

淘宝在线

与普通高中现行教材配套

导学精练

学科主编 / 陈子俊
本册主编 / 谢加海

湖北省

28

所名校联袂推出

数学

DAOXUE
JINGLIAN

高二

(下)



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

DAOXUE
JINGLIAN

与普通高中现行教材配套

导学精练

数 学

高 二

(下)

本册主编/谢加海

副主编/冯 刚 肖述友

编 委/(以姓氏笔画为序)

文昌明 冯 刚 李家才 李 兵

刘荣显 肖述友 肖小权 张 强

吴祥成 邹振斌 胡 煜 郭 松

谢加海 潘大勇



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

导学精练·数学·高二·下/学科主编:陈子俊;本册主编:谢加海. —武汉:武汉大学出版社,2006.12

ISBN 7-307-05321-7

I. 导… II. ①陈… ②谢… III. 数学课—高中—习题 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 135417 号

责任编辑:李汉保

版式设计:杜 枚

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北日报报业集团楚天印务公司

开本:880×1230 1/16 印张:8.75 字数:367 千字

版次:2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-05321-7/G·905 定价:18.80 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

出 版 前 言

“惟楚有才，于斯为盛”，历年来，湖北省高考成绩始终为全国“鹤冠”。

自湖北省高考自主命题改革开始，武汉大学出版社按照全日制普通高中教学大纲和考试大纲要求，组织了湖北省28所重点高中近200名特、高级教师编写了《导学精练》高中同步系列与高考总复习系列丛书。该丛书覆盖了高中各学习阶段与各复习进程的各个科目，栏目新颖、版式美观、体例科学、目标清晰、讲解透彻、题量适中、解题灵活，真正体现了名师“导学”、学生“精练”的理念。《导学精练》将揭示高考高升学率的奥秘。

《导学精练》高中同步系列设如下栏目：

新课导学——把本章（或单元）的内容提纲挈领地串起来。即名师认为的“串珍珠”。

目标导航——简明扼要地列出学习本节（或框）的内容后应达到的目标。即名师认为的“指方向”。

知识梳理——把本节（或框）的全部知识概括性地总结复习。即名师认为的“放电影”。

名师点拨——对本节（或框）中的重点、难点、疑点，由老师给出启发性的阐释。即名师认为的“捉虱子”。

典例解析——针对本节（或框）中的学习内容，选择典型例子或经典考题进行解答与分析，起到举一反三的作用。即名师认为的“示范工程”。

同步精练——按基础、综合、拓展的层次，精选适量的练习题提供给学生解答，达到巩固所学知识、拓展学生思维的目的。即名师认为的“深耕细作”。

本章（单元）知识回顾——对本章（或单元）的知识点进行归纳，形成知识结构图或表格描述。即名师认为的“神经网络”。

本章（单元）检测题——精心设计了一套全面反映本章（或单元）所学内容的综合试题，检查测试学生学习的效果，以达到进一步提升的目的。即名师认为的“好钢是炼出来的”。

另外，书中还编写了期中测试题、期末测试题各一套。全书的所有练习题、检测题与测试题，在书后都给出了详尽的解答。

《导学精练》面向中等以上成绩的学生使用。

在本丛书即将付梓之时，我们感谢省教育厅、省教育考试院专家的指导，感谢各地市教研院、各县教研室领导的支持，感谢华师一附中、武汉外国语学校、水果湖高级中学、武钢三中、武汉市第二中学、武汉市第六中学、武昌实验中学、黄陂第一中学、黄冈中学、荆州中学、沙市三中、潜江中学、孝感市高级中学、鄂南高级中学、襄樊市第四中学、仙桃中学、荆门市第一中学、天门中学、监利一中、洪湖市第一中学、公安县第一中学、江陵县第一中学、松滋县第一中学、石首市第一中学、赤壁市一中、黄石市二中、宜昌市一中、随州市一中等28所重点中学编写老师的辛勤劳动，我们也感谢武汉鸣凤文化传播有限公司全体员工的大力协助。他们的鼎力支持，使这套丛书具有了权威性、前瞻性、科学性、实用性、新颖性与互动性。我们衷心期望《导学精练》使所有学生的成绩更上一层楼，在高考中实现心中的理想。

本丛书虽经老师多次修改、出版社三审三校一通读一质检，但肯定仍会有疏漏之处，我们诚恳地希望各位老师和同学谅解。也希望各位老师和同学能发现问题，指出编校错误，我们将竭尽全力使《导学精练》充实、完善、提高。

我们与您同行，共同承袭湖北高考的传奇！

《导学精练》编委会

2006年8月20日

读者反馈·有奖征集

亲爱的读者，感谢您对《导学精练》丛书的关心和厚爱，您的支持，是对武汉大学出版社全体员工的莫大鼓励！在这里我们热诚欢迎您提出宝贵意见，您的批评和建议，将为我们的工作提供很大的帮助！感谢您花时间认真填写下面的内容，并寄回给我们。您将有机会获得我们赠送的精美礼品。

