



附：高等数学（一）微积分自学考试大纲

高等数学（一）微积分

组编 / 全国高等教育自学考试指导委员会
主编 / 高汝熹

全国高等教育自学考试指定教材 经济管理类公共课

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材
经济管理类专业

高等数学(一)微积分

(附 高等数学(一)微积分自学考试大纲)

全国高等教育自学考试指导委员会组编

主编 高汝熹

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一):微积分/全国高等教育自学考试指导委员会组编;高汝熹主编. —2版. —武汉:武汉大学出版社,1999.10

全国高等教育自学考试指定教材 经济管理类专业用书

ISBN 7-307-02874-3

I. 高… II. ①全… ②高… III. 高等数学—高等教育—自学考试—教材 ②微积分—高等教育—自学考试—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 67225 号

责任编辑:金丽莉 版面设计:支 笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:epd@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:中国科学院印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:18

版次:1992年1月第1版 2000年9月第2版

2000年9月第1次印刷

字数:513千字 印数:001—30 100

ISBN 7-307-02874-3/O·217 定价:22.50元

版权所有,不得翻印;所购教材,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地教材供应部门联系调换。

组编前言

当您开始阅读本书时,人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪,这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展,知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战,随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇,寻求发展,迎接挑战,适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试,其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学,为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问,这种教材应当适合自学,应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息,有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力,也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书,我们虽然沿用了“教材”这个概念,但它与那种仅供教师讲、学生听,教师不讲、学生不懂,以“教”为中心的教科书相比,已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解,以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念,不断探索适合自己的学习方法,充分利用已有的知识基础和实际工作经验,最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

序 言

本书是按照国家教委对经济管理类专业《高等数学(一)自学考试大纲》编写的。众所周知,高等数学在经济科学、管理科学中有着广泛的应用。著名的边际分析和弹性分析就是以微积分理论为基础的,因此,学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的,而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的。

本书力求以通俗的语言向读者介绍高等数学中最基础的知识,全书以微积分学为核心内容,一元函数和多元函数是微积分研究的对象,而极限论则是最重要的基础。无论是导数还是微分,不定积分或常义积分,甚至级数和广义积分,这些基本概念都是借助于极限建立起来的。微分方程则可作为微积分学的延伸和应用,为便于读者自学,在每一章的末尾,都配有小结和复习题,以便使读者易于抓住每章的重点并测试自己对基本内容的掌握程度。

本书除供经济管理类自学考试考生作教材外,也可供其他相同专业的读者使用。

限于作者的水平,本书的不妥之处,恳请读者不吝指正。

编者 1991年1月

目 录

第一章 函数及其图形	1
§ 1.1 集合	1
一、集合的概念(1) 二、集合的运算(3)	
三、实数与数轴(5) 四、区间、邻域(7)	
习题 1.1(9)	
§ 1.2 映射	10
习题 1.2(11)	
§ 1.3 函数	12
一、函数概念(12) 二、函数的几何特性(17)	
三、复合函数和反函数(21) 四、基本初等函数(25)	
习题 1.3(30)	
§ 1.4 经济学中的常用函数	32
一、需求函数(32) 二、供给函数(35)	
三、总收益函数(36)	
四、戈珀兹(<i>Gompertz</i>)曲线(36)	
习题 1.4(37)	
小 结	37
复习题	40
第二章 极限与连续	42
§ 2.1 数列的极限	42
一、数列极限(42) 二、再论数列极限(46)	
习题 2.1(48)	
§ 2.2 函数的极限	49
一、 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限(49) 二、再论函数的极限(50)	
三、单侧极限(52) 四、 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限(53)	

五、极限的性质(54)	
习题 2.2(55)	
§ 2.3 极限的运算法则	56
一、极限运算法则(56)	
二、判别极限存在的两个准则(58)	
习题 2.3(61)	
§ 2.4 两个重要极限	62
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (62)	
二、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ (63)	
三、连续复利(66)	
习题 2.4(66)	
§ 2.5 函数的连续性	67
一、函数连续的定义(68)	
二、函数的间断点(70)	
三、连续函数的有关定理(72)	
四、闭区间上连续函数的性质(74)	
习题 2.5(76)	
§ 2.6 无穷小量和无穷大量	78
一、无穷小量和无穷大量的概念(78)	
二、无穷小量和无穷大量的阶(80)	
习题 2.6(82)	
小 结	83
复习题	88
第三章 导数与微分	91
§ 3.1 导数概念	91
一、导数概念的实例(91)	
二、导数的定义(94)	
三、单侧导数(95)	
四、可导与连续的关系(95)	
五、用导数定义求导数(96)	
六、导数的实际意义(99)	
习题 3.1(100)	
§ 3.2 求导法则和基本求导公式	100
一、导数的四则运算(100)	
二、反函数求导法则(103)	
三、复合函数求导法则(104)	
四、对数求导法则(107)	
五、基本求导公式(108)	
六、隐函数求导法则(109)	
七、参数方程求导法则(110)	
习题 3.2(111)	

