云南省中小学教材审定委员会 审定

九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书

代数

云南省教育科学研究院 编

学习指导

（第三册）

云南教育出版社

九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书

代　　数

第三册

云南省教育科学研究院　编
云南省中小学教材审定委员会　审定

云南教育出版社

责任编辑：白杨文　张正平
封面设计：向　炜

书　名　九年义务教育三年制初级中学学习指导丛书·代数（第三册）
编　者　云南省教育科学研究院
审　定　云南省中小学教材审定委员会
出　版　云南教育出版社
　　　　YUNNAN EDUCATION PUBLISHING HOUSE
　　　　（650034）昆明市环城西路609号
　　　　Tel：（0871）4136563
发　行　云南新华书店集团有限公司
印　装　云南国防印刷厂
开　本　787×1092　1/16
印　张　5.5（含答案）
字　数　123000
版　次　2002年6月第3版
印　次　2006年6月第11次印刷
书　号　ISBN 7－5415－1183－8/G·987
定　价　4.90元

说　明

根据国家教育部制定颁布的《义务教育全日制初级中学课程计划》和各学科新的教学大纲并结合新教材的内容要求，我们组织编写了这套《九年义务教育初级中学学习指导丛书》，包括语文、思想政治、英语、历史、地理、数学、物理、化学、生物等，供我省初中学生作为辅助读物选用.

这套丛书的内容紧扣教学大纲和新教材，力求把初中基本知识、基本技能的学习与运用作一些分析、归纳，以便帮助学生提高学习兴趣，运用正确的学习方法，理解和掌握好所学的知识，提高学习效果.

《九年义务教育初级中学学习指导丛书·代数　第三册》内容包括一元二次方程、函数及其图象、统计初步、期末考试模拟试题及参考答案．本书供初三年级学生学习代数用.

为方便使用，各册均附有参考答案（单独装订），专供教师使用.

在使用本书的过程中如发现不妥之处，诚盼来信告知，以便我们修订，使之日臻完善.

云南省教育科学研究院

目　　录

第十二章　一元二次方程 …… 1

一、学习指导 …… 1
二、例题 …… 4
三、习题 …… 15
四、自测题 …… 35
五、阅读材料 …… 39

第十三章　函数及其图象 …… 41

一、学习指导 …… 41
二、例题 …… 44
三、习题 …… 49
四、自测题 …… 55
五、阅读材料 …… 58

第十四章　统计初步 …… 60

一、学习指导 …… 60
二、例题 …… 61
三、习题 …… 63
四、自测题 …… 65
五、阅读材料 …… 66

代数期末考试模拟试题 …… 67

第十二章　一元二次方程

一、学习指导

（一）主要内容

本章的主要内容有：一元二次方程的有关概念及其解法；列方程（组）解应用题；一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系；可化为一元二次方程的分式方程；简单的二元二次方程组的解法.

一元二次方程是中学数学的主要内容之一，在初中代数中占有重要的地位．在学习一元二次方程之前，已学习了实数及代数式的运算、一元一次方程和一元一次方程组．这些内容是学习一元二次方程的基础，通过一元二次方程的学习，可以对这些内容加以巩固和提高、加深理解和掌握．一元二次方程也是今后学习各类方程以及不等式、函数等知识的基础．另外，通过对一元二次方程的学习，在物理、化学等其他学科的应用上，也有重要意义.

（二）重点、难点和关键

本章教材的重点是一元二次方程的解法．教材中介绍了一元二次方程的四种解法——直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法．这四种方法不仅是解一元二次方程的基本方法，而且渗透了“换元”、“配方”、“降次”等重要的数学思想和数学方法．这些内容的学习和掌握在代数中起着非常重要的作用．所以，必须牢固掌握，要学会选择最简捷的方法熟练地解各种方程.

除了整式方程以外，常见的代数方程主要还有分式方程．分式方程中，我们已经学过可化为一元一次方程的分式方程，本章再介绍可化为一元二次方程的分式方程.

本章教材的难点是“配方法”．学习中要理解解题思路，抓住关键步骤，那么，这一难点就容易突破．“配方法”的解题思路是要设法把一元二次方程化为$(x+m)^2=n$的形式，进而可用直接开平方法解一元二次方程．关键步骤是“化二次项系数为1”和“方程两边各加上一次项系数的二分之一的平方”这两步.