您的个人资料

姓名：_____ 性别：_____ 联系电话：_____

年龄：_____ 职业：☐ 教师 ☐ 学生

通信地址：_____ 邮编：_____

您购买的产品名称是_____

1.您通过什么渠道了解到我们的产品？

☐ 老师推荐 ☐ 同学推荐 ☐ 网站 ☐ 偶然看到

2.您从何处购买到我们的产品？

☐ 书店购买 ☐ 学校购买 ☐ 别人送的 ☐ 邮购 ☐ 其他途径

3.您对本书的总体评价：

☐ 很好 ☐ 好 ☐ 一般 ☐ 差

4.您对我们产品的定价满意吗？

☐ 太贵 ☐ 可以接受 ☐ 无所谓 ☐ 您认为适合的价格：_____

5.您今年预计购买几本教辅（参）：

☐ 3~5本 ☐ 5~10本 ☐ 10~20本 ☐ 20本以上

6.您认为本书的错误率：

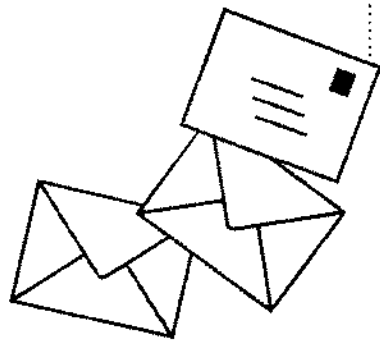
知识性错误率：☐ 高 ☐ 中 ☐ 低 编校错误率：☐ 高 ☐ 中 ☐ 低

7.您认为本书的平面设计：

封面设计：☐ 优 ☐ 良 ☐ 差 版式设计：☐ 优 ☐ 良 ☐ 差

8.本书是否符合您的学习（教学）习惯：

☐ 符合 ☐ 勉强 ☐ 不符



请在右栏例举3本
您喜爱的教辅(参)

您发现的本书错误:

您对本书的意见或建议:



430072

湖北省武汉市武昌珞珈山
武汉大学出版社基础教育图书事业部

目 录

**第九章 直线、平面、简单几何体** (1)

9.1 平面的基本性质	(1)
9.2 空间的平行直线与异面直线	(9)
9.3 直线和平面平行与平面和平面平行	(15)
9.4 直线和平面垂直	(20)
9.5 空间向量及其运算	(30)
9.6 空间向量的坐标运算	(42)
9.7 直线和平面所成的角与二面角	(47)
9.8 距离	(57)
9.9 棱柱与棱锥	(65)
9.10 球	(75)
本章知识回顾	(81)
本章检测题	(85)

第十章 排列、组合和二项式定理 (87)

10.1 分类计数原理与分步计数原理	(87)
10.2 排列	(89)
10.3 组合	(95)
10.4 二项式定理	(101)
本章知识回顾	(106)
本章检测题	(107)

第十一章 概率	109
11.1 随机事件的概率	109
11.2 互斥事件有一个发生的概率	115
11.3 相互独立事件同时发生的概率	118
本章知识回顾	123
本章检测题	123
期中测试题	125
期末测试题(一)	127
期末测试题(二)	129
参考答案	132



第九章



直线、平面、简单几何体



新课导学

本章是在学习平面几何和平面向量的基础上,进一步研究空间图形的位置和数量关系,空间向量知识.研究对象分为两大部分,一是空间直线和平面,着重研究直线与直线、直线与平面、平面与平面之间的平行与垂直关系;二是简单几何体,着重研究棱柱、棱锥、球的概念与性质等.

本章学习中要注意平面图形的性质与空间图形的性质之间的联系和区别.本章我们将把平面几何中学过的垂直、平行、勾股定理等性质推广到空间并转化为向量表示式.学习时,首先要复习平面图形和平面向量的性质,然后再思考如何把平面图形和平面向量的性质推广到空间.几何研究的一种重要思路是代数化.本章我们将重点学习空间向量,把空间图形的性质代数化,用运算推理来学习几何.要把学习的重点放在用向量代数方法解决几何问题上.要注意培养自己利用向量的代数运算进行推理的能力.

9.1 平面的基本性质

第一课时 平面及基本性质



目标导航

1. 理解平面的概念,掌握平面的画法及表示方法;
2. 掌握平面的三个基本性质,会利用三个基本性质论证一些问题;
3. 初步建立空间概念,养成良好的作图习惯和空间思维习惯.



知识梳理

1. 平面的概念

如同集合等数学中的一些原始概念一样,平面也是一个只描述不定义的基本概念.从一些具体实例中,我们可以认识到“平面”是绝对平坦,没有厚度,没有边界,无限延展的一个理想的几何图形.

2. 有关的符号与意义

(1) 平面的符号表示:平面通常用一个希腊字母 α, β, γ 等来表示,也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 α 、平面 AC 等;

(2) 平面的图形表示:通常用平行四边形来表示平面,当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把遮住部分的线段画成虚线或不画.

(3) 符号语言与数学语言的关系(见下表)

数学符号表示	数学语言表达
$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 在直线 a 外
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$a \subset \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a, b 相交于点 A
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α, β 相交于直线 a

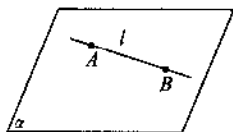
3. 三个公理

(1) 公理 1

文字语言叙述:

如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有点都在这个平面内.

图形语言表述:



符号语言表述: $A \in l, B \in l, A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow l \subset \alpha$.

(2) 公理 2

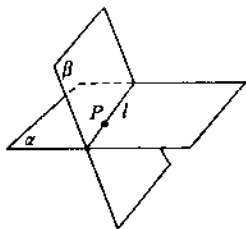
文字语言叙述:

若两平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有公共点的集合是一条过公共点的直线.

