上册

名师讲高中代数

高一年级用

特级教师
杨象富编著

名师讲
高中代数

中国青年出版社

名师讲

高中代数

（上册）

杨象富（特级教师）

中国青年出版社

（京）新登字 083 号

责任编辑：赵惠宗
封面设计：吕敬人　张　朋

图书在版编目（CIP）数据

名师讲高中代数　上册/杨象富编.—北京：中国青年出版社，1997.11

ISBN 7　5006　2731　9

Ⅰ.名…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.代数课 高中 教学参考资料
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 23437 号

中国青年出版社出版发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
北京颐航印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　12.125 印张　280 千字
1998 年 1 月北京第 1 版　1998 年 1 月北京第 1 次印刷
印数 1　6000 册　定价 11.20 元
ISBN 7　5006　2731　9/G·761

主要作者简介

杨象富，浙江省宁海县人，1934年出生，1952年起即在浙江省宁海中学（省一级重点中学）任教，连续40余年。历任数学组长、教导主任、教学副校长，曾当选为镇、县、省（第五、六届）人民代表。1981年批准为特级教师，1989年授予中国数学奥林匹克高级教练，在90年代，曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题。

作者已在海峡两岸发表教研论文60余篇，多篇获省、市一等奖，已出版的著作有《数学综合题的解法发现》（江苏）、《名师帮你学数学》（中国青年出版社）、《中国中学生数学解题方法大全》（上海远东出版社）、《巧妙的换元法》（教育科学出版社）等20余种。《高一数学伴读》等即将由台湾九章出版社出版。代表作《杨象富数学教学经验》（浙江教育出版社出版），受到中学数学教育界的好评，苏步青教授为该书题词："春华秋实，杨象富数学经验"，教育家林迪生题词："献身教育，育人为乐；业精于勤，成果丰硕。"

作者边教边学，自学成材，曾应邀到复旦大学、杭州大学、浙江教育学院、绍兴文理学院、杭州高级中学，以及西安、天津、宁波、温州、舟山、丽水等地讲学百余场。

作者18岁从教，45年来桃李满园。90年的高一学生吴伟标，荣获全国青少年数学论文一等奖，保送入复旦大学数学系后，3年修完本科和硕士课程，先后推荐到南开大学和美国密歇安大学攻读博士学位。出国前夕，96岁高龄的苏步青教授亲切接见并题赠"努力前程，预祝成功。"

前　言

“数学是科学的皇后和仆人”，“花有重开时，人无再青春”，说的是数学的重要，青春的可贵。那么，能够帮助高中学生以较少的精力，把数学学得更好些吗？——本书就是作者以四、五十年的心力，慎重写成的部分答卷。

数学素质的核心是数学思维的素质。根据我俩的长期实践和研究，为了提高数学思维的水平，必须抓住三个要素：

第一、熟练掌握数学思维的载体（数学语言与数学知识）；

第二、领会数学思维的导航器（数学思维方法）。

第三、强化情感、心理因素的教育。

在上述思想指导下，本书力图体现下列特色：

（一）重视“三基”（基础知识，基本技能，基本的思想方法）；

（二）突出重点，抓住关键，化解难点；

（三）注重应用性与探索性，培养兴趣，培养能力；

（四）例题丰富多彩，习题精选精编，A组、B组相对会考、高考要求。

著名数学家苏步青曾针对中学生的数学学习，写过明确中肯的题词：“学习数学，要多做习题，边做边思索，先知其然，而后弄清其所以然。实事求是，循序前进，不怕艰难，持之以恒。”我们相信，每一位真正按苏老指示认真学习本书的读者，都会使自己有明显的提高。

陈振宣　杨象富

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第一节　集　合

由康托尔(Cantor,1845－1918,德国)创立的集合论,是整个现代数学的基础之一.

在高中代数第一章第一大节学习集合的初步知识,主要为了掌握集合的语言.这种语言较之普通语言能更准确、简练、清晰地表达数学知识和逻辑联系,有利于加深对知识的理解和数学思维能力的提高.

