高等数学（一）微积分

附：高等数学（一）微积分自学考试大纲

组编／全国高等教育自学考试指导委员会
主编／高汝熹

全国高等教育自学考试指定教材 经济管理类公共课

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材

经济管理类专业

高等数学(一)微积分

（附　高等数学（一）微积分自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会组编

主编　高汝熹

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一):微积分/全国高等教育自学考试指导委员会组编;高汝熹主编.—2版.—武汉:武汉大学出版社,1999.10
全国高等教育自学考试指定教材 经济管理类专业用书
ISBN 7-307-02874-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①全… ②高… Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—教材 ②微积分—高等教育—自学考试—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第67225号

责任编辑:金丽莉 版面设计:支 笛

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:epd@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)
印刷:中国科学院印刷厂
开本:880×1230 1/32 印张:18
版次:1992年1月第1版 2000年9月第2版
2000年9月第1次印刷
字数:513千字 印数:001—30 100
ISBN 7-307-02874-3/O·217 定价:22.50元

组编前言

当您开始阅读本书时，人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪，这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展，知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇，寻求发展，迎接挑战，适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力，也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999 年 10 月

序 言

本书是按照国家教委对经济管理类专业《高等数学(一)自学考试大纲》编写的。众所周知,高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用。著名的边际分析和弹性分析就是以微积分理论为基础的,因此,学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的,而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的。

本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识,全书以微积分学为核心内容,一元函数和多元函数是微积分研究的对象,而极限论则是最重要的基础。无论是导数还是微分、不定积分或常义积分,甚至级数和广义积分,这些基本概念都是借助于极限建立起来的。微分方程则可作为微积分学的延伸和应用,为便于读者自学,在每一章的末尾,都配有小结和复习题,以便使读者易于抓住每章的重点并测试自己对基本内容的掌握程度。

本书除供经济管理类自学考试考生作教材外,也可供其他相同专业的读者使用。

限于作者的水平,本书的不妥之处,恳请读者不吝指正。

编者 1991 年 1 月

目　　录

第一章　函数及其图形

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，它是数学分析研究的基本对象，因而是高等数学中最重要的概念之一．在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数关系．在本章中，我们将首先引入集合，然后研究两个集合中的一种对应关系——映射，再着重讨论映射的一种特殊情形——函数关系．

§1.1　集　　合

一、集合的概念

1．集合

集合是现代数学中一个重要的基本概念，所谓集合，就是指具有某个共同属性的一些对象的全体，构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”．

下面举几个集合的例子：

【例 1】　某工厂生产的所有产品．

【例 2】　某班级的全体同学．

【例 3】　全体偶数．

【例 4】　方程 $x^2-4x+3=0$ 的一切根．

习惯上，我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母表示集合中的元素．如果 x 是集合 A 的元素，则记作 $x\in A$，读作“x 属于 A”或“x 在 A 中”；如果 x 不是集合 A 的元素，则记作 $x\overline{\in}A$，读作“x 不属于 A”或“x 不在 A 中”．例如：我们常用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数构

成的集合.用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合.显然,$2\in\mathbf{N}$,$2\in\mathbf{R}$,$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$,但$\frac{1}{2}\overline{\in}\mathbf{N}$,因为 2 是自然数且是实数,$\frac{1}{2}$是实数但不是自然数.

2. 集合的表示法

1) 列举法:是指按任意顺序列出集合中所有的元素,并用花括号{}括起来.

【例 5】 由 1,3,5,7 组成的集合,可表示为 $A=\{1,3,5,7\}$ 或 $A=\{3,1,7,5\}$等.用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不能遗漏和重复.

2) 描述法:是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用 $A=\{x\mid x$ 具有的共同属性$\}$表示.

【例 6】 $S=\{x\mid x>0\}$,它表示由正数全体组成的集合,其元素为大于零的数,这里的属性即为 $x>0$.习惯上将正数全体构成的集合记为 $\mathbf{R}_+$,而将负数全体记为 $\mathbf{R}_-$.

【例 7】 $M=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$表示由 $x^2-4x+3=0$ 的根所组成的集合,其元素所具有的属性是指满足方程$x^2-4x+3=0$.

3. 集合的类型

有限集:集合中所包含的元素的个数只有有限个,称为有限集.

无限集:集合中所包含的元素的个数是无限个,称为无限集.

【例 8】 $\{x\mid 2<x<5\}$是无限集.

不含有任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

【例 9】 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+10=0\}$,表示要求 A 的元素是实数且满足方程$x^2+10=0$.易见,方程 $x^2+10=0$ 在实数范围内无解,因而 A 表示一个空集.