§ 3.3 高阶导数	113
一、高阶导数的概念(113) 二、求导法则(114)	
习题 3.3(117)	
§ 3.4 微分	117
一、微分的概念(117) 二、微分的几何意义(120)	
三、微分的求法(120) 四、微分形式的不变性(122)	
五、应用微分作近似计算(123)	
习题 3.4(125)	
§ 3.5 导数在经济分析中的应用	125
一、边际概念(125) 二、边际成本(126)	
三、边际收益(128) 四、函数的弹性(129)	
五、常用函数的弹性公式(130) 六、弹性的四则运算(130)	
七、函数弹性的图解法(131) 八、弹性应用举例(132)	
习题 3.5(135)	
小 结.....	137
复习题.....	139
第四章 中值定理与导数的应用	142
§ 4.1 中值定理	142
一、罗尔定理(142) 二、拉格朗日中值定理(145)	
三、柯西中值定理(147) 四、中值定理的初步应用(149)	
习题 4.1(150)	
§ 4.2 导数的应用	151
一、罗必达法则(151) 二、函数的增减性(161)	
三、函数的极值(165)	
习题 4.2(175)	
§ 4.3 凸性、拐点和渐近线.....	177
一、凸性(177) 二、拐点(180)	
三、曲线的渐近线(182) 四、函数图形的作法(184)	
习题 4.3(186)	
§ 4.4 函数极值在经济管理中的应用举例	188
一、需求分析(188) 二、最大利润问题(191)	
三、库存管理问题(193) 四、成本最低的生产量问题(196)	
五、复利问题(197)	

习题 4.4(199)	
小 结	200
复习题	207
第五章 积 分	210
§ 5.1 不定积分	210
一、不定积分的概念(210)	
二、不定积分的性质(213)	
三、基本积分方法(217)	
习题 5.1(231)	
§ 5.2 定积分	234
一、定积分的概念(234)	
二、定积分的基本性质(237)	
三、微积分基本定理(241)	
四、定积分的换元法和分部积分法(244)	
习题 5.2(250)	
§ 5.3 广义积分	253
一、无限区间上的积分(253)	
二、无界函数的积分(256)	
习题 5.3(259)	
§ 5.4 定积分的应用	259
一、平面图形的面积(259)	
二、空间立体图形的体积(264)	
三、定积分在物理上的应用举例(267)	
四、定积分在经济问题中的应用举例(268)	
习题 5.4(273)	
小 结	275
复习题	279
第六章 无穷级数	281
§ 6.1 常数项级数	281
一、级数的收敛性(281)	
二、无穷级数的基本性质(284)	
习题 6.1(288)	
§ 6.2 数项级数的收敛性判别法	289
一、正项级数及其收敛性判别法(289)	
二、交错级数及其判别法(296)	
三、绝对收敛和条件收敛(297)	
四、经济学中的例子(300)	
习题 6.2(302)	

§ 6.3 幂级数	303
一、幂级数的收敛半径(303) 二、幂级数的运算法则(308)	
习题 6.3(311)	
§ 6.4 泰勒公式与泰勒级数	312
一、泰勒公式(312) 二、泰勒级数(317)	
三、幂级数在近似计算中的应用(322)	
习题 6.4(325)	
小 结	326
复习题	332
第七章 多元函数微积分	334
§ 7.1 多元函数	334
一、平面点集和区域(334) 二、二元函数(337)	
习题 7.1(347)	
§ 7.2 偏导数	348
一、偏导数的概念(348) 二、求导法则(349)	
三、高阶偏导数(351)	
习题 7.2(354)	
§ 7.3 全微分	355
习题 7.3(361)	
§ 7.4 多元复合函数求导法则和隐函数求导公式	361
一、多元复合函数求导法则(361) 二、隐函数求导公式(366)	
习题 7.4(369)	
§ 7.5 多元函数偏导数的应用	371
一、多元函数的极值(371) 二、条件极值、拉格朗日乘数法(378)	
三、最小二乘法(384) 四、应用举例(391)	
习题 7.5(397)	
§ 7.6 二重积分	399
一、二重积分的概念(399) 二、二重积分的性质(405)	
三、二重积分的计算(406)	
习题 7.6(422)	
小 结	424
复习题	438
第八章 微分方程初步	440