本节内容有三段:集合及其表示方法,元素与集合的关系(属于、不属于);集合与集合的关系(包含、相等),子集、空集概念;集合的运算(交、并、补),交集、并集、补集概念.

本节概念多,符号多,要注重辨析概念之间的差异和联系.为了更好地掌握集合语言,应注意集合语言三种不同表达方式(普通语言、符号语言、图象语言即韦恩图)的互译训练.

【范例】

例1　(1)0与$\{0\}$,(2)0与$\varnothing$,(3)$\varnothing$与$\{0\}$,(4)$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$,(5)$\{(a,b)\}$与$\{(b,a)\}$各是什么关系?用适当的符号表示出来.

分析　首先要分清是"元素与集合"的关系,还是"集合与集合"的关系;是后者又要辨别两集合的元素是否相同.

解　(1)$\{0\}$是含单元素0的集合,0与$\{0\}$的关系是"属于与否"的关系,所以$0\in\{0\}$.

(2)空集$\varnothing$不含任何元素,所以$0\notin\varnothing$.

(3)$\varnothing$与$\{0\}$都是集合,两者的关系是"包含与否"的关系.空集是任何非空集合的真子集,所以$\varnothing\subset\{0\}$.

(4)$\{0,1\}$是含两个元素0与1的集合,而$\{(0,1)\}$是以"有序数组"为元素的单元素(0,1)的集合,所以$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$不相等,即$\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$.

(5)当$a=b$时,$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$;当$a\neq b$时,$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

说明 空集$\varnothing$是有许多特殊性质的重要集合,值得重视.(5)中的$a=b$是可能的特殊关系,不可不考虑到.

例2 (选择题,全国高考试题)

(1)(1995年文科)已知全集$I=\{0,-1,-2,-3,-4\}$,集合$M=\{0,-1,-2\}$,$N=\{0,-3,-4\}$,则$\overline{M}\cap N=$(　　).

(A)$\{0\}$　　(B)$\{-3,-4\}$

(C)$\{-1,-2\}$　　(D)$\varnothing$

(2)(1995年理科)已知I为全集,集合$M,N\subset I$,若$M\cap N=N$,则(　　).

(A)$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　(B)$M\subseteq\overline{N}$

(C)$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　(D)$M\supseteq\overline{N}$

(3)(1996年文科)设全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合$A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{3,5\}$,则(　　).

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$

(C)$I=A\cup\overline{B}$　　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

(4)(1996年理科)已知全集$I=N$,集合$A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$,$B=\{x\mid x=4n,n\in N\}$,则(　　).

(A)$I=A\cup B$　　(B)$I=\overline{A}\cup B$

(C) $I=A\cup\bar{B}$　　　　　　(D) $I=\bar{A}\cup\bar{B}$

解　(1)由已知，$\bar{M}=\{-3,-4\}$，$\bar{M}\cap N=\{-3,-4\}$，故选(B)．

(2)满足 $M\cap N=N$ 的情况有两种可能：

$$M\supset N \text{ 或 } M=N.$$

如果 $M\supset N$，则有 $\bar{M}\subset\bar{N}$；

如果 $M=N$，则有 $\bar{M}=\bar{N}$．

故 $\bar{M}\subseteq\bar{N}$，应选(C)．

(3)由已知，$\bar{B}=\{1,2,4,6,7\}$，所以

$A\cup\bar{B}=\{1,3,5,7\}\cup\{1,2,4,6,7\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}=I$，故选(C)．

(4) I 是自然数集，A 是正的偶数集，B 是由 4 的正整数倍组成的集合，由此可知

$\bar{B}=\{x\mid x=4n+1 \text{ 或 } x=4n+2 \text{ 或 } x=4n+3, n\in N\}$．

而 $A=\{x\mid x=4n \text{ 或 } x=4n+2, n\in N\}$，

$\therefore\quad A\cup\bar{B}=\{x\mid x=4n \text{ 或 } x=4n+1 \text{ 或 } x=4n+2 \text{ 或 } x=4n+3, n\in N\}$