若平面 α 和 β 有一条公共直线 l ,就说平面 α 和 β 相交. l 叫做交线,记做 $\alpha \cap \beta = l$.



图形语言表述:

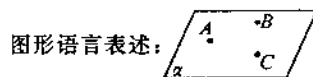


符号语言表述: $P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow P \in l$.

(3)公理 3

文字语言叙述:

经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面.



图形语言表述:

符号语言表述: A, B, C 三点不共线 $\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$.



名师点拨

1. 课本给平面下了定义吗?

点拨 没有. 平面是原始概念, 不能用更基本的概念来定义它. 点、直线都是不定义的原始概念. 平面具有如下特征: ①平面是绝对的. ②平面没有厚度. ③平面没有边界、无限延展着的.

2. 公理 1 阐述了平面的什么性质?

点拨 通过直线的“直”和“无限延伸性”的特性, 揭示了平面的“平”和“无限延伸”的特征, 它是判定直线在平面内的依据.

3. 公理 2 的作用是什么?

点拨 ①判断两个平面相交. 不重合的两个平面, 只要有一个公共点, 那么它们就相交于过这点的一条直线.

②证明点在直线上. 先证(或作出)该直线是某两个平面的交线, 再证这些点是这两个平面的公共点.

③证三线共点. 先证明两条直线交于一点, 再利用公理 2, 证明这个交点在第三条直线上.

④画两个平面的交线. 因为两个平面的所有公共点都在交线上, 所以只须找到两个公共点, 即可画出交线.

4. 怎样理解公理 3?

点拨 公理 3 是确定平面及判断两个平面重合的依据, 是证点、线共面的依据, 也是作截面、辅助平面的依据. “有且只有一个”包含两层意思: “有”说明图形是存在的; “只有一个”说明图形是惟一的.



典例解析

题型一 平面的概念

【例 1】下列命题:

- ①一个平面的面积为 10cm^2 ;
- ②平面是无面积、无厚度、无大小的;
- ③平静的水面是一个平面;

④平面的形状是正方形;

⑤3 张纸比 1 张纸厚, 3 个平面也比 1 个平面厚.

其中正确命题的个数是()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析 平面是一个理想化的概念, 平面是无限延伸的, 没有大小和面积, 没有厚薄、没有质量和物理化学性质. 包括了日常所见的“平面”的本质特征, 但不能把立体几何中的平面与生活中的“平面”混为一谈. 为此只有 ② 正确, 其他的几种叙述都不妥.

答案 B

题型二 平面基本性质的应用

【例 2】判断下列各命题是否正确. (若正确则在括号内打“√”号, 若不正确则在括号内打“×”号)

- (1) 三点确定一个平面. ()
- (2) 经过同一点的三条直线确定一个平面. ()
- (3) 设 A 表示点, a 表示直线, α 表示平面, 若 $A \in a, A \in \alpha$, 则 $a \subset \alpha$. ()
- (4) 平面 α 和平面 β 有不在同一直线上的三个公共点 A, B, C . ()
- (5) 两两相交的三条直线不共面. ()

分析 确定一个平面是指“有且只有一个平面”.

解析 (1) 画“×”号, 虽然口头语中经常有“三点确定一个平面”, 但根据公理 3, 只有不共线的三点才能确定一个平面. 若三点共线, 则经过这三点有无数个平面.

(2) 画“×”号, 经过一点的两条直线确定一个平面, 但经过一点的任意三条直线则不一定确定一个平面.

(3) 画“×”号, 根据已知条件, 直线 a 上只有一个点在平面 α 内, 而根据公理 1, 直线 a 上必须有两个点在平面 α 内, 直线 a 才能在平面 α 内, 故该命题错误.

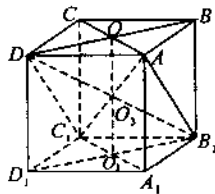
(4) 画“×”号, 根据公理 2, 平面 α 与平面 β 的公共点一定在同一直线上.

(5) 画“×”号, 两两相交的三条直线, 若不共点, 则必共面, 但若共点, 则不一定共面.

点评 “确定一个平面”是立体几何中的专用语言, 它等价于“有且只有一个平面”, 不能用“决定一个平面”等不规范的语言来表示.

【例 3】如右图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 判断下列命题是否正确, 并请说明理由.

- (1) 直线 AC_1 在平面 CC_1B_1B 内;
- (2) 设正方形 $ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别为 O, O_1 , 则平面 AA_1C_1C 与平面 BB_1D_1D 的交线为 OO_1 ;
- (3) 由点 A, O, C 可以确定一个平面;
- (4) 由 A, C_1, B_1 确定的平面是 ADC_1B_1 ;
- (5) 若直线 l 是平面 AC 内的直线, 直线 m 是平面 D_1C 上的直线, 若 l 与 m 相交, 则交点一定在直线 CD 上;





(6)由 A, C_1, B_1 确定的平面与由 A, C_1, D 确定的平面是同一平面.

解析 (1)错误. 若 $AC_1 \subset$ 平面 CC_1B_1B , 又 $BC \subset$ 平面 CC_1B_1B , 故 $ABC \subset$ 平面 CC_1B_1B , 与 $ABC \subset$ 平面 CC_1B_1D 矛盾.

