尼茨判别法.

(3) 应用达朗贝尔判别法或柯西判别法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的收敛性,若判得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛;若判得 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(4) 将级数通项表成两项的乘积时,可考虑阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

(5) 柯西收敛准则或级数收敛定义.

注意:证明条件收敛时必须同时证明两点,一是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,二是 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.

6. 绝对收敛的级数与条件收敛的级数在性质上有很大差别:绝对收敛的级数可重排,重排后的级数仍然绝对收敛且和不变,而条件收敛的级数重排后会改变其收敛性或和.

两绝对收敛的级数还可以相乘,所得新级数绝对收敛且和为这两级数和的乘积(柯西定理).

习题详解

§1　级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性，并求其和数：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$；

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$；

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解　(1) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right),$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{5}$，故级数收敛且其和为$\dfrac{1}{5}$.

(2) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\times 3^n},$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{2}$，故级数收敛且其和为$\dfrac{3}{2}$.

(3) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{4}$.

(4) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)$$
$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$,故级数收敛且其和为$1-\sqrt{2}$.

(5) $$S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$
$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\ (n\geqslant 2),$$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$,故级数收敛且其和为3.

2. 证明:若级数$\sum u_n$发散,$c\neq 0$,则$\sum cu_n$也发散.

证 因为级数$\sum u_n$发散.即$\exists\varepsilon_0>0$,对任何$N\in\mathbf{N}_+$,总有
$$m_0\in\mathbf{N}_+\quad 和\quad p_0\in\mathbf{N}_+,$$
使
$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0.$$
所以
$$|cu_{m_0+1}+cu_{m_0+2}+\cdots+cu_{m_0+p_0}|=|c|\,|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|$$
$$\geqslant|c|\varepsilon_0,$$

于是$\sum cu_n$亦发散.

3. 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散,试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗?又若u_n与$v_n(n=1,2,\cdots)$都是非负数,则能得出什么结论?

解 若$\sum u_n$,$\sum v_n$都发散,则$\sum(u_n+v_n)$不一定发散.

例如,$\sum 1$和$\sum(-1)$是发散的,但$\sum(1+(-1))$是收敛的;

$\sum 1$ 和 $\sum 2$ 是发散的，$\sum(1+2)=\sum 3$ 亦是发散的.

若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散且 $u_n\geqslant 0, v_n\geqslant 0$，则 $\sum(u_n+v_n)$ 发散. 由柯西收敛准则，知 $\exists\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$，对任何的 $N\in\mathrm{N}_+$，总存在 $m_0,p_0,m_1\in\mathrm{N}_+$，使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|=u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}\geqslant\varepsilon_0,$$

和
$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|=v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}\geqslant\varepsilon_1.$$

故
$$\begin{aligned}&|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{m_0+p_0}+v_{m_0+p_0})|\\=&(u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0})+(v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots+v_{m_0+p_0})\\\geqslant&\varepsilon_0,\end{aligned}$$

即 $\sum(u_n+v_n)$ 必发散.

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数

$$\sum(a_n-a_{n+1})=a_1-a.$$

证　由已知条件知，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

故
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1},$$

从而
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a.$$

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，级数 $\sum\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

证　(1) 因为
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1,$$
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty,$$

故 $\sum(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 当 $b_n\neq 0$ 时，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}},$$

即
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1},$$

故级数 $\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$ 收敛于 $\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第4,5题的结果求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

解 (1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right),$$

而数列 $\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$ 收敛于0,故由第4题的结论,可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}\quad(a\neq 0).$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right],$$

而数列 $\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛于0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)^1}{1}-0=1.$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right],$$

而数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 收敛于0,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{1^2+1}-0=\frac{1}{2}.$$

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\frac{\sin 2^n}{2^n}$; (2) $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$;

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$；　　(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

解　(1) 由于 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|$

$$=\left|\frac{\sin2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$$

$$<\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}=\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^{m+p}}<\frac{1}{2^m},$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$. 取

$$m=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

使得当 $m>N$ 及对 $\forall\ p\in\mathbf{N}_+$，由上式就有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon\text{ 成立},$$

故由柯西准则可推出 $\sum\frac{\sin2^n}{2^n}$ 收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，故取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. 对任一 $N\in\mathbf{N}_+$，总存在 $m_0>0$ 和 $p_0=1$，有

$$|u_{m_0+1}|=\frac{(m_0+1)^2}{2(m_0+1)^2+1}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

由柯西准则可知 $\sum\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$ 发散.

(3) 由于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调减，故

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|$$

$$=\left|\frac{1}{m_0+1}-\frac{1}{m_0+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m_0+p}\right|$$

$$<\frac{1}{m_0+1}<\frac{1}{m_0},$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取

$$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

当 $m_0>N$ 及 $p\in\mathbf{N}_+$ 时，都有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p}|<\varepsilon\text{ 成立}.$$