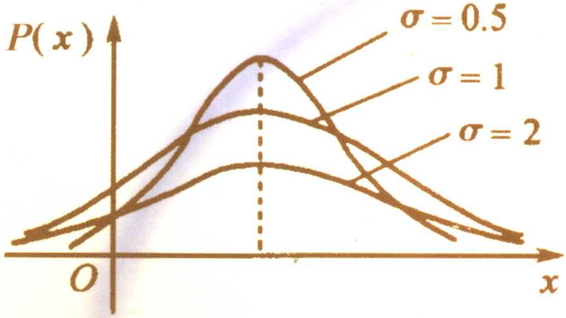
农林类高职高专基础课系列教材

高等数学（下册）

谢厚桂　张青娥　徐文智　主编



$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(v_i-np_i)^2}{np_i}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

中国林业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/谢厚桂，张青娥，徐文智主编．—北京：中国林业出版社，2004.2

（农林类高职高专基础课系列教材）

ISBN 7-5038-3655-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①谢…②张…③徐…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 006584 号

出版　中国林业出版社（100009　北京西城区刘海胡同 7 号）

E-mail：cfphz@public. bta. net. cn　电话：66184477

发行　中国林业出版社

印刷　北京林业大学印刷厂

版次　2004 年 2 月第 1 版

印次　2004 年 2 月第 1 次

开本　787mm×960mm　1/16

印张　20.25

字数　356 千字

印数　1～4000 册

定价　28.00 元

《高等数学（下册）》
编委名单

主　编　谢厚桂　张青娥　徐文智

副主编　王志武　郝建民　李　钧

编　者　（按姓氏笔画排序）

马建国　王志武　王凌云　王淑静　李　均
辛永清　张青娥　张勤英　张淑密　郑瑞根
郝建民　徐文智　耿相月　聂淑媛　宿炳林
谢厚桂　焦淑芬

前　言

本书是根据“教育部关于高职、高专的培养目标”及“高职、高专数学课程”教学大纲所规定的高等数学的内容和要求，本着数学“服务专业，必须够用”的原则，为实施素质教育，培养数学创新能力，在原编高职（高专）用《高等数学》下册讲义试用两年的基础上，进一步修订而编写的。

本书的特点是：知识结构合理，内容安排恰当，语言叙述通俗、简练；重点阐述数学知识和数学方法；全书理论推导过程从简，注重数学知识的实用性和能力训练。此外，每节都配有一定数量的习题，可供学生练习和巩固所学知识之用。为了便于读者更好地学习高等数学，使教学有一定的梯度，本书另配备了《高等数学学习指导》下册，可帮助学生巩固知识、提高技能。

本书分上下两篇。其中上篇是线性代数，共五章；下篇是概率论与数理统计，共八章。使用时可根据专业所需和学时安排适当删减。全书习题均在书末附有答案。同时，书末还附有概率论与数理统计常用数表以备学生查阅。

本书覆盖面广，使用范围大。本书可作为农林类或综合类高等职业学校、成人高校、高等专科学校及本科院校举办的二级职业技术学院专科或本科的教学用书，也可作为“专升本”和自学高等数学的参考用书。

本书由谢厚桂、张青娥、徐文智主编。

参加本书上篇编写的有：山东农业大学科技学院谢厚桂、耿相月（第一、第四章第一、二节），甘肃林业职业技术学院徐文智、辛永清、王凌云（第二、三章），福建林业职业技术学院郑瑞根（第四章第三、四节），山东农业大学科技学院李钧（第五章）。

参加本书下篇编写的有：山东农业大学科技学院谢厚桂（第一章），山东农业大学科技学院郝建民、王淑静（第二、三章），山东农业大学科技学院王志武、张勤英（第四、五、八章），河南科技大学林业职业学院张青娥、马建国、聂淑媛（第六、七章）。全书最后由谢厚桂修改、统纂、定稿。另外，山西林业职业技术学院宿炳林、张淑密、山西金融职业技术学院焦淑芬参加了部分章节的编写。