分式方程的验根问题较难理解和掌握，同时也是容易被忽略的步骤，这是本章教材的另一个难点．学习中要理解分式方程在去分母转化为整式方程的“转化”过程中，有产生增根的可能，验根是必不可少的步骤，不可忽略.

列方程（组）解应用题是重点，也是历来学习的难点．列方程解应用题是中学数学知识理论联系实际的一个重要方面，也是培养、训练学生分析问题和解决问题能力的主要途径．这一思想一直贯穿在方程知识的学习中．在解决列方程解应用题的学习中，要

善于对不同类型的应用问题进行分类、归纳，不断摸索、总结规律，掌握思考问题、处理问题的一般方法和步骤，这样，这一难点也可逐步突破.

学好本章的关键也是一元二次方程的解法，尤其是公式法. 一元二次方程的解法除本身是学习重点以外，它还是学习一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系，可化为一元二次方程的分式方程，简单的二元二次方程组的解法的基础. 只要能牢固、熟练地掌握一元二次方程的解法，那么对其他有关知识的学习就迎刃而解了.

（三）几个重要概念

1. 一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的整式方程叫做一元二次方程. 其一般形式是：

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

其中 a、b、c 为常数，分别称为二次项系数、一次项系数、常数项. 二次项系数 $a\neq 0$ 这个条件十分重要. 如果 $a=0$，则 $ax^2+bx+c=0$ 就不是一元二次方程了. 另外，在解答含字母系数的一元二次方程的许多问题中，$a\neq 0$ 是不可缺少的条件.

2. 一元二次方程的四种解法

一元二次方程的解法有：直接开平方法、配方法、公式法和因式分解法. 几种解法各有特点和用途，选择哪种方法比较简便，要根据方程的特点而定. 其中，公式法是解一元二次方程的主要方法. 任何一个有实数根的一元二次方程，都可以用公式法解. 但有些方程用直接开平方法或因式分解法比较简便. 解一元二次方程时，一般先考虑直接开平方法，再考虑因式分解法，最后才用公式法. 配方法解一元二次方程比较麻烦，在实际解一元二次方程时，一般不用配方法. 但是，配方法是导出公式法——求根公式的关键，而且配方法是一个重要的数学方法，在今后学习中会常常用到，要很好掌握.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式是：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant 0).$$

3. 一元二次方程根的判别式

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式是：

$$\Delta=b^2-4ac.$$

$\Delta>0\Leftrightarrow$方程有两个不相等的实数根；

$\Delta=0\Leftrightarrow$方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根.

或者 $\Delta\geqslant 0\Leftrightarrow$方程有两个实数根；

$\Delta<0\Leftrightarrow$方程没有实数根.

根的判别式也是比较重要的知识. 应用根的判别式，不解方程就可判别方程根的情况. 用公式法解方程时，一般也可先计算判别式的值，同时，由方程根的情况，可确定一元二次方程中某些字母的取值范围. 另外，根的判别式在以后的函数等知识的学习中也常会用到.

4. 一元二次方程根与系数的关系

若方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根为x_1、x_2，则有

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

以x_1、x_2为两根的一元二次方程是

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

一元二次方程的根与系数的关系是中学数学的重要基础知识，是在处理一元二次方程的问题时常用到的一些思路和方法. 在今后的函数学习中也经常用到，其应用比较广泛. 在学习过程中可逐步加深理解，熟悉、掌握好这方面的知识.

一元二次方程根与系数关系的应用主要掌握以下几方面（这里所说的应用，一般都是指不解方程，直接用根与系数的关系解决问题）：

(1) 已知方程的一根求另一根，并确定方程中的某些未知系数的值.

(2) 求与方程两根有关的某些代数式的值.

(3) 已知某些条件，求作一元二次方程.

(4) 已知两数的和与积，求这两个数.

(5) 确定方程根的符号.

5. 求根公式法分解因式

若方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根为x_1、x_2，则二次三项式

$$ax^2+bx+c\xlongequal{\text{(可分解为)}}a(x-x_1)(x-x_2).$$

这里，将二次项系数a提到括号外面这一点在解题时往往容易被忽略，要特别注意.