(2)正确. O, O_1 是两平面的两个公共点.

(3)错误. 因为 A, O, C 共线.

(4)正确. A, C_1, B_1 不共线, 故确定平面 α , 又 AB_1C_1D 为平行四边形, AC_1, B_1D 相交于 O_1 点, 而 $O_1 \in \alpha, B_1 \in \alpha$, 故 $B_1O_1 \subset \alpha$ 而 $D \in B_1O_1$, 故 $DC \subset \alpha$.

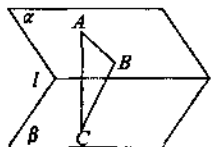
(5)正确. 若 l 与 m 相交, 则交点是两平面的公共点, 而直线 CD 为两平面的交线, 所以交点一定在直线 CD 上.

(6)正确. 同(4).

点评 本题的目的是强化对公理条件的理解, 强化对公理的认识.

题型三 点、直线、平面的关系

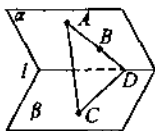
【例4】 用符号语言及文字语言描述下图, 并画出平面 ABC 和平面 α 及 β 的交线.



解析 要画出两个平面的交线, 根据公理1和公理2, 只要找出它们的两个公共点. 显然平面 ABC 和 α 已有两个公共点 A, B , 延长 AB 交 l 于 $D, D \in$ 平面 β , 即为平面 ABC 与平面 β 的第二个交点.

解析 如右图, $\alpha \cap \beta = l, A \in \alpha, B \in \alpha, AB \not\subset l, C \in \beta, A, B, C$ 均不在 l 上.

作法: 连结 AB , 并延长交 l 于 D , 连结 AC, CD , 则平面 ABC 与平面 α, β 的交线 AD, DC 即为所求, 如右图所示.



点评 本题给出了画两个平面交线的一般方法, 即找出它们的两个公共点, 转化为找同一平面内两条直线的交点.



同步精练

1. 判断下列命题的真假

- (1) 可画一个平面, 使它的长为 4cm , 宽为 2cm ; ()
- (2) 一条直线把它所在的平面分成两部分, 一个平面把空间分成两部分; ()
- (3) 一个平面的面积为 36cm^2 ; ()
- (4) 平面是矩形或者是平行四边形形状的. ()

2. 已知命题“直线 l 上两点 A, B 在平面 α 内”, 那么与此命题不等价的命题是().

- A. 直线 l 在平面 α 内
- B. 平面 α 通过直线 l
- C. 直线 l 上只有这两个点在 α 内
- D. 直线 l 上所有点都在 α 内

3. A, B, C 为空间三点, 经过这三点().

- A. 能确定1个平面
- B. 能确定无数个平面
- C. 能确定1个或无数个平面
- D. 不能确定平面

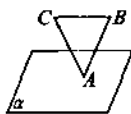
4. 以下4个命题中正确的是().

- A. 两个平面的交线可能是一条线段
- B. 如果平面 α 与平面 β 相交, 那么只有有限个公共点
- C. 两个相交平面有不在同一条直线上的3个公共点
- D. 如果两个平面有3个不共线的公共点, 那么这两个平面就重合为一个平面

5. 不在平面内的一条直线和这个平面最多有_____个公共点.

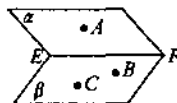
6. 3个两两相交的平面可将空间分为_____部分.

7. 如图所示, “平面 α 与平面 ABC 只有一个公共点”, 此结论错误的原因是_____.

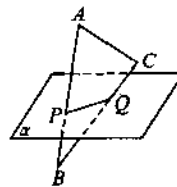


8. 如图所示, 已知平面 α 与平面 β 相交于 EF ,

点 A 在平面 α 上, 点 B, C 在平面 β 上, BC 与 EF 相交, 画出平面 ABC 分别与 α 和 β 的交线.



9. 如图所示, 已知 $\triangle ABC$ 和平面 α , AB 与平面 α 相交于点 P , BC 与平面 α 相交于点 Q , 如何画出直线 AC 与平面 α 的交点, 说明理由.





续表

公理或推论	内 容	图 形	符 号
推论 2	经过两条相交直线,有且只有一个平面.		$a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.
推论 3	经过两条平行直线,有且只有一个平面.		$a \parallel b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$.



名师点拨

1. “有且只有”的命题怎样证明?

点拨 (1)“有”表示存在,“只有”表示“惟一”;“且”表示联立命题,所以此类问题的证明既要证明“存在性”又要证明“惟一性”.

(2)“存在性”的证明一般由公理或推论作出题设要求的要素即可.

(3)证明“惟一性”通常采用“反证法”,即从题目的结论入手,假设结论的反面成立,然后进行推理、论证,推出与条件或定义、定理、公理相矛盾的结论,说明结论反面是不成立的,从而肯定了命题的结论是成立的.为什么可以用反证法去证明呢?这是因为原命题与逆否命题等价.当我们来证原命题比较困难时,就证明它的逆否命题.如:一条直线过平面内一点与平面外一点,它和这个平面有几个公共点?为什么?

2. 三个推论的作用是什么?

