高职高专教材

# 实用微积分

Shiyong Weijifen

刘 艳 罗星海 主 编

汪学敏 副主编

人民交通出版社

China Communications Press

高职高专教材

# 实用微积分

刘 艳 罗星海 主 编
汪学敏 副主编

人民交通出版社
China Communications Press

## 内 容 提 要

本书是根据高职院校教学改革的需要，结合高职学生的特点编写的，适合高职院校高等数学少课时教学用.

本书共八章，内容为：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、多元函数微积分、无穷级数，每章附有复习题和练习题，以及答案与提示.

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显、例题较多、便于自学，适合高职类各专业教学和参考用.

**图书在版编目（CIP）数据**

实用微积分 / 刘艳等主编 . —北京：人民交通出版社，2005.8

ISBN 7-114-05550-1

Ⅰ. 实… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 微积分 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 041892 号

高职高专教材

**书　　名**：**实用微积分**

**著 作 者**：刘　艳　罗星海

**责任编辑**：刘敏嘉

**出版发行**：人民交通出版社

**地　　址**：（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

**网　　址**：http：//www.ccpress.com.cn

**销售电话**：（010）85285838，85285995

**总 经 销**：北京中交盛世书刊有限公司

**经　　销**：各地新华书店

**印　　刷**：北京宝莲鸿图科技有限公司

**开　　本**：787×1092　1/16

**印　　张**：14.25

**字　　数**：352 千

**版　　次**：2005 年 7 月 第 1 版

**印　　次**：2005 年 7 月 第 1 版 第 1 次印刷

**书　　号**：ISBN7-114-05550-1

**印　　数**：0001－4000 册

**定　　价**：24.00 元

# 前 言

*Qianyan*

目前,“以服务为宗旨,以就业为导向”已成为高等职业技术学院的办学指导思想,“以人为本、因材施教、按需择教”是高职教学的主导方向,各高职院校都在进行学制改革试点和分层教学探索.在这种背景下,我们组织湖北交通职业技术学院数学教研室具有中高级职称的教师编写了这本《实用微积分》,作为新学制下我院的试用高等数学教材.

本书考虑到高职学院数学教学的特点,以服务专业应用为主,力争做到浅显易懂,深入浅出.讲述侧重基本概念、基本计算及其应用.引进概念追求自然,讲述概念力求清楚并尽量给出几何解释,加强几何直观.本书配有较多的例题,旨在通过例题讲述解题的基本方法和技巧,培养学生应用数学工具解决实际问题的能力;增加专业应用特色,对理论推导点到为止,重在应用,适当照顾数学知识体系,编入部分现有受课时限制不能讲授的内容,供学生进一步提高时参考.

本书考虑到我院具有工科、文科专业的特点,正在进行分层教学探索,所以,练习题的难易程度具有一定梯度,以供不同高职专业学生选用.每章增加了总复习题,希望这些总复习题在检查学生学习效果、复习所学内容方面能发挥作用,对参加专升本的同学有所帮助.

参与本书编写的教师有:刘艳(第五章的一、二、六节)、罗星海(第五章的三、四、五节)、汪学敏(第一章的五、六、七节)、夏守云(第八章)、李金波(第三章的一、二、六节)、佘熙志(第三章的三、四、五、七节)、黄本利(第一章的一、二、三、四节)、潘经文(第六章)、文青(第六章)、熊莉(第七章)、唐艳(第四章).大家利用休息时间认真编写、相互审稿、共同研讨,团结协作完成了本书的编写工作.

本书在编写过程中,得到了学院领导、教务处和各系领导的有力支持和帮助,专业课教师从专业需要出发提出了宝贵意见与建议,特别是王进思副院长亲自参与了编审工作.对此,我们表示衷心的感谢.

限于编者的水平和经验,书中定有不少缺点错误,诚恳地希望读者批评指正.