6. 可化为一元二次方程的分式方程的解法

可化为一元二次方程的分式方程与可化为一元一次方程的分式方程的解题思路和方法是一致的，即去分母，把分式方程转化为整式方程解. 在转化过程中有可能产生增根，所以一定要验根.

7. 解方程的一般思路

解初中数学中的方程，基本上都是贯彻把不会的问题转化为会的问题，把陌生问题转化为熟悉问题，把复杂问题转化为简单问题这一原则. 具体说，就是把各种类型的方程转化为形如$ax=b$、$ax^2+bx+c=0$的类型.

在整个转化过程中，要注意数学的根据.

8. 简单的二元二次方程组的解法

要求掌握两种类型的方程组的解法.

〈Ⅰ〉由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组.

〈Ⅱ〉由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程组成的方程组.

〈Ⅰ〉型方程组一般用代入法解. 〈Ⅱ〉型方程组通过因式分解转化为两个〈Ⅰ〉型方程组解.

解二元二次方程组的基本思路和方法也是转化. 把“二元”转化为“一元”；“二次”转化为“一次”.

9. 关于解方程（组）的基本思想和方法

解方程、方程组的基本思想和方法就是“降次”、“消元”．“降次”一般用因式分解，如果能通过因式分解把方程化为一边是几个因式的积，一边是零的形式，根据几个因式的乘积等于零，那么其中至少有一个因式为零，就可以把二次或高次方程化为一次或二次方程，达到降次的目的．“消元”一般有代人消元法和加减消元法两种．

10. 关于“换元法”

一个字母不但可以表示一个具体的数，还可以表示一个代数式．反过来，一个代数式有时也可看做一个字母．这种变量代换的思想方法叫做“换元法”．“换元”的思想和方法是重要的数学方法，是解决一些数学问题的技巧，应在学习过程中逐渐深刻领会其思想并灵活运用．

在解方程、方程组时，通过“换元”也可以达到“降次”、“消元”的目的，解题时经常用到．

二、例题

例 1 解下列方程：

（1）$(x-5)^2=3$．

（2）$x^2+x-6=0$．

（3）$x^2-3x-2=0$．

（4）$x^2+2=2\sqrt{2}x$．

（5）$y^2-\sqrt{3}y-\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$．

（6）$x^2-3\sqrt{2}x+2=0$．

（7）$3x^2+4x=8$．

（8）$(2t+1)^2+3(2t+1)+2=0$．

解：（1）因为 $x-5$ 是 3 的平方根，所以

$$x-5=\pm\sqrt{3}.$$

$\therefore\quad x-5=\sqrt{3}$，或 $x-5=-\sqrt{3}$．

$\therefore\quad x_1=5+\sqrt{3}$，$x_2=5-\sqrt{3}$．

（2）原方程可变形为

$$(x+3)(x-2)=0,$$

$x+3=0$，或 $x-2=0$．

$\therefore\quad x_1=-3$，$x_2=2$．

（3）$\because\quad \Delta=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17$，

$$\therefore\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{17}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

（4）原方程可变形为

$$x^2-2\sqrt{2}x+2=0.$$

$\therefore\quad x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2=0$．

$\therefore\quad (x-\sqrt{2})^2=0$，即 $x-\sqrt{2}=0$．

$\therefore\quad x_1=x_2=\sqrt{2}$．

(5) 原方程可变形为

$$y^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})y+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=0,$$
$$(y-\sqrt{3})(y-\sqrt{2})=0,$$
$$y-\sqrt{3}=0,\ 或\ y-\sqrt{2}=0.$$

$\therefore\quad y_1=\sqrt{3},\ y_2=\sqrt{2}.$

(6) $\because\quad \Delta=(-3\sqrt{2})^2-4\times1\times2=10,$

$\therefore\quad x=\dfrac{-(-3\sqrt{2})\pm\sqrt{10}}{2\times1}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}.$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2},\ x_2=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}.$

(7) 原方程变形得

$$3x^2+4x-8=0.$$

$\because\quad \Delta=4^2-4\times3\times(-8)=112,$

$\therefore\quad x=\dfrac{-4\pm\sqrt{112}}{2\times3}=\dfrac{-4\pm4\sqrt{7}}{2\times3}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{7}}{3}.$

$\therefore\quad x_1=-\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3},\ x_2=-\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}.$

(8) 原方程可变形为

$$[(2t+1)+1][(2t+1)+2]=0,$$
$$(2t+1)+1=0, 或 (2t+1)+2=0.$$

$\therefore\quad t_1=-1,\ t_2=-\dfrac{3}{2}.$

说明： 这里实际上用了“换元法”，把$(2t+1)$整个看成变量.