§ 8.1 微分方程的一般概念	440
习题 8.1(442)	
§ 8.2 一阶微分方程	443
一、可分离变量的一阶微分方程(443) 二、一阶线性微分方程(445)	
习题 8.2(449)	
§ 8.3 可降阶的高阶微分方程	451
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程(451)	
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程(452)	
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程(453)	
习题 8.3(454)	
§ 8.4 二阶常系数线性微分方程	455
一、线性齐次方程(455) 二、线性非齐次方程(459)	
习题 8.4(463)	
§ 8.5 微分方程在经济分析中的应用举例	465
习题 8.5(467)	
小 结.....	468
复习题.....	472
习题答案.....	474
附 录 高等数学(一)微积分自学考试大纲.....	503

第一章 函数及其图形

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象,它是数学分析研究的基本对象,因而是高等数学中最重要的概念之一.在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中,经常会遇到函数关系.在本章中,我们将首先引入集合,然后研究两个集合中的一种对应关系——映射,再着重讨论映射的一种特殊情形——函数关系.

§1.1 集 合

一、集合的概念

1. 集合

集合是现代数学中一个重要的基本概念,所谓集合,就是指具有某个共同属性的一些对象的全体,构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”.

下面举几个集合的例子:

【例1】 某工厂生产的所有产品.

【例2】 某班级的全体同学.

【例3】 全体偶数.

【例4】 方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的一切根.

习惯上,我们用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,而用小写字母表示集合中的元素.如果 x 是集合 A 的元素,则记作 $x \in A$,读作“ x 属于 A ”或“ x 在 A 中”;如果 x 不是集合 A 的元素,则记作 $x \notin A$,读作“ x 不属于 A ”或“ x 不在 A 中”.例如:我们常用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数构

成的集合,用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合.显然, $2 \in \mathbf{N}$, $2 \in \mathbf{R}$, $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, 但 $\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$, 因为 2 是自然数且是实数, $\frac{1}{2}$ 是实数但不是自然数.

2. 集合的表示法

1) 列举法:是指按任意顺序列出集合中所有的元素,并用花括号 $\{\}$ 括起来.

【例 5】由 1, 3, 5, 7 组成的集合,可表示为 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 或 $A = \{3, 1, 7, 5\}$ 等.用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不能遗漏和重复.

2) 描述法:是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用 $A = \{x | x \text{ 具有的共同属性}\}$ 表示.

【例 6】 $S = \{x | x > 0\}$, 它表示由正数全体组成的集合,其元素为大于零的数,这里的属性即为 $x > 0$. 习惯上将正数全体构成的集合记为 $\mathbf{R}_+$, 而将负数全体记为 $\mathbf{R}_-$.

【例 7】 $M = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$ 表示由 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根所组成的集合,其元素所具有的属性是指满足方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

3. 集合的类型

有限集:集合中所包含的元素的个数只有有限个,称为有限集.

无限集:集合中所包含的元素的个数是无限个,称为无限集.

【例 8】 $\{x | 2 < x < 5\}$ 是无限集.

不含有任何元素的集合称为空集,记为 $\emptyset$.

【例 9】 $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 10 = 0\}$, 表示要求 A 的元素是实数且满足方程 $x^2 + 10 = 0$. 易见,方程 $x^2 + 10 = 0$ 在实数范围内无解,因而 A 表示一个空集.

如同零在数的运算中所起的作用一样,空集对集合运算来说也是不能缺少的.注意空集 $\emptyset$ 不能与含有单个元素“0”的集合 $\{0\}$ 相混淆.

【例 10】集合 $\{x | 2^x = 1\}$ 就不是空集,而是集合 $\{0\}$.

4. 子集、集合的相等

定义 设有两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .

【例 11】 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合, $\mathbf{N}$ 为全体自然数的集合, $\mathbf{N}$ 显然为 $\mathbf{R}$ 的一个子集, 即 $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$.

【例 12】 设

$$A = \{x | 2 \leq x < 100\}, B = \{x | 2 \leq x \leq 50\}, C = \{x | x \leq 50\},$$

显然, B 是 A 的子集, B 也是 C 的子集, 即 $B \subset A, B \subset C$. 但 A 不是 C 的子集, 因为 $100 \in A$, 但 $100 \notin C$.

此外, 任何一个集合都是它自身的子集, 即 $A \subset A$. 空集是任何一个集合的子集, 即 $\emptyset \subset A$. 这一点可用反证法来证明: 若空集不是某一集合 A 的子集, 则它至少有一个不属于 A 的元素 x , 即 $x \notin A$, 这与空集不包含任何元素相矛盾, 可见空集是任何一个集合的子集结论是成立的.

定义 两个集合 A 和 B 称为相等, 是指集合 A 和集合 B 含有相同的元素, 记为 $A = B$. 也就是说, 当且仅当 A 是 B 的子集且 B 也是 A 的子集时, 集合 A 与集合 B 相等.

【例 13】 设 $A = \{x | x \text{ 为大于 } 1 \text{、小于 } 4 \text{ 的整数}\}$,

$$B = \{x | x \text{ 为小于 } 5 \text{ 的质数}\}.$$

因为 A 中只包含 2, 3 两个数, B 也只包含 2, 3 两个数, 故 $A = B$.

集合以及集合间的关系可用图形表示, 用一个简单的平面区域代表一个集合 (见图 1.1). 集合内的元素以区域内的点表示.

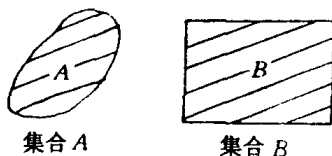


图 1.1

二、集合的运算

如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样, 集合与集合之间也有其特定的运算. 并、交、补是集合的三种基本运算.

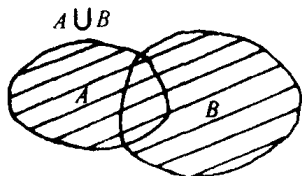


图 1.2

定义 由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的并. 记为 $A \cup B$ (读作 A 与 B 之并). A 与 B 的并可图 1.2 中阴影部分表示.

两个集合的并可表示为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

【例 14】 设 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则

$$A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}.$$

【例 15】 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 7, 8\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$.

定义 由既属于集合 A 又属于集合 B 的公共元素汇总构成的集合, 称为集合 A 与 B 的交. 记为 $A \cap B$ (读作 A 与 B 之交), 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$, 交可用图 1.3 中的阴影部分表示.

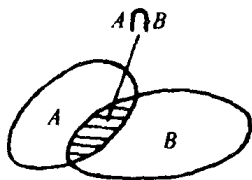


图 1.3

【例 16】 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, e, f\}$, 则 $A \cap B = \{a, c, e\}$.

定义 集合 A 关于集合 B 的补集是指满足:

- 1) 集合 A 是集合 B 的一个子集;
- 2) 补集中的元素属于 B 但不属于 A .

记补集为 A_B^c , 则

$$A_B^c = \{x | x \in B \text{ 且 } x \notin A\}.$$

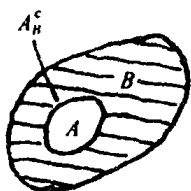


图 1.4

补集可用图 1.4 中的阴影部分表示. 为了方便起见, 补集 A_B^c 也常简单地记为 A^c .

显然, $A \cup A_B^c = B$, $A \cap A_B^c = \emptyset$.

【例 17】 设 A 为全体正奇数集合, B 为全体正整数集合, 则集合 A 关于集合 B 的补集 A_B^c 为全体正偶数集合.

集合运算有如下性质:

1. 交换律

$$(1) A \cup B = B \cup A; \quad (2) A \cap B = B \cap A.$$

2. 结合律

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C;$$

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

3. 分配律

$$(1) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$(2) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. 对偶律

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

注意:在分配律和对偶律中左右两边是不同的运算号 $\cup$ 和 $\cap$.