故选(C)．

例 3　(选择题)已知集合

$M=\{x\mid y^2=x+1\}$，$P=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}$，

那么 $M\cap P=(\quad)$．

(A) $\left\{(x,y)\mid x=\frac{5}{3}, y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

(B) $\{x\mid -1<x<3\}$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$　　(D) $\{x\mid x\leqslant 3\}$

解一　由 M：　$x=y^2-1\geqslant -1$，即 $M=\{x\mid x\geqslant -1\}$．

$P: x=-\frac{1}{2}y^2+3\leqslant 3$，即 $P=\{x\mid x\leqslant 3\}$.

$\therefore\quad M\cap P=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，应选(C).

解二 用逐步淘汰错误结论的办法.

注意到 $M\cap P$ 的元素是 x，而不是 (x,y)，可否定(A). 比较(B)与(C)的差异，取 $x=-1$：

$\because\quad -1\in M, -1\in P,\quad \therefore\quad -1\in(M\cap P)$，

于是又可否定(B). 再由比较(C)与(D)的差别而取 $x=-2$，因为 $-2\notin M$，淘汰(D)，故选(C).

说明 解二是"淘汰法"，即抓住选择支之间的差异，取特殊值或通过举反例而排除假支，去伪存真. 这对解选择题常很有效.

关键 在解有关集合的问题时，对元素的识别是个关键. 对例3，如果审题漫不经心，一看到求两个集合交集，就不假思索地解方程组，于是掉进陷阱(A)内. 其实集合 $M\cap P$ 的元素根本不是 (x,y)，而是 x.

例4 设集合 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，求实数 a,b.

分析 根据集合中元素的"三性"(确定性，互异性，无序性)，为求出 a、b，只需列出关于 a、b 的两个方程.

解 由 $A=B$，可得

$$\begin{cases}1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\\ 1+a+b=a+a^2+ab.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}ab(a^3-1)=0, & ①\\ (a-1)(a+b+1)=0. & ②\end{cases}$$

因为集合中的元素互异，所以 $a\neq 0, a\neq 1$. 于是由①得 $b=0$，再从②得 $a=-1$.

$\therefore \quad a=-1, \quad b=0.$

说明 如果解$\begin{cases}1=a^2,\\ b=ab,\end{cases}$ 或$\begin{cases}1=ab,\\ b=a^2.\end{cases}$
并舍去增解，仍得 $a=-1, b=0$.

关键 解例4的关键是要有方程(组)的思想.刘徽在注释我国的数学经典《九章算术》(成书在一世纪)的“方程”章时写明：“二物者再程，三物者三程，皆如物数程之”，意思是要求出几个未知数就须列出几个等式.这种方程组的概念，在全世界是最早的.

例5 向50名学生调查对 A、B 两事件的态度，赞成 A 的人数是全体的五分之三，其余的不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多3人，其余的不赞成.另外，对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多1人.问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生，各有多少人？

分析 这里的数量关系比较错综复杂，采用韦恩图可加强直观性.

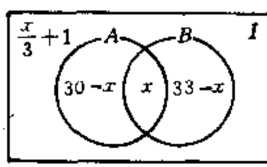


图 1-1

解 赞成 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，赞成 B 的人数为 $30+3=33$.

如图1-1，记50名学生组成的集合为 I，赞成事件 A 的学生全体为集合 A，赞成事件 B 的学生全体为集合 B.设对 A、B 都赞成的学生人数为 x，则由题意知对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$.于是可得方程：$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$.

解得　$x=21,\frac{x}{3}+1=8$.

所以,对 A、B 都赞成的学生有 21 人,对 A、B 都不赞成的学生有 8 人.

关键　"画出韦恩图!"这是解本题的关键.韦恩图可以帮助我们直观地理解某些概念和关系,也有利于记忆和思考问题.培养自己使用韦恩图的能力和习惯,对当前和今后的学习,都会有所裨益.