本书在编写过程中参考了国内外同行的有关著作和研究成果，并得到了山东农业大学科技学院、河南科技大学林业职业学院、甘肃林业职业技术学院和

福建林业职业技术学院教务处以及山东农业大学信息工程学院数学系有关专家的大力支持，该书的出版还得益于中国林业出版社的精心策划和通力合作，在此一并表示衷心的感谢。

本书尽管经过多次补充、修改，但我们深知还有许多不完善之处，有待进一步探索，敬请读者不吝赐教。

编 者

2004 年 1 月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第一篇　线性代数

线性代数是高职(高专)各专业学生的必修课程。本教材为适应各专业需要而编写。内容包括行列式，矩阵，n维向量和线性方程组，特征值与特征向量，二次型。内容选择和结构体系都力求体现基础课为专业课服务的思想和培养技术应用型人才的知识能力要求。教材注重运算方法的训练和学习能力的培养。

第一章　行列式

行列式是一种解线性方程组的基本数学工具。本章将以三阶行列式的定义为基础，引出 n 阶行列式的概念，进而介绍行列式的性质，以及行列式的计算，最后应用行列式解线性方程组。

第一节　行列式的定义、性质及计算

一、二阶和三阶行列式

在中学代数中，已经知道怎样求二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

此方程的未知量的系数构成了下列符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

这个符号称为二阶行列式，它由 2^2 个数组成，它代表一个算式，等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，第一个下标 i 表示第 i 行，第二个下标 j 表示第 j 列，a_{ij} 就是表示行列式第 i 行第 j 列相交处的那个元素。

同理，符号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

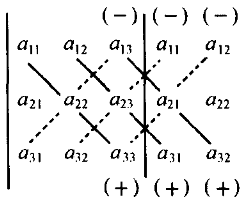
称为三阶行列式，它由 3^2 个数组成，也代表一个算式，等于

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

计算三阶行列式有几种方法，常见的是对角线法，即将行列式 D 中的第一列与第二列重写于 D 的右侧，然后求对角线上元素乘积的代数和，即得行列式的值，方法如下：



其中位于三条实线上的三元素的乘积是正的，位于三条虚线上的三个元素乘积都是负的，这样便得到(1) 式。

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按行列式的计算法则：

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-2) + (-3) \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 1 - 1 \times 1 \times 3 - 2 \times 1 \times 1 - (-3) \times 1 \times (-2) = -23$$

二、行列式的性质

我们以三阶行列式为例讨论行列式的性质，实际上，其性质具有普遍性。我们将不加证明地给出其性质，利用这些性质可以化简行列式。

定义 1　将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新行列式，称为 D 的转置行列式，记作 D^T。

即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$。

性质 2　互换行列式中的任意两行(列)，行列式仅改变符号。

性质 3　如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零。

性质 4　如果行列式中有一行(列)元素全为零，则这个行列式等于零。

性质 5　把行列式的某一行(列)的每个元素同乘以数 k，就等于以数 k 乘以该行列式。

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 3 和性质 5 可得：

推论 1　如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式等于零。

性质 6　如果行列式中的某一行(列)所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行(例)外，其余的元素与原行列式的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7　以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素，然后加到另一行(列)的对应元素上，则行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

数 k 乘第 i 行(列) 加到第 j 行(列)，记作 $kr_i + r_j(kc_i + c_j)$ 这里 r_i 代表第 i 行，c_j 代表第 j 列。

例 2　计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

解　根据三阶行列式的对角线法则计算得

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23} \times 0 + a_{13} \times 0 \times 0 - a_{13}a_{22} \times 0 - a_{11} \times 0 \times a_{23} - a_{12} \times 0 \times a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

像例 2 中，主对角线下方的元素全为零的行列式称为上三角形行列式；反之，主对角线上方的元素全为零的行列式称为下三角形行列式；上、下三角形行列式统称三角形行列式。三角形行列式的值就是其主对角线上元素的积。

例 3　求行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解　可以直接计算结果，这里我们用性质简化其运算。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+0 & 1+0 & 0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

三、行列式的展开

为了讲述行列式的展开，先引进余子式和代数余子式的概念。

定义 2　把行列式中元素 a_{ij} 所在的行(即第 i 行) 和列(即第 j 列) 的元素都划去，剩下的元素按原次序所构成的新行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，M_{ij} 再乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}；即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中的元素 a_{23} 的代数余子式是 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