按照集合相等的定义,可以证明上述集合运算的性质.作为例子,下面我们证明集合运算的对偶律(2):

1) 对任一 $x \in (A \cap B)^c$, 必有 $x \notin A \cap B$, 故 $x \notin A$ 与 $x \notin B$ 至少有一个成立. 注意到当 $x \notin A$ 时有 $x \in A^c$, 当 $x \notin B$ 时有 $x \in B^c$, 因此总有 $x \in A^c \cup B^c$. 这就证明了, 若 $x \in (A \cap B)^c$, 必有 $x \in A^c \cup B^c$, 所以有

$$(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c.$$

2) 对任一 $x \in A^c \cup B^c$, 则 $x \in A^c$ 与 $x \in B^c$ 至少有一个成立, 换句话说 $x \notin A$ 与 $x \notin B$ 至少有一个不成立. 故有 $x \notin A \cap B$, 即

$$x \in (A \cap B)^c,$$

这就证明了, 若 $x \in A^c \cup B^c$, 必有 $x \in (A \cap B)^c$, 所以有

$$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c.$$

综合 1), 2) 的结果, 知

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

其余几个集合运算性质, 请读者自行证明.

三、实数与数轴

随着生产的发展, 人们对于数的认识也是逐步深入和发展的. 由于要对劳动成果分配和交换, 所以人们需要进行计数, 因而首先认识了自然数集, 继而发展到整数集、有理数集, 再进一步发展到无理数集. 自然数集 $N = \{1, 2, \dots\}$ 关于加法运算是封闭的, 即若 $a \in N$, $b \in N$ 则总有 $a + b \in N$; 但它对于减法运算却不封闭, 即两自然数的差未必为自然数. 这在进行商品交换和计算时是不方便的, 于是人们将自然数集扩展到整数集

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

整数集关于加法、减法和乘法运算是封闭的, 亦即两个整数在作加、减或乘的运算后所得的和、差或积仍为整数. 但整数关于除法却不封

闭. 为了引入除法, 又把整数集相应扩展成有理数集

$$Q = \{x \mid x = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \text{ 与 } q \text{ 互质}\}.$$

这样, 在有理数集范围内, 我们就可以进行四则运算了. 同样, 随着科学技术的进步以及生产实践和数学本身发展的需要, 人们需要进行诸如开方(如 $\sqrt{2}$)、计算圆周率 π 等等新的运算, 原来的有理数又不够用了, 于是就产生了无理数集.

以上所讲的这些数都可以在一条直线上形象地表示出来. 设有一条水平直线 L , 在 L 上任取一点 O 作为原点, 再规定一个正方向(习惯上规定由原点向右的方向为正方向)和一个单位长度, 我们把这种有原点、正方向和单位长度的直线 L 称为数轴(图 1.5). 由初等几何知, 用直尺和圆规可将单位长度任意等分. 因而对任何一个有理数 p/q , 都可以作出 OA 的长度等于 p/q , 于是在数轴上找到一点 A , 这个点叫做有理点, 它是有理数 p/q 的几何表示, 而有理数 p/q 称为点 A 的坐标. 这样, 数轴上的有理点必对应着一个有理数. 不难发现, 有理数具有稠密性, 亦即任何两个有理数 a, b (设 $a < b$) 之间总可以找到无穷多个有理数. 例如: 取有理数 $c = \frac{a+b}{2}$, 则 $a < c < b$, 同样在 a, c 之间也可以找到一个有理数 $d = \frac{a+c}{2}$, 依次类推. 可见不管有理数 a, b 相差多么小, 在 a, b 之间总可以找到无穷多个有理数. 由于任何一个有理数必和数轴上的一个有理点相对应, 所以数轴上任意两个有理点之间总可找到无穷多个有理点, 也就是说, 有理点在数轴上是处处稠密的.

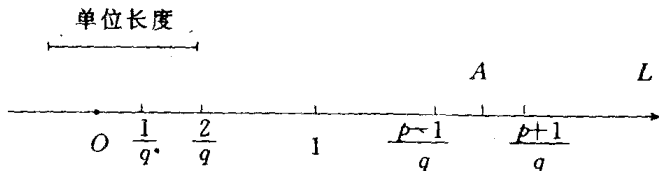


图 1.5

进一步我们发现在数轴上还有无数个点, 它们还没有相应的有理数与之对应, 古希腊的数学家和哲学家早在公元前 5 世纪就发现了这一个现象. 例如: 用有理数就无法表达单位正方形的对角线长度