例 2 解下列关于 x 的方程：

(1) $2mx^2=3n(m\neq0)$.

(2) $x^2+6ax+5a^2=0$.

(3) $x^2+2ax+a^2-b^2=0$.

(4) $3mx^2-2nx+k=0$ ($m\neq0$, $n^2\geqslant3mk$).

解： (1) $\because\quad m\neq0,$

$\therefore\quad x^2=\dfrac{3n}{2m}$，即

$$x=\pm\sqrt{\frac{3n}{2m}}=\pm\frac{1}{2m}\sqrt{6mn}.$$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{1}{2m}\sqrt{6mn},\ x_2=-\dfrac{1}{2m}\sqrt{6mn}.$

(2) 原方程可变形为

$$(x+a)(x+5a)=0,$$
$$x+a=0,\ 或\ x+5a=0.$$

$\therefore\quad x_1=-a,\ x_2=-5a.$

(3) 原方程可变形为

$$(x+a)^2-b^2=0,$$
$$(x+a+b)(x+a-b)=0,$$

$$x+a+b=0，或 x+a-b=0.$$

$\therefore\quad x_1=-a-b,\ x_2=-a+b.$

(4) $\because\quad \Delta=(-2n)^2-4\cdot 3m\cdot k=4(n^2-3mk),$

$\because\quad n^2\geqslant 3mk$，即

$$n^2-3mk\geqslant 0，且 m\neq 0,$$

$\therefore\quad x=\dfrac{-(-2n)\pm\sqrt{4(n^2-3mk)}}{2\cdot 3m}=\dfrac{n\pm\sqrt{n^2-3mk}}{3m}.$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{n+\sqrt{n^2-3mk}}{3m},\ x_2=\dfrac{n-\sqrt{n^2-3mk}}{3m}.$

例3 解下列方程：

(1) $4x^3=3x$. (2) $x^3-2x^2-2x+1=0$.

(3) $5y^4-13y^2+6=0$. (4) $(y^2-y)^2-4(y^2-y)-12=0$.

解：(1) 原方程可变形为

$4x^3-3x=0.$

$\therefore\quad x(4x^2-3)=0.$

$\therefore\quad x=0$，或 $4x^2-3=0$，即

$$x=0，或 x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore\quad x_1=0,\ x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(2) 原方程可变形为

$(x^3+1)-(2x^2+2x)=0.$

$\therefore\quad (x+1)(x^2-x+1)-2x(x+1)=0.$

$\therefore\quad (x+1)(x^2-3x+1)=0$，即

$$x+1=0，或 x^2-3x+1=0.$$

$\therefore\quad x_1=-1,\ x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\ x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$

(3) 原方程可变形为

$(y^2-2)(5y^2-3)=0,$

$y^2-2=0$，或 $5y^2-3=0.$

解得 $y_1=\sqrt{2},\ y_2=-\sqrt{2},\ y_3=\dfrac{1}{5}\sqrt{15},\ y_4=-\dfrac{1}{5}\sqrt{15}.$

(4) 设 $Y=y^2-y$，则原方程化为

$$Y^2-4Y-12=0.$$

解得 $Y_1=6,\ Y_2=-2.$

由 $Y_1=6$ 即 $y^2-y=6$，得

$$y_1=3,\ y_2=-2.$$

由 $Y_2=-2$ 即 $y^2-y=-2$，得

$$y^2-y+2=0.$$

$\because \quad \Delta=(-1)^2-4\times1\times2<0$，

$\therefore$ 方程无实数解.

$\therefore$ 原方程的根为：$y_1=3$，$y_2=-2$.

例 4 填空题：

(1) 配方 $x^2-\frac{1}{5}x+$____$=(x-$____$)^2$；

$y^2+\frac{2}{3}y-\frac{1}{9}=(y+$____$)^2+($____$)$.