点拨 与公理 3 一样,三个推论的主要作用是确定平面,在具体使用时,一定要准确把握使用的大前提,强调推论 1 中的“外”字、推论 2 中的“相交”条件与推论 3 中的“平行”条件.同时注意这里的“确定平面”是一种常用表述形式,一般是“有且只有一个”的代名词,具体的确定条件应该是公理 3 和公理 3 的三个推论中的相应条件.

3. 证明多点共线、多线共点、多线共面等方法技巧有哪些?

点拨 类比初中平面几何学习中证明多点共线、多线共点问题的方法,结合立体几何图形的特点与空间新学习到的公理和推论,证明多点共线、多线共点、多线共面等问题的基本方法手段分别是:

(1)多点共线——证明诸点分别是两个平面内的点,也即证明所有的点都在某两个平面的交线上;

(2)多线共点——找到其中某两条直线的交点后,证明该交点也在别的直线上;

(3)多线共面——证明两条直线共面后,证明其余各条直线都在这个平面内.



典例解析

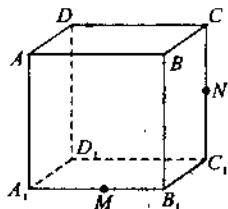
题型一 利用平面的性质证明直线共面

【例 1】 求证:两两相交且不过同一点的四条直线必在同一个平面内.

10. 如右图,正方体的棱长为 4cm, M 、 N 分别是 A_1B_1 和 CC_1 的中点.

(1)画出过点 D 、 M 、 N 的平面与平面 BB_1C_1C 及平面 AA_1B_1B 的两条交线;

(2)设过点 D 、 M 、 N 三点的平面与 B_1C_1 交于 P ,求 $PM+PN$ 的值.



第二课时 平面的确定



目标导航

1. 理解并掌握平面基本性质的三个推论,明确三个公理与三个推论之间的相互联系;

2. 掌握立体几何中共点、共线、共面问题的证明方法和技巧.



知识梳理

确定平面的条件(见下表)

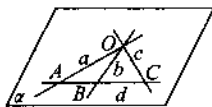
公理或推论	内 容	图 形	符 号
公理 3	经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面.		A, B, C 三点不共线 $\Rightarrow$ 存在惟一平面 α , 使 $A, B, C \in \alpha$.
推论 1	经过一条直线和直线外一点,有且只有一个平面.		$A \notin l \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α , 使 $A \in \alpha$ 且 $l \subset \alpha$.



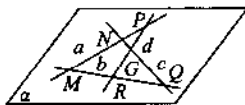
一平面内.

分析 四条直线两两相交且不共点,可能有两种情况:一是有三条直线共点,二是任何三条直线都不共点,故要分两种情况证明.

证明 (1)如图,设直线 a, b, c 相交于点 O ,直线 d 和 a, b, c 分别交于 A, B, C 三点,直线 d 和点 O 确定平面 α ,由 $O \in$ 平面 $\alpha, A \in$ 平面 $\alpha, O \in$ 直线 $a, A \in$ 直线 a ,知直线 $a \subset$ 平面 α .同理 $b \subset$ 平面 $\alpha, c \subset$ 平面 α .故直线 a, b, c, d 共面于 α .



(2)如图,设直线 a, b, c, d 两两相交,且任何三条不共点,交点分别是 M, N, P, Q, R, G ,由直线 $a \cap b = M$,知直线 a 和 b 确定平面 α ,由 $a \cap c = N, b \cap c = Q$,知点 N, Q 都在平面 α 内,故 $c \subset \alpha$.同理可证 $d \subset \alpha$.所以直线 a, b, c, d 共面于 α .

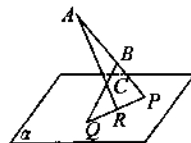


由(1),(2)可知,两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

点评 可先确定一个平面(或两相交直线,或两平行直线或直线与直线外一点),然后证明所有直线在该平面内.

题型二 利用平面的基本性质证明点共线,线共点

【例2】 如图,已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外, $AB \cap \alpha = P, AC \cap \alpha = R, BC \cap \alpha = Q$,求证: P, Q, R 三点共线.



分析 只需证明 P, Q, R 均为平面 α 与平面 ABC 的公共点.

证明 由 $AB \cap \alpha = P, AB \subset$ 平面 ABC ,知 $P \in$ 平面 $ABC, P \in \alpha$,故 P 在平面 ABC 与 α 的交线上.同理可证 Q, R 也在平面 ABC 与 α 的交线上.所以 P, Q, R 三点共线.

点评 证明点共线的主要依据是公理2,即只要证明所有点是两平面的公共点即可.

题型三 确定平面的个数问题

方法 公理3及其三个推论是用来确定平面的,对于确定平面的个数问题,这四个命题可以交替使用.

【例3】 已知: a, b, c, d 是两两平行的四条直线.

试求:由 a, b, c, d 四直线确定平面的个数.

分析 应分三种情况进行讨论:①四线共面;②四线不共面,但四线中存在三线共面;③四线中无三线共面的情况.然后再利用推论3进行求解.

解析 ①当这四条两两平行的直线共面时,仅确定一个平面;

②当这四条两两平行的直线中存在着三线共面,而四条不共面时,不妨设 a, b, c 共面,而 d 分别与 a, b, c 各确定一个平面,再加上 a, b, c 确定的平面,共确定四个平面;

③当这四条两两平行的直线无三线共面时, a 与 b, a 与 c, a 与 d, b 与 c, b 与 d, c 与 d 为六对平行直线,确定六个面.