如同零在数的运算中所起的作用一样,空集对集合运算来说也是不能缺少的.注意空集$\varnothing$不能与含有单个元素“0”的集合$\{0\}$相混淆.

【例 10】 集合$\{x\mid 2^x=1\}$就不是空集,而是集合$\{0\}$.

4. 子集、集合的相等

定义 设有两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做 B 的**子集**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

【例 11】 **R** 为全体实数的集合,**N** 为全体自然数的集合,**N** 显然为 **R** 的一个子集,即 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$.

【例 12】 设

$A=\{x\mid 2\leqslant x<100\}$, $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 50\}$, $C=\{x\mid x\leqslant 50\}$,

显然,B 是 A 的子集,B 也是 C 的子集,即 $B\subset A$,$B\subset C$. 但 A 不是 C 的子集,因为 $100\in A$,但 $100\,\overline{\in}\,C$.

此外,任何一个集合都是它自身的子集,即 $A\subset A$. 空集是任何一个集合的子集,即 $\varnothing\subset A$. 这一点可用反证法来证明:若空集不是某一集合 A 的子集,则它至少有一个不属于 A 的元素 x,即 $x\,\overline{\in}\,A$,这与空集不包含任何元素相矛盾,可见空集是任何一个集合的子集结论是成立的.

定义 两个集合 A 和 B 称为**相等**,是指集合 A 和集合 B 含有相同的元素,记为 $A=B$. 也就是说,当且仅当 A 是 B 的子集且 B 也是 A 的子集时,集合 A 与集合 B 相等.

【例 13】 设 $A=\{x\mid x$ 为大于 1、小于 4 的整数$\}$,

$B=\{x\mid x$ 为小于 5 的质数$\}$.

因为 A 中只包含 2,3 两个数, B 也只包含 2,3 两个数, 故 $A=B$.

集合以及集合间的关系可用图形表示,用一个简单的平面区域代表一个集合(见图 1.1). 集合内的元素以区域内的点表示.

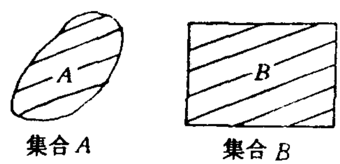

图 1.1

二、集合的运算

如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样,集合与集合之间也有其特定的运算. 并、交、补是集合的三种基本运算.

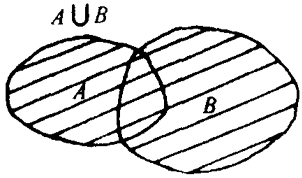

图 1.2

定义 由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的**并**. 记为 $A\cup B$ (读作 A 与 B 之并). A 与 B 的并可用图 1.2 中阴影部分表示.

两个集合的并也可表示为

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

【例 14】 设 $A=\{x|-1<x<2\}$, $B=\{x|1<x<3\}$,则

$$A\cup B=\{x|-1<x<3\}.$$

【例 15】 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,7,8\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,7,8\}$.

定义 由既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素汇总构成的集合,称为集合 A 与 B 的**交**. 记为 $A\cap B$(读作 A 与 B 之交),即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,交可用图 1.3 中的阴影部分表示.

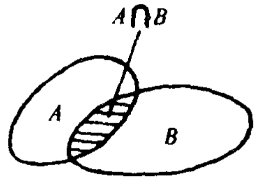

图 1.3

【例 16】 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,c,e,f\}$,则 $A\cap B=\{a,c,e\}$.

定义 集合 A 关于集合 B 的**补集**是指满足:

1) 集合 A 是集合 B 的一个子集;

2) 补集中的元素属于 B 但不属于 A.

记补集为 A_B^c,则

$$A_B^c=\{x|x\in B \text{ 且 } x\overline{\in}A\}.$$

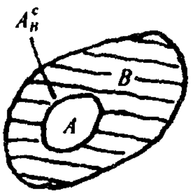

图 1.4

补集可用图 1.4 中的阴影部分表示. 为了方便起见,补集 A_B^c 也常简单地记为 A^c. 显然,$A\cup A_B^c=B$, $A\cap A_B^c=\varnothing$.

【例 17】 设 A 为全体正奇数集合,B 为全体正整数集合,则集合 A 关于集合 B 的补集 A_B^c 为全体正偶数集合.

集合运算有如下性质:

1. 交换律

(1) $A\cup B=B\cup A$; (2) $A\cap B=B\cap A$.