(2) 已知 $1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$，则$\frac{2}{x}=$________.

(3) 当 k ____时，方程 $1+\sqrt{x+2}=k$ 无解.

(4) 在实数范围内分解因式 $2x^2+5x-1=$________.

(5) 当 a __________时，一元二次方程 $ax^2-2x+1=0$ 有实数根.

(6) 如果方程 $2x^2-4x-k=0$ 的一根是 $2-\sqrt{3}$，则它的另一根是________，k 的值为________.

(7) 方程 $x^2+\sqrt{6}x+1=0$ 的两根为 x_1、x_2，则 $|x_1-x_2|=$________.

(8) 若 α、β 为实数，且 $|\alpha+\beta-3|+(2+\alpha\beta)^2=0$，则以 α、β 为两根，且二次项系数为 1 的一元二次方程是____________.

解：(1) 这里的配方是要把二次三项式化为含有完全平方的式子，只要加一次项系数一半的平方即可.

$$\therefore \quad x^2-\frac{1}{5}x+\underline{\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\left(x-\underline{\frac{1}{10}}\right)^2;$$

$$y^2+\frac{2}{3}y-\frac{1}{9}=\left(y+\underline{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(\underline{-\frac{2}{9}}\right).$$

(2) 由 $1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$，即$\left(1-\frac{2}{x}\right)^2=0$，得

$$\frac{2}{x}=1.$$

(3) 原方程即是$\sqrt{x+2}=k-1$，由二次根式是非负数可知，当 $k-1<0$ 即 $k<1$ 时，原方程无解.

(4) 可用求根公式法分解.

$\because$ 方程 $2x^2+5x-1=0$ 的两根为

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4},\ x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore \quad 2x^2+5x-1=2\left(x-\frac{-5+\sqrt{33}}{4}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{33}}{4}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x+\frac{5+\sqrt{33}}{4}\right).$$

(5) $\because \quad \Delta=(-2)^2-4\cdot a\cdot1=4-4a$，

若方程有实数根，则

$\Delta \geqslant 0$，即 $4-4a \geqslant 0$.

$\therefore \quad a \leqslant 1$.

又$\because \quad a$ 为二次项系数，

$\therefore \quad a \neq 0$.

因此 a 的取值范围应为 $a \leqslant 1$ 且 $a \neq 0$.

(6) 设方程的另一根为 x_2，由根与系数的关系知

$$x_2+(2-\sqrt{3})=-\frac{-4}{2}=2.$$

$\therefore \quad x_2=\sqrt{3}$.

又$(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=\frac{-k}{2}$,

$\therefore \quad k=6-4\sqrt{3}$.

(7) 由根与系数的关系得

$$x_1+x_2=-\sqrt{6},\ x_1\cdot x_2=1.$$

要求与方程两根有关的代数式的值，关键是设法将代数式化为含有两根和与两根积的式子，即可代入 x_1+x_2、$x_1\cdot x_2$ 的值进行计算.

$$\begin{aligned}\therefore \quad |x_1-x_2| &=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1{}^2-2x_1x_2+x_2{}^2}\\ &=\sqrt{x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2-2x_1x_2-2x_1x_2}\\ &=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\ &=\sqrt{(-\sqrt{6})^2-4\times 1}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(8) 由非负数的性质可知

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\cdot\beta=-2.$$

$\therefore$ 以 α、β 为两根的一元二次方程是 $x^2-3x-2=0$.

例 5 选择题.

(1) 已知$(m^2-m-2)x^2+mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的取值范围是（　　）.

A. $m\neq -1$　　B. $m\neq 2$　　C. $m\neq -1$ 且 $m\neq 2$　　D. 一切实数

(2) 若 $p<0$，则方程 $x^2-2x+p=0$ 根的情况是（　　）.

A. 无实数根

B. 有相等实数根

C. 有一正根一负根，且负根的绝对值较大

D. 有一正根一负根，且正根的绝对值较大

(3) 已知方程 $2x^2-8x+7=0$ 的两根恰好是一个直角三角形的两直角边的长，则这个直角三角形的斜边长是（　　）.

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 9　　D. 6

(4) 当 $k<-2$ 时，方程组$\begin{cases}x^2-y+1=0,\\ y=kx\end{cases}$的实数解的个数是（　　）.