点评 在求解本例的过程中,易忽视情况②,即易遗漏四线不共面,但四线中有三线共面的情形,造成解题过程不完整,

产生漏解情况.

【例4】 正方体的八个顶点可以确定多少个平面?

分析 正方体的八个顶点中的任意三点均确定一个平面,但是由于正方体结构的特殊性,有些平面是重合的.很显然,正方体任一表面上的四点只能确定一个平面.因此,要获得本例的解,我们应从四点共面的情形入手.

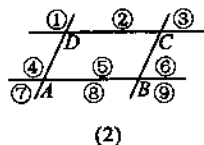
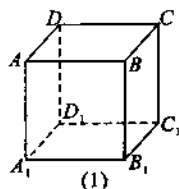
解析 正方体有6个表面;另外,由于它们相对的棱是平行的,故也可确定平面,这样相对的棱共有六对,故又确定6个面(它们就是正方体的6个对角面);正方体的每一个顶点又对应着一个边长为 $\sqrt{2}a$ (a 为正方体棱长)的正三角形所在的平面,这样的平面共有8个.因此,正方体的八个顶点一共可以确定20个平面.

点评 忽视8个正三角形所在平面的情况,从而不能获得正确结论.

【例5】 正方体各个面所在的平面一共将空间分成了多少个相互没有重叠的部分?

分析 本题着重在培养空间想像能力和动手实践能力.

解析 如图,平面 $ABCD$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 将空间分为三层,从图中可以看出,每一层的四个平面又将空间分成了9部分,由此可知正方体各个面所在的平面一共将空间分成了27个相互没有重叠的部分.

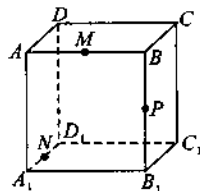


点评 由于平面是无限延展的,因此一个平面可以把空间分成2个部分;两个平面既可以把空间分成3个部分,也可以把空间分成4个部分;三个平面可以把空间分成4个部分,也可以分成6、7、8个部分.

题型四 截面问题

方法 关键是准确找到两面的公共点,注意提高空间想像能力.

【例6】 如下图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为8cm, M, N, P 分别是 AB, A_1D_1, BB_1 的中点.



(1)画出过 M, N, P 三点的平面与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线以及与平面 BB_1C_1C 的交线;

(2)设过 M, N, P 三点的平面与 B_1C_1 交于 Q ,求 PQ 的长.

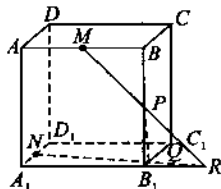
解析 (1)设 M, N, P 三点确定的平面为 α ,则 α 与平面 AB_1 交于 MP .



设 $MP \cap A_1B_1 = R$,

则 RN 是 α 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线.

设 $RN \cap B_1C_1 = Q$, 则 PQ 是 α 与平面 BB_1C_1C 的交线, 如下图.



(2) 因正方体的棱长为 8 cm,

故 $B_1R = BM = 4$ cm.

在 $\triangle RA_1N$ 中, $\frac{B_1Q}{A_1N} = \frac{RB_1}{RA_1}$,

故 $B_1Q = \frac{4}{12} \times 4 = \frac{4}{3}$ (cm).

在 $Rt\triangle PB_1Q$ 中,

因 $PB_1 = 4$ cm, $B_1Q = \frac{4}{3}$ cm,

故 $PQ = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} \sqrt{10}$ (cm).

故所求 PQ 的长为 $\frac{4}{3} \sqrt{10}$ cm.



同步精练

一、选择题

- (2005 · 全国高考卷 II) 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 ()
A. 3 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 7 个
- 两条相交直线 l, m 都在平面 α 内且都不在平面 β 内, 命题甲: l 和 m 中至少有一条与 β 相交; 命题乙: α 与 β 相交, 则甲是乙的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
- 空间四点 A, B, C, D 共面而不共线, 那么这四点中 ()
A. 必有三点共线 B. 必有三点不共线
C. 至少有二点共线 D. 不可能有三点共线
- 对于空间三条直线, 有下列四个条件:
① 三条直线两两相交且不共点;
② 三条直线两两平行;
③ 三条直线共点;
④ 有两条直线平行, 第三条直线和这两条直线都相交.
其中, 使三条直线共面的充分条件有 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 空间三条直线, 如果其中一条直线和其他两条直线都相交, 那么这三条直线能确定的平面个数是 ()
A. 1 个或 3 个 B. 2 个或 3 个
C. 1 个或 2 个或 3 个 D. 1 个或 2 个或 3 个或 4 个

6. 以下四个命题中, 正确命题的个数是 ()

- ① 不共面的四点中, 其中任意三点不共线;
- ② 若点 A, B, C, D 共面, 点 A, B, C, E 共面, 则 A, B, C, D, E 共面;
- ③ 若直线 a, b 共面, 直线 a, c 共面, 则直线 b, c 共面;
- ④ 依次首尾相接的四条线段必共面.