例 6　用图表示下列各集合之间的关系:

(1)R, Q^+(正有理数集), Z, N, $\{0\}$;

(2)$A=\{$四边形$\}$, $B=\{$平行四边形$\}$, $C=\{$菱形$\}$, $D=\{$矩形$\}$, $E=\{$正方形$\}$, $F=\{$梯形$\}$.

解

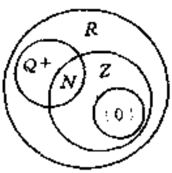


图 1-2(1)

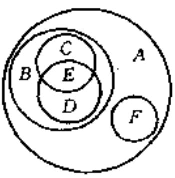


图 1-2(2)

说明　韦恩图非常清晰地表示出有关概念的相互关系.这里特别要注意:

$\{$平行四边形$\}\cap\{$梯形$\}=\varnothing$.

例 7　设 A、B 为任意两集合,证明如下的德·摩根(De morgan)定律:

(1)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;　　　(2)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分析　为证集合 $M=N$,需证 $M\subseteq N$ 且 $N\subseteq M$.

证明　(1)先证 $x\in\overline{A\cup B}\ \Rightarrow\ x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

若　$x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$.

$\therefore\quad x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$;

再证 $\quad x\in\overline{A}\cap\overline{B}\ \Rightarrow\ x\in\overline{A\cup B}$

若 $\quad x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,

即 $\quad x\notin A$ 且 $x\notin B$, $\quad\therefore\quad x\notin A\cup B$,

$\therefore\quad x\in\overline{A\cup B}$.

综合以上两方面,可知 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

以上证明可以简捷地表述如下:

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=\{x\mid x\in I,x\notin A\cup B\}\\&=\{x\mid x\in I,x\notin A \text{ 且 } x\notin B\}\\&=\{x\mid x\in\overline{A},\text{且 } x\in\overline{B}\}\\&=\overline{A}\cap\overline{B}.\end{aligned}$$

(2)以 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 分别代替(1)中的 A、B,并注意到 $\overline{(\overline{A})}=A$,可得

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{(\overline{A})}\cap\overline{(\overline{B})}=A\cap B.$$

两边同取补集,即得 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,所以 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

说明 (1)本题给出了证明集合运算等式的基本方法.有兴趣的读者可证明如下的集合运算的分配律:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

(2)德·摩根定律中的 A、B 具有任意性,因此若用图形验证定律,要考察以下的五种情况(如图 1-3):

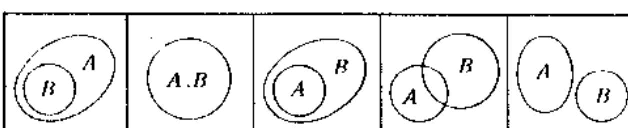


图 1-3

例 8 已知全集 I,集合 A 和 B,求 $\overline{A}\cap B$:

(1) $I=\{$实数对 $(x,y)\}$, $A=\{(x,y)\mid \frac{y-4}{x-2}=3\}$, $B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$;

(2) $I=R$, $A=\{a\mid$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 有实根$\}$,

$B=\{a\mid$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根$\}$.

分析 首先要准确地理解集合 A, $\overline{A}$ 及 B,然后把求 $\overline{A}\cap B$ 转化为其它数学问题.

解 (1) $A=\{(x,y)\mid \frac{y-4}{x-2}=3\}$

$=\{(x,y)\mid y=3x-2$, 但 $x\neq 2\}$,

$\therefore$ $\overline{A}\cap B=\{(x,y)\mid x=2,y=4\}=\{(2,4)\}$.

(2) $A=\{a\mid 1-4a\geqslant 0\}=\{a\mid a\leqslant \frac{1}{4}\}$,

$\therefore$ $\overline{A}=\{a\mid a>\frac{1}{4}\}$.

而 $B=\{a\mid a^2-4\geqslant 0\}=\{a\mid a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2\}$,

$\therefore$ $\overline{A}\cap B=\{a\mid a\geqslant 2\}$.

说明 集合是一种语言,是其它数学问题的载体,解这类题首先要准确理解每一集合,然后把它转化为其它数学问题.