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

解：(1) 所给的方程是关于 x 的一元二次方程，则二次项系数不能为零．

$\therefore\ m^2-m-2\neq 0.$

$\therefore\ m\neq -1$ 且 $m\neq 2.$

$\therefore$ 应选 C.

(2) $\because$ 当 $p<0$ 时，$\Delta=(-2)^2-4\times 1\cdot p=4-4p>0$,

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，排除 A、B.

$\because\ x_1x_2=p<0,$

$\therefore$ 方程两根异号.

因 $x_1+x_2=-(-2)=2>0$，故正根绝对值较大.

$\therefore$ 应选 D.

(3) 设方程的两根为 a、b，则

$$a+b=4,\ a\cdot b=\frac{7}{2}.$$

$\therefore$ 斜边 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2-2ab}$

$=\sqrt{(a+b)^2-2ab}$

$=\sqrt{4^2-2\times\frac{7}{2}}=3.$

$\therefore$ 应选 A.

(4) 将 $y=kx$ 代入 $x^2-y+1=0$ 中，消去 y，得

$$x^2-kx+1=0.$$

$\because\ \Delta=(-k)^2-4\times 1\times 1=k^2-4,$

当 $k<-2$ 时，$k^2-4>0$，即 $\Delta>0$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根，则方程组也有两个实数解.

$\therefore$ 应选 C.

例 6　解答下列各题：

(1) 求证：关于 x 的一元二次方程

$$2x^2+3(k-1)x+k^2-4k-7=0$$

必有两个不相等的实数根.

* (2) 已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(2m+1)x+m^2+3=0$$

两实数根的和加上 19 等于两实数根之积，求此一元二次方程.

* (3) 已知方程 $x^2-3nx+3m=0$ 的二根相等，而方程 $x^2-2mx+4n=0$ 的一根是另一根的 2 倍（$mn\neq 0$），求 m、n 的值.

(1) **证明**：$\Delta=[3(k-1)]^2-4\cdot 2\cdot(k^2-4k-7)$

$=9k^2-18k+9-8k^2+32k+56$

$=k^2+14k+65$

$=k^2+14k+49+16$

$= (k+7)^2 + 16.$

$\because \quad (k+7)^2 \geqslant 0,$

$\therefore \quad (k+7)^2 + 16 > 0$，即 $\Delta > 0.$

则方程必有两个不相等的实数根.

（2）**解**：设方程的两根为 x_1、x_2，则

$$x_1 + x_2 = -(2m+1),\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 3.$$

由题意知 $-(2m+1) + 19 = m^2 + 3.$

$\therefore \quad m^2 + 2m - 15 = 0.$

$\therefore \quad m_1 = 3,\ m_2 = -5.$

又 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+3) = 4m - 11$，

当 $m = 3$ 时，$\Delta = 4 \times 3 - 11 > 0$，

当 $m = -5$ 时，$\Delta = 4 \times (-5) - 11 < 0$，

$\therefore \quad m = -5$ 不合题意，舍去，应取 $m = 3.$

$\therefore$ 所求一元二次方程为 $x^2 + 7x + 12 = 0.$

说明：有关讨论方程两根性质的问题，一般应用根与系数的关系解答. 此时方程有实数根，则必有 $\Delta \geqslant 0$. 解题时，除了找两根关系外，还要结合根的判别式的值进行考虑. 这一点不能忽略. 如此题在求出 $m_1 = 3$、$m_2 = -5$ 以后，如果不考虑 $\Delta \geqslant 0$ 这一点，就会得出有两解的错误.

（3）**解**：$\because$ 方程 $x^2 - 3nx + 3m = 0$ 的二根相等，

$\therefore \quad \Delta = (-3n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3m = 9n^2 - 12m = 0$，即

$$m = \frac{3}{4}n^2. \qquad ①$$

又设方程 $x^2 - 2mx + 4n = 0$ 的两根为 α 和 2α，由根与系数关系得

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha = 2m, \\ \alpha \cdot 2\alpha = 4n, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{3}m, \\ \alpha^2 = 2n. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}m\right)^2 = 2n,\ m^2 = \frac{9}{2}n. \qquad ②$$