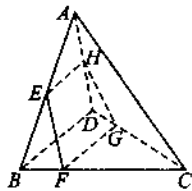
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

7. 两两平行的四条直线共能确定 _____ 个平面.
8. 已知空间一直线及不在该直线上的两个点, 如果连结这两点的直线与已知直线 _____, 则它们在同一平面内.
9. 有下面几个命题:
① 如果一条线段的中点在一个平面内, 那么它的两个端点也在这个平面内;
② 两组对边分别相等的四边形是平行四边形;
③ 两组对边分别平行的四边形是平行四边形;
④ 四边形有三条边在同一平面内, 则第四条边也在这个平面内;
⑤ 点 A 在平面 α 外, 点 A 和平面 α 内的任意一条直线都不共面.
其中正确命题的序号是 _____ (把你认为正确命题的序号都填上).
10. (2006 · 临沂质检) (1) 空间三条直线两两相交, 点 P 不在这三条直线上, 那么由点 P 和这三条直线最多可以确定的平面的个数为 _____.
(2) 三个互不重合的平面, 能把空间分成 n 个部分, 则 n 的所有可能值为 _____.

三、解答题

11. 如图所示, 已知空间四面体 $ABCD$ 中, E, H 分别是边 AB, AD 的中点, F, G 分别是边 BC, CD 上的点, 且 $\frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$.
求证: 三条直线 EF, GH, AC 交于一点.





第三课时 空间图形在平面内的表示方法



目标导航

1. 了解空间图形的直观图的概念;
2. 掌握斜二测画法的规则,并能运用规则画出空间图形在平面内的直观图.



知识梳理

把空间图形在平面内画得既富立体感,又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形,就是直观图.关于直观图的画法规则是:

(1) 在已知图形中取水平平面,取互相垂直的轴 Ox 、 Oy ,再取 Oz 轴,使 $\angle xOz = 90^\circ$ 且 $\angle yOz = 90^\circ$;

(2) 画直观图时,把它们画成对应轴 $O'x'$ 、 $O'y'$ 、 $O'z'$,使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), $\angle x'O'z' = 90^\circ$. $x'O'y'$ 确定的平面表示水平平面;

(3) 已知图形中平行于 Ox 轴、 Oy 轴或 Oz 轴的线段,在直观图中分别画成平行于 $O'x'$ 轴、 $O'y'$ 轴或 $O'z'$ 轴的线段;

(4) 已知图形中平行于 Ox 轴和 Oz 轴的线段,在直观图中保持长度不变;平行于 Oy 轴的线段,长度为原来的一半.

掌握画直观图的关键两步是:首先画水平放置的空间图形的底面图形的直观图;然后,画出侧面并成图.



名师点拨

1. 画水平放置的几何图形的直观图应注意哪几点?

点拨 (1) 要根据图形的特点选取适当的坐标系,这样可以简化作图步骤;

(2) 平行于 Oy 轴的线段画直观图时一定要画成原来长度的一半;

(3) 对于图形中与 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴都不平行的线段,可通过确定端点的办法来解决,即过端点作坐标轴的平行线段,再借助于所作的平行线段确定端点在直观图中的位置.

2. 给出空间图形在平面内的直观图,怎样想象出空间图形的真实图形?

点拨 按斜二测画法的逆过程可以想象出空间图形的真实图形.这类问题在刚学立体几何时困难较大,平时学习时要多观察、多练习、多分析,随着对立体几何认识的不断加深,这个困难自然会克服.

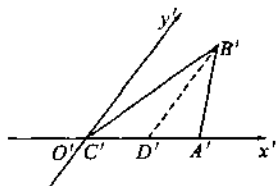
3. 平面图形用直观图表示时注意“三不变两变”即直线的平行关系不变;点的共线性不变;线的共点性不变;但角的大小有变化;有些线段的度量关系也发生变化.



典例解析

题型一 水平放置的平面图形的直观图画法

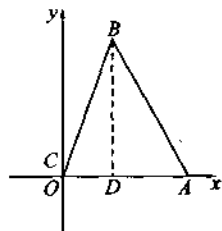
【例1】如图所示, $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的斜二测直观图,将其恢复成原图形.



解析 (1) 画直角坐标系 xOy , 在 Ox 轴上取 $OA = O'A'$, 即 $CA = C'A'$;

(2) 过 B' 作 $B'D' \parallel y'$ 轴, 交 x' 轴于 D' , 在 Ox 轴上取 $OD = O'D'$, 过 D 作 $DB \parallel Oy$ 轴, 并使 $DB = 2D'B'$;

(3) 连结 AB 、 BC , 则 $\triangle ABC$ 即为 $\triangle A'B'C'$ 原来的图形, 如图所示.



点拨 将直观图变为原图形, 其方法步骤与画直观图的方法相反即逆向思维.

题型二 空间图形的直观图画法

【例2】画一个长为 4cm, 宽为 2cm, 高为 3cm 的长方体直观图.

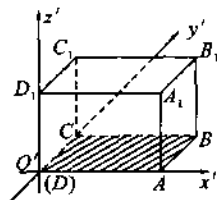
解析 (1) 画出一个空间坐标系 $z'-x'O'y'$

使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$, $\angle x'O'z' = 90^\circ$, $\angle y'O'z' = 45^\circ$.

(2) 在 $O'x'$ 轴上取线段 $O'A = 4\text{cm}$, 在 $O'y'$ 轴上取 $O'C = 1\text{cm}$, 过点 C 作 $O'x'$ 轴的平行线, 过点 A 作 $O'y'$ 轴平行线交于一点 B , 则 $ABCO$ 为底面的直观图.

