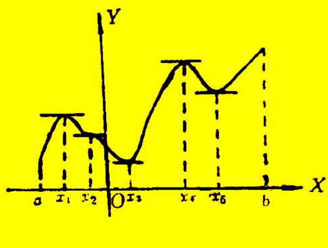
成人高等学校教材

微积分



北京出版社

成人高等学校教材

微 积 分

北京市成人教育学院编

北 京 出 版 社

成人高等学校教材
微 积 分
北京市成人教育学院编
*
北 京 出 版 社 出 版
（北京崇文门外东兴隆街51号）
新华书店北京发行所发行
安 平 印 刷 厂 印 刷
*
787×