定理　行列式 D 的值等于它任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。以三阶行列式为例,即:

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \\ &= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} \\ &= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

或简写为:

$$D=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

证　略。(注:这里只验证三阶行列式的定理)。

这个定理称为拉普拉斯(Laplace)定理,是简化行列式计算的一个重要基础。

例 2 中的行列式按定理来求解,我们按第一列展开可得:

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

若按最后一行展开可得:

$$D=a_{33}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{33}\cdot a_{11}\cdot a_{22}$$

可以看出,行列式按不同行或列展开计算的结果相等。

例 4　将行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 按第一行,第三列展开。

解　按第一行展开得:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-32$$

按第三列展开得:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$3 \times (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

推论　行列式 D 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零。用三阶行列式表示如下

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0, i \neq j \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0, i \neq j \end{aligned} \tag{3}$$

证　以三阶行列式为例。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}(i=2) \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行}(j=3) \end{array}$$

在 D 中的第 3 行用第 2 行的各对应元素代替,有

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

由性质 3 知 $D' = 0$,对 D' 再按第 3 行展开,即得:

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$$

从而有 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1,2,3)$

同理可证:

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{证毕。}$$

把(2) 式和(3) 式结合起来可写成:

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

把定理和行列式的性质结合起来,可以使行列式的计算大为简化。计算时,常利用性质使某一行(列) 的元素出现尽可能多的零,这种运算叫做化零运算。

例 5　计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} \xlongequal[-c_1 + c_3]{-c_1 + c_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 35 & 2 & -1 \\ 23 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$

四、n 阶行列式

我们知道，行列式某一元素的代数余子式总是比原行列式降低一阶，而二阶和三阶行列式是有明确的定义，这样就可以用拉普拉斯展开式的方法定义四阶行列式，五阶行列式……，依此类推我们可定义 n 阶行列式。

定义　由 n^2(n 为正整数) 个元素组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它是一个算式，其值为：

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，都是 $n-1$ 阶行列式。

必须说明，对于三阶行列式所具有的前述性质，对 n 阶行列式也适用。

例 6　由定义可得：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

事实上，用完全类似的方法可知，n 阶上三角形行列式和下三角形行列式的值均为主对角线上元素的乘积。即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

同理可求得 n 阶行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

例 7　计算下面行列式的值

$$\begin{vmatrix} -1 & -9 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 首先进行化零运算，显然在第 4 行(r_4) 上进行较易：

$$D = \begin{vmatrix} -1 & -9 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{2c_4 + c_3} \begin{vmatrix} -1 & -9 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -2 \\ -12 & -6 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-9c_4 + c_1} \begin{vmatrix} -28 & -9 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & -1 & -2 \\ -21 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } r_4 \text{ 展开}} (-1)^{4+4}$$

$$\begin{vmatrix} -28 & -9 & 2 \\ 13 & 5 & -1 \\ -21 & -6 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{2r_2 + r_1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 13 & 5 & -1 \\ -21 & -6 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{3r_2 + r_3}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 13 & 5 & -1 \\ 18 & 9 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_3 \text{ 展开}} (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 18 & 9 \end{vmatrix} = -36$$

例 8 计算下面的行列式。

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 将第 2 行，第 3 行，…… 第 n 行的元素都加到第 1 行的相应元素上，得：

$$D = \begin{vmatrix} x + (n-1)a & x + (n-1)a & \cdots & x + (n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再把第 1 列的(-1) 倍加到其后各列上去，得：

$$D=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ a & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 9　解方程

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 2 & 2\\ 2 & 2 & x & 3\\ 3 & 3 & 3 & x\end{vmatrix}=0$$

解　行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 2 & 2\\ 2 & 2 & x & 3\\ 3 & 3 & 3 & x\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{-2r_1+r_3\\ -3r_1+r_4}]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x+1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & x-2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & x-3\end{vmatrix}$$

$$=(x+1)(x-2)(x-3)$$

所以方程的解为 $x_1=-1, x_2=2, x_3=3$

第二节　克拉默(Cramer)法则

含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1}$$

由它的系数 a_{ij} 组成的行列式称为线性方程组(1)的系数行列式，记作 D，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

若是把行列式 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 都换成线性方程组(1)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，组成的行列式记为 D_j，即