(3) 过点 A 、 B 、 C 分别作 Oz' 轴的平行线, 并且截取 $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 3\text{cm}$.

(4) 连结 A_1B_1 、 B_1C_1 、 C_1D_1 、 A_1D_1 , 则长方体 AC_1 即为所求.



点拨 长方体属于直棱柱, 其画法

应该稍后才会用到, 但是正方体和长方体是最常见的空间几何图形, 任何几何关系都需要借助它们来进行说明, 在第一章的学习过程中每每遇到, 所以我们要重点掌握.

题型三 面积问题

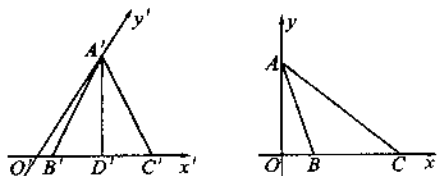
【例3】已知 $\triangle ABC$ 的平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 是边长为 a 的正三角形, 那么原三角形 ABC 的面积为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ D. $\sqrt{6}a^2$

分析 考查斜二测画法. 要合理地建立坐标系.



解析 如图,找到三角形 ABC 的高是关键.



$$\triangle A'B'C' \text{ 的高 } A'D' = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

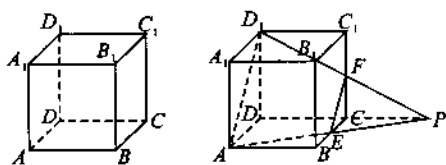
$$\text{故 } O'A' = \sqrt{2}A'D' = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

$$\text{故 } OA = 2O'A' = \sqrt{6}a.$$

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OA = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2. \text{ 故选 C.}$$

点拨 本题应明确原图形与直观图的线段长度关系(横不变,纵减半).

【例4】 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC 棱上的中点,试画出过 A, E, D_1 的截面.



分析 按照平面的基本性质确定截面与正方体各相关表面相交的交线,即在各相交面上找出或作出两个交点,其连线就是截面的边线.

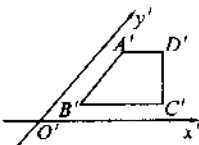
解析 连结 AE , 并延长交 DC 延长线于 P , 连结 D_1P 交 C_1C 于 F , 连结 EF 及 AD_1 , 则四边形 $AEFD_1$ 就是所求作的截面.

点评 本题考查平面基本性质的知识和应用能力以及空间想像能力.



同步精练

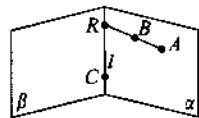
- 下列关于直观图画法的说法不正确的是()
 - 原图形中平行于 y 轴的线段,其对应线段平行于 y' 轴,长度不变
 - 原图形中平行于 x 轴的线段,其对应线段平行于 x' 轴,长度不变
 - 画与直角坐标系 xOy 对应的 $x'O'y'$ 时, $\angle x'O'y'$ 可以画为 135°
 - 在画直观图时,由于选轴的不同所画直观图可能不同
- 如图,已知 $A'B' \parallel O'y'$, $A'D' \parallel B'C' \parallel O'x'$, 那么直观图所示的平面图形是()
 - 任意四边形
 - 直角梯形
 - 任意梯形
 - 等腰梯形
- 水平放置的角的直观图是()
 - 一个角
 - 一条线段



C. 一条射线

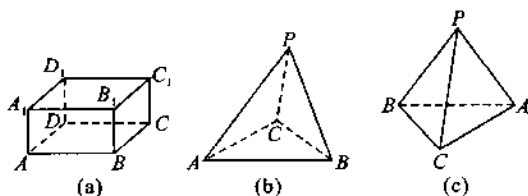
D. 一条直线

4. 平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$, 点 $A \in \alpha$, 点 $B \in \alpha$, 点 $C \in \beta$, 且 $C \in l$, 又 $AB \cap l = R$, 如图过 A, B, C 三点确定的平面为 γ , 则 $\beta \cap \gamma$ 是()



- 直线 AC
- 直线 BC
- 直线 CR
- 以上均错

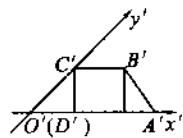
5. 如图,下面有 4 个与图形相关的命题.



- 图(a)中有三条虚线,被遮挡的面有三个;
 - 图(b)中有三条虚线,被遮挡的面有三个;
 - 图(c)中有一条虚线,被遮挡的面有一个;
 - 图(a)中长方体的底面 $ABCD$ 与图(b)中三棱锥的底面 ABC 所在的平面均可以表示为平面 AC .
- 其中,正确命题的个数是()

- 1 个
- 2 个
- 3 个
- 4 个

6. 一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 45° , 腰和上边长均为 1 的等腰梯形, 则这个平面图形的面积是()



- $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
- $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $1+\sqrt{2}$
- $2+\sqrt{2}$

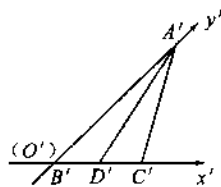
7. 用一个平面截一个正方体得到的多边形, 其中边数最多的是()

- 四边形
- 五边形
- 六边形
- 七边形

8. 用斜二测画法作出一个三角形的直观图, 其直观图的面积是原三角形面积的()

- $\frac{1}{2}$
- 2
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$

9. 如图所示, $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图, 则在 $\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中, 最长的线段是()



- AB
- AD
- BC
- AC