**编　者**

于湖北交通职业技术学院

二〇〇五年二月三日

# 目 录

*Mulu*

# 第一章 函数与极限

在自然科学、工程技术及某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一．高等数学是研究变量以及变量间依赖关系即函数关系的一门学科，它的主要研究对象是函数．极限方法是高等数学的基础，它从方法论上突出地表现了高等数学不同于初等数学的特点．本章将介绍函数和极限的基本概念，建立极限的运算法则，给出函数连续性的定义及性质．

## 第一节　函数的概念

### 一、函　　数

**1．函数概念**

**定义 1**　设 $D$ 是非空实数集，如果对于 $D$ 中的每一个 $x$，按照某个对应规则 $f$，都有确定的 $y$ 与之对应，则称 $y$ 是定义在 $D$ 上的 $x$ 的函数，记作 $y = f(x)$．$D$ 叫做函数的定义域，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量．

如果 $x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值，则称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 有定义．函数在点 $x_0$ 的对应值叫做函数在该点的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$．当自变量 $x$ 在定义域内取每一个数值时，对应的函数值的全体叫做函数的值域，记作 $W$．

**例 1**　函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域 $D=(-\infty,0)U(0,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，其图形称为等轴双曲线，如图 1-1 所示．

**例 2**　函数 $y=x^3$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$，其图形为立方抛物线，如图 1-2 所示．

通过对函数的定义和以上各例题的分析讨论不难发现，确定一个函数，起决定作用的因素是：

(1)对应规则 $f$(即因变量 $y$ 对于自变量 $x$ 的依存关系)；

(2)定义域 $D$(即自变量 $x$ 的变化范围)．

如果两个函数“对应规则 $f$”和“定义域 $D$”都相同，那么这两个函数就是相同的(或称相等

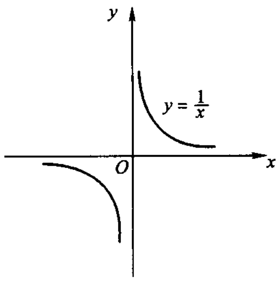


图 1-1

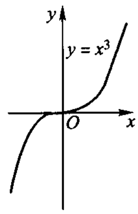


图 1-2

的);否则就是不相同的.

**例 3** 下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1-\cos^2 x, g(x)=\sin x$ .

**解** (1)不相同. $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_g=(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2)不相同. $f(-1)=-1, g(-1)=1$,两个函数的对应规则不同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3)相同.定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,对应规则也相同,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(4)不相同.虽然两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但其对应规则不同, $f(x)$ 的值域是 $W_f=[0,1]$, $g(x)$ 的值域是 $W_g=[-1,1]$.

**2. 函数的表示方法**

函数有 3 种表示方法:

(1)解析法;(2)列表法;(3)图像法.

在实际问题中,上述 3 种方法常结合应用.

**3. 分段函数**

有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应规则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数.

**例 4** 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-3 所示,该函数称为绝对值函数.

**例 5** 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x, x>1 \end{cases}$$

是一个分段函数,它的定义域 $D=[0,+\infty)$.当 $x\in[0,1]$ 时,对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$;

当 $x\in(1,+\infty)$时，对应的函数值 $f(x)=1+x$. 例如$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$. 该函数的图形如图 1-4 所示.

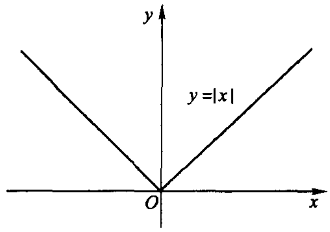


图　1-3

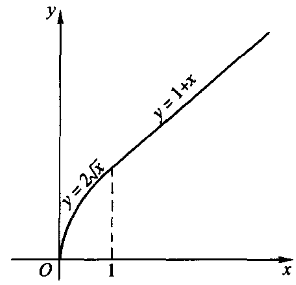


图　1-4

## 二、函数的几种特性

**1. 函数的有界性**

设函数 $y=f(x)$定义在区间 $I$ 上，若存在某一常数 $k$，对一切 $x\in I$，恒有

$$f(x)\leqslant k \qquad (f(x)\geqslant k),$$

则称 $f(x)$在 $I$ 上有上(下)界，数 $k$ 为它的一个上(下)界.

若函数 $f(x)$在 $I$ 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$为 $I$ 上的有界函数.

例如，对任意 $x$，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在整个数轴上是有界的. 而 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界；$y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上有下界而无上界.

**2. 函数的奇偶性**

设函数 $f(x)$的定义域 $I$ 关于原点对称(即若 $x\in I$，则必有 $-x\in I$)，如果对于任意 $x\in I$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 既不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

**3. 函数的单调性**

设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$. 如果对于 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$在区间 $I$ 上单调递增(或单调递减). 单调递增或单调递减函数统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是递增的；$y=x^2$ 在$(-\infty,0)$上是递减的，在$(0,+\infty)$上是递增的，但在整个定义域上不是单调的.