将①代入②，得 $\left(\dfrac{3}{4}n^2\right)^2 = \dfrac{9}{2}n.$

$\therefore \quad n^4 - 8n = 0,\ n(n^3 - 8) = 0.$

$\therefore \quad n = 0$ 或 $n^3 - 8 = 0.$

$\therefore \quad n = 0$ 或 $n = 2$，但 $mn \neq 0.$

$\therefore \quad n = 0$ 应舍去，取 $n = 2$，这时 $m = \dfrac{3}{4} \times 2^2 = 3.$

$\therefore \quad m = 3,\ n = 2.$

例 7 解下列方程（组）：

（1）$\dfrac{3x - x^2}{1 - x^2} + \dfrac{1}{x-1} + 2 = 0.$

(2) $x=\frac{1}{x-1}+1$.

(3) $(\frac{x^2+x-2}{x+2})^2+(y-x)^2=0$.

(4) $\begin{cases}\frac{2x-5}{x-2}+\frac{2y-3}{y-1}=2,\\ 3x-4y=1.\end{cases}$

* (5) $\begin{cases}(x-y)^2-3(x-y)+2=0,\\ x^2+xy+y^2=4.\end{cases}$

解：(1) 原方程可化为$\frac{3x-x^2}{(1-x)(1+x)}-\frac{1}{1-x}+2=0$.

方程两边同乘以$(1-x)(1+x)$去掉分母，并化简整理，得

$$3x^2-2x-1=0.$$

解得 $x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$.

经检验，$x_1=-\frac{1}{3}$是原方程的根，$x_2=1$是增根，舍去.

$\therefore\quad x=-\frac{1}{3}$.

(2) 方程两边同乘以 $x-1$ 去掉分母，并化简整理，得

$$x^2-2x=0.$$

解得 $x_1=0$，$x_2=2$.

经检验，$x_1=0$，$x_2=2$ 都是所给方程的根.

(3) 由原方程，得

$$\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x+2}=0,\\ (y-x)^2=0.\end{cases}$$

由$\frac{x^2+x-2}{x+2}=0$，得 $x=1$.

$\because\quad y-x=0$，得 $x=y$.

$\therefore\quad y=x=1$，即

$$\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$$

经检验，$\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$是所给方程的解.

(4) 原方程组可变形为

$$\begin{cases}2xy-3x-5y+7=0, & ①\\ 3x-4y=1. & ②\end{cases}$$

由②，得 $x=\frac{4y+1}{3}$.　③

把③代入①，化简整理，得

$$8y^2-25y+18=0.$$

解得 $y_1=2$，$y_2=\frac{9}{8}$，分别代入③得

$$x_1=3,\ x_2=\frac{11}{6}.$$

所以原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\frac{11}{6},\\ y_2=\frac{9}{8}.\end{cases}$$

(5) $\begin{cases}(x-y)^2-3(x-y)+2=0, & ①\\ x^2+xy+y^2=4. & ②\end{cases}$

①左边分解因式，得

$$(x-y-1)(x-y-2)=0.$$

$\therefore\quad x-y-1=0$ 或 $x-y-2=0$.

原方程组转化为下列两个方程组：

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\ x^2+xy+y^2=4\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}x-y-2=0,\\ x^2+xy+y^2=4.\end{cases}$$

分别解这两个方程组，得

$$\begin{cases}x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\\ y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\\ y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=2,\\ y_3=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x_4=0,\\ y_4=-2.\end{cases}$$

例 8 解下列方程（组）：

(1) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

(2) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7x-\frac{7}{x}+10=0$.

(3) $\sqrt{3x-y+1}+4(x+2y+1)^2=0$.

(4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=2,\\ \frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}=\frac{5}{2}.\end{cases}$

解：(1) 原方程可变形为

$$[(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)]=44.$$

$\therefore\quad (x^2-2x-8)(x^2-2x-15)=44.$

$\therefore\quad (x^2-2x-8)[(x^2-2x-8)-7]=44.$

设 $y=x^2-2x-8$，则方程可化为

$$y(y-7)=44，即\ y^2-7y-44=0.$$

解得 $y_1=11$，$y_2=-4$.

当 $y=11$ 时，$x^2-2x-8=11$，即 $x^2-2x-19=0$.

解得 $x_1=1+2\sqrt{5}$，$x_2=1-2\sqrt{5}$.