2. 结合律

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

(2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

3. 分配律

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. 对偶律

(1) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$; (2) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

注意:在分配律和对偶律中左右两边是不同的运算号$\cup$和$\cap$.

按照集合相等的定义,可以证明上述集合运算的性质.作为例子,下面我们证明集合运算的对偶律(2):

1) 对任一 $x\in(A\cap B)^c$,必有 $x\overline{\in}A\cap B$,故 $x\overline{\in}A$ 与 $x\overline{\in}B$ 至少有一个成立.注意到当 $x\overline{\in}A$ 时有 $x\in A^c$,当 $x\overline{\in}B$ 时有 $x\in B^c$,因此总有 $x\in A^c\cup B^c$.这就证明了,若 $x\in(A\cap B)^c$,必有 $x\in A^c\cup B^c$,所以有

$$(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c.$$

2) 对任一 $x\in A^c\cup B^c$,则 $x\in A^c$ 与 $x\in B^c$ 至少有一个成立,换句话说 $x\in A$ 与 $x\in B$ 至少有一个不成立.故有 $x\overline{\in}A\cap B$,即

$$x\in(A\cap B)^c,$$

这就证明了,若 $x\in A^c\cup B^c$,必有 $x\in(A\cap B)^c$,所以有

$$A^c\cup B^c\subset(A\cap B)^c.$$

综合 1),2)的结果,知

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

其余几个集合运算性质,请读者自行证明.

三、实数与数轴

随着生产的发展,人们对于数的认识也是逐步深入和发展的.由于要对劳动成果分配和交换,所以人们需要进行计数,因而首先认识了自然数集,继而发展到整数集、有理数集,再进一步发展到无理数集.自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$关于加法运算是封闭的,即若$a\in\mathbf{N}$,$b\in\mathbf{N}$则总有 $a+b\in\mathbf{N}$;但它对于减法运算却不封闭,即两自然数的差未必为自然数.这在进行商品交换和计算时是不方便的,于是人们将自然数集扩展到整数集

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}.$$

整数集关于加法、减法和乘法运算是封闭的,亦即两个整数在作加、减或乘的运算后所得的和、差或积仍为整数.但整数关于除法却不封

闭. 为了引入除法，又把整数集相应扩展成有理数集

$$\mathbf{Q}=\{x \mid x=p/q, p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}, p\text{ 与 }q\text{ 互质}\}.$$

这样，在有理数集范围内，我们就可以进行四则运算了. 同样，随着科学技术的进步以及生产实践和数学本身发展的需要，人们需要进行诸如开方(如$\sqrt{2}$)、计算圆周率π等等新的运算，原来的有理数又不够用了，于是就产生了无理数集.

以上所讲的这些数都可以在一条直线上形象地表示出来. 设有一条水平直线L，在L上任取一点O作为原点，再规定一个正方向(习惯上规定由原点向右的方向为正方向)和一个单位长度，我们把这种有原点、正方向和单位长度的直线L称为数轴(图1.5). 由初等几何知，用直尺和圆规可将单位长度任意等分. 因而对任何一个有理数p/q，都可以作出OA的长度等于p/q，于是在数轴上找到一点A，这个点叫做有理点，它是有理数p/q的几何表示，而有理数p/q称为点A的坐标. 这样，数轴上的有理点必对应着一个有理数. 不难发现，有理数具有稠密性，亦即任何两个有理数a,b(设$a<b$)之间总可以找到无穷多个有理数. 例如：取有理数$c=\frac{a+b}{2}$，则$a<c<b$，同样在a,c之间也可以找到一个有理数$d=\frac{a+c}{2}$，依次类推. 可见不管有理数a,b相差多么小，在a,b之间总可以找到无穷多个有理数. 由于任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应，所以数轴上任意两个有理点之间总可找到无穷多个有理点，也就是说，有理点在数轴上是处处稠密的.

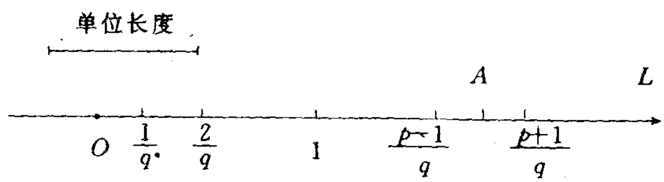

图 1.5

进一步我们发现在数轴上还有无数个点，它们还没有相应的有理数与之对应，古希腊的数学家和哲学家早在公元前5世纪就发现了这一个现象. 例如：用有理数就无法表达单位正方形的对角线长度