**4. 函数的周期性**

设 $x$ 是函数 $y=f(x)$定义域内任一点，若存在一个不等于零的常数 $k$，使得当 $x+k$ 也属于定义域时，有 $f(x+k)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为周期函数，其中 $k$ 叫做函数 $y=f(x)$的周期. 通常所说的周期是指它的最小正周期. 例如，函数 $y=\sin\omega x(\omega\neq 0)$，$x\in(-\infty,+\infty)$是以 $k=\frac{2\pi}{|\omega|}$为周期的函数.

## 三、反　函　数

在研究两个变量的函数关系时，可以根据问题的需要选定其中一个为自变量，则另一个就是因变量. 例如，函数 $y = ax + b$ 中，$x$ 是自变量，$y$ 是因变量. 如果从这个函数中把 $x$ 解出，得 $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$，则称 $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$ 是 $y = ax + b$ 的反函数. 一般地，设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $D$，值域是 $W$，如果对于 $W$ 中的每一个值 $y$，都可通过关系式 $y = f(x)$ 确定 $D$ 中的惟一的一个值 $x$ 与之对应，就得到了定义在 $W$ 上以 $y$ 为自变量，$x$ 为因变量的函数 $x = \varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上，用 $x$ 表示自变量，用 $y$ 表示因变量，所以，函数 $y = f(x)$ 的反函数可改写为 $y = f^{-1}(x)$.

例如，函数 $y = \sin x$，$y = a^x$ 的反函数分别为 $y = \arcsin x$，$y = \log_a x$. 当函数与其反函数均以 $x$ 为自变量时，反函数的图像与原函数的图像关于直线 $y = x$ 对称.

## 四、初 等 函 数

**1. 基本初等函数**

在中学已经学过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数统称为基本初等函数.

**2. 复合函数**

在实际问题中，经常遇到两个变量之间的联系不是直接的，即因变量不直接依赖于自变量，而是通过另一个变量联系起来.

例如，有质量为 $m$ 的物体，以初速度 $v_0$ 竖直上抛，由物理学知其动能 $E$ 是速度 $v$ 的函数

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

而在不计空气阻力时 $v = v_0 - gt$，$g$ 是重力加速度，因此 $E$ 通过 $v$ 成为 $t$ 的函数

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2$$

它是由函数 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 和 $v = v_0 - gt$ 复合而成的复合函数. 一般地，我们有如下定义.

**定义 2**　设 $y$ 是 $u$ 的函数 $y = f(u)$，定义域为 $U_1$，而 $u$ 又是 $x$ 的函数 $u = \varphi(x)$，值域为 $U_2$，其中 $U_2 \subseteq U_1$，则 $y$ 通过变量 $u$ 成为 $x$ 的函数，这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数，记为

$$y = f[\varphi(x)].$$

其中变量 $u$ 称为中间变量.

形成复合函数的中间变量可以是两个或更多个. 例如，由 $y = \lg u$，$u = \tan v$，$v = x^2 + 5$，经二次复合构成 $x$ 的复合函数 $y = \lg\tan(x^2 + 5)$.

但需注意，并不是任何两个函数都可复合成一个复合函数. 例如 $y = \arccos u$，$u = 2 + x^2$，就不能复合成 $y = \arccos(2 + x^2)$，因为 $u$ 总是大于 1，使 $y = \arccos u$ 没有意义.

我们不仅要学会把若干个简单的函数“复合”成一个复合函数，而且要善于把一个复合函

数“分解”为若干个简单的函数.这种分解方法在后面的微积分运算中经常要用到,应该得到足够的重视.

**例 6**　将下列函数分解为较简单的函数.

$$(1)\ y=\arcsin\left(\ln\frac{x}{10}\right);\qquad (2)\ y=e^{\sin\frac{1}{x}}.$$

**解**　(1)函数 $y=\arcsin\left(\ln\frac{x}{10}\right)$是由下列基本初等函数复合而成的:

$$y=\arcsin u,\ u=\ln v,\ v=\frac{x}{10}.$$

(2)函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$是由下列基本初等函数复合而成的:

$$y=e^{u},\ u=\sin v,\ v=\frac{1}{x}.$$

**3. 初等函数**

**定义 3**　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算所构成的,能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\arcsin\frac{1}{x^2}+5$,$y=\tan t-\sqrt{t}\sin t^2$ 都是初等函数.