例 9 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$,若 $A\cup B=A$,求由 a 的值组成的集合.

解 $\because A\cup B=A$, $\therefore B\subseteq A$. 而 $A=\{1,2\}$,因此 B 可为 $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ 或 $\varnothing$.

当 $B=\{1,2\}=A$ 时,显然有 $a=3$.

当 $B=\{1\}$, $\{2\}$ 或 $B=\varnothing$ 时,即要求二次方程 $x^2-ax+2=0$ 有等根或无实根,所以 $\Delta\leqslant 0$,就是 $a^2-8\leqslant 0$,解得 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$. 但 $\Delta=0$,即 $a=\pm 2\sqrt{2}$ 时,得到 $B=\{-\sqrt{2}\}$

或$\{\sqrt{2}\}$,不满足 $B\subseteq A$.故所求由 a 的值组成的集合为$\{3\}\cup\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$.

说明 解答本题时常见的错误是遗漏掉 $B=\varnothing$ 亦即 $A\cup\varnothing=A$ 的情况,因此只能得到$\{3\}$.

空集有许多特殊的性质,如:$\varnothing\cup A=A$, $\varnothing\cap A=\varnothing$, $\varnothing\subseteq A$, $\varnothing=\overline{A}\cap A$, $\varnothing\subseteq A\cap B$, $\varnothing=\overline{I}$, $\overline{\varnothing}=I$ 等,在解题时宜特别留心.在进行集合的运算时,空集是必不可少的,其作用可以与数值计算中数 0 的作用类比,非常值得重视.

【练习题一】

A 组

1.填空题

(1)下列各种对象的全体,可以构成集合的是________.

①某班身高超过 1.55 米的女学生.

②某校比较聪明的男学生.

③本书中的难题.

④无解的方程的解.

⑤既是质数又是偶数的数.

⑥非常靠近原点的点.

⑦使$|x-1|$最小的 x 的值.

⑧使$|x-1|$很小的 x 的值.

(2)集合$\{(x,y)\mid x+y=5, x\in N, y\in N\}$用列举法表示为________________.

(3)方程 $x^2-\sqrt{1-2x}=4-\sqrt{1-2x}$的解集为________.

(4)已知全集 $I=\{x\mid x=-n, n\in N\}$, $A=\{x\mid x=-2n, n\in N\}$,则$\overline{A}=$____________.

(5)集合$\{(-2,3),(3,-2)\}$的所有子集为__________.

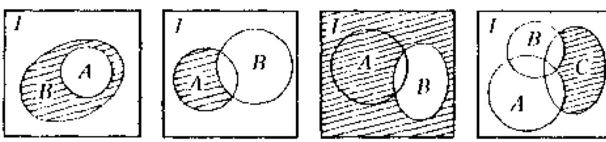
(6)设全集 $I=R$, $M=\{x \mid x^2-x\neq 0\}$, $P=\{x \mid x^2-2x+1=0\}$,那么$\overline{M\cup P}=$__________.

(7)设计三个集合 A、B、C,使 $A\cup B\cup C=\{$三角形$\}$,且 $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing$:__________.

(8)图 1-4 的四个图中的阴影部分,用集合的符号表示为:

图①__________,图②__________,

图③__________,图④__________.



① ② ③ ④

图 1-4

2. 选择题

(1)如果 $X=\{x \mid -2<x<2\}$,那么(　　).

(A)$0\subseteq X$　　(B)$-\sqrt{\pi}\notin X$

(C)$\varnothing\in X$　　(D)$\{0\}\subseteq X$

(2)若两个非空集合 P、Q 满足 $P\cap Q=P$, $P\cup Q=P$,则 P 与 Q 之间的关系是(　　).

(A)$P\subseteq Q$　　(B)$P\supseteq Q$

(C)$P=Q$　　(D)不能确定的

(3)与命题"如果 $a\in M$,那么 $b\notin M$"等价的命题是(　　).

(A)$a\in M$ 或 $b\in M$