今后讨论的函数绝大多数都是初等函数.

**4. 建立函数关系举例**

用数学方法解决实际问题时,首先要建立数学模型,即建立函数关系,为此需明确问题中的因变量与自变量,根据题意建立等式,从而得出函数关系;再根据实际问题的要求,确定函数定义域.

**例 7**　某工厂位于 $A$,与铁路的垂直距离为 $a$(km),它的垂足 $B$ 到火车站 $C$ 的铁路长为 $b$(km),工厂的产品必须经火车站 $C$ 方能转销外地,已知汽车运费是 $m$(元/t·km),火车运费是 $n$(元/t·km)($m>n$).为节省运费,计划在铁路上另修一小站 $M$ 作为转运站,那么运费的多少决定于 $M$ 的地点,试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数,如图 1-5 所示.

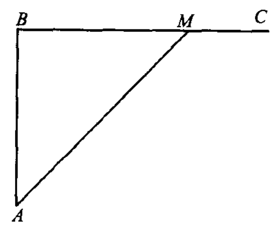

图　1-5

**解**　设 $|BM|=x$,运费为 $y$,根据题意有

$$|AM|=\sqrt{a^2+x^2},\ |MC|=b-x.$$

则
$$y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x),\ x\in[0,b].$$

## 五、双曲函数

工程应用上常遇到的双曲函数是:

双曲正弦

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

双曲余弦
$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

双曲正切 $\qquad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, x\in(-\infty,+\infty).$

这 3 个双曲函数的简单性态如下：

双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称．在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的，当 $x$ 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$；在第三象限内接近于曲线 $y=-\frac{1}{2}e^{-x}$，如图 1-6 所示．

双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是偶函数，它的图形通过点$(0,1)$且关于 $y$ 轴对称．在区间$(-\infty,0)$内它是单调减少的；在区间$(0,+\infty)$内它是单调增加的．$\mathrm{ch}0=1$ 是这函数的最小值．当 $x$ 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$，在第二象限内接近于曲线 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$，如图 1-6 所示．

双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称．在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的，它的图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间；且当 $x$ 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于直线 $y=1$，而在第三象限内接近于直线 $y=-1$，如图 1-7 所示．

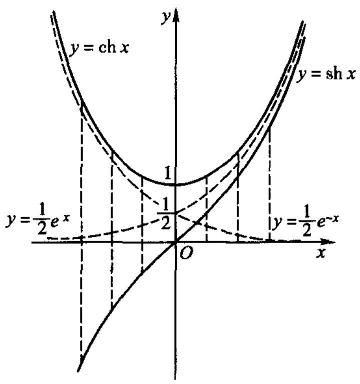


图 1-6

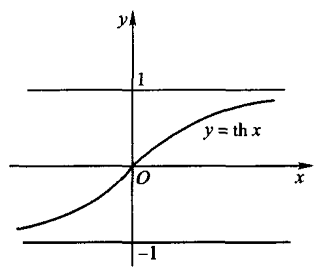


图 1-7

由双曲函数的定义，可证下列 4 个公式：

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y \tag{1-1}$$

$$\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y \tag{1-2}$$

$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \tag{1-3}$$

$$\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y-\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y \tag{1-4}$$

我们来证明公式(1-1)，其他 3 个公式读者可自己证明，由定义得

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\&\quad+\frac{e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\mathrm{sh}(x+y).$$

由以上几个公式可以导出其他一些公式,例如:

在公式(1-4)中令 $x=y$,并注意到 $\mathrm{ch}\,0=1$,得

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1; \tag{1-5}$$

在公式(1-1)中令 $x=y$,得

$$\mathrm{sh}\,2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x; \tag{1-6}$$

在公式(1-3)中令 $x=y$,得

$$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x. \tag{1-7}$$

以上关于双曲函数的公式(1-1)~公式(1-7)与三角函数的有关公式相类似,把它们对比一下可帮助记忆.

## 练习题 1-1

1. 下列各题中,$f(x)$与 $\varphi(x)$是否表示同一个函数,说明理由.

(1)$f(x)=\frac{x}{x}$,$\varphi(x)=1$;　　(2)$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$,$\varphi(x)=x+1$;

(3)$f(x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$,$\varphi(x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

2. 设 $f(x)=1+x^2$,$\varphi(x)=\sin3x$,求 $f(0)$,$f\left(\frac{1}{a}\right)$,$f(t^2-1)$,$f[\varphi(x)]$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant0\\ 2, & x>0\end{cases}$,求 $f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(-1)$,$f(1)$.

4. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$,而且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,试确定 $a$,$b$ 的值.

5. 求下列函数的定义域:

(1)$y=\sqrt{x^2-4x+3}$;　　(2)$y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

(3)$y=\lg\sin x$;　　(4)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}$.

6. 如果 $f(x)=a^x$,证明 $f(x)f(y)=f(x+y)$,$\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

7. 将函数 $y=5-|2x-1|$用分段函数形式表示,并作出函数图形.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1)$y=2^{\tan x}$;　　(2)$y=\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2$;

(3)$y=\arctan(x^2+1)$;　　(4)$y=\ln\sin^2(3x+1)$.

9. 求下列函数的反函数:

(1)$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,$x\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$;　(2)$y=x^2-4x$,$x\in[2,+\infty)$.

10. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{10}$;　　(2)$y=x+\sin x$;

(3) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

11. 判断下列函数单调性：

(1) $y=2x+1$;　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

(3) $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$.

12. 下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos 3x$;　　(2) $y=\sin^2 x$.

13. 用铁皮做一个容积为 $V$ 的圆柱形罐头筒，将它的全面积表示成底半径的函数，并确定此函数的定义域.

14. 证明：

(1) $\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$;　　(2) $\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{sh}\dfrac{x-y}{2}$.

## 第二节　数列的极限

在高等数学中几乎所有的概念都离不开极限，因此极限概念是高等数学中最基本的概念之一，极限方法是研究函数和解决许多问题的基本方法.

数列是定义于正整数集合上的函数，它的极限是一种特殊的函数（即整标函数）的极限.

### 一、数列的极限

数列就是按一定顺序排列起来的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

第 $n$ 项 $x_n$ 称为数列的通项，这个数列可简记 $\{x_n\}$. 例如，

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots \tag{1-8}$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots \tag{1-9}$$

$$0,3, 0.33, 0.333, \cdots, 0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}}, \cdots \tag{1-10}$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots \tag{1-11}$$

$$2, 4, 6, 8\cdots, 2n, \cdots \tag{1-12}$$

都是数列，它们的通项分别为

$$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \frac{n+(-1)^n}{n}, 0.\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}},\ (-1)^{n-1}, 2n.$$

考察数列当 $n$ 变化时，$x_n$ 的变化情况：容易看出，当 $n$ 无限增大（记作 $n\to\infty$）时，不同数列的变化情况是有所不同的，其中有的数列当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 能与某一个常数 $a$ 无限接近，如数列(1-8)，当 $n\to\infty$ 时，$x_n$ 与 0 无限接近；同样，对于数列(1-9)，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 无限接

近 1;数列(1-10),当 $n\to\infty$ 时,$\overbrace{0.33\cdots3}^{n个}$ 无限接近于$\frac{1}{3}$. 而数列(1-11),当 $n\to\infty$ 时,$x_n$ 在 1 与 $-1$ 间摆动;数列(1-12),当 $n\to\infty$ 时 $x_n$ 也不断增大,但不和任何一个常数接近. 数列(1-8)、数列(1-9)、数列(1-10)反映了一类数列的某种共同特性,即对于数列$\{x_n\}$,存在一个常数 $a$,随着 $n$ 的无限增大,$x_n$ 无限地接近于 $a$,这就是说要使 $x_n$ 与 $a$ 的差的绝对值任意地小,只要 $n$ 充分地大便可. 因此,给出数列极限的定义如下:

**定义 1**　若对于预先给定的任意小的正数 $\varepsilon$,总存在一个正整数 $N$,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad (a\text{ 是一个确定常数})$$

成立. 则称 $a$ 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a \qquad (n\to\infty),$$

这时我们说数列是收敛的,否则数列是发散的.

**例 1**　证明数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

的极限是 1.

**证**
$$|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\frac{1}{n},$$

为了使$|x_n-a|$小于任意给定的正数$\varepsilon$,只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \text{ 或 } n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

所以,对于任意给定的正数 $\varepsilon$,取正整数 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,

就有
$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

## 二、收敛数列的性质

**定理 1**　(极限的惟一性) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

**定理 2**　(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

**定理 3**　(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于 $a$,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 $a$.

**定理 4**　单调有界数列一定收敛.

## 练习题 1-2

观察下列数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$;　　　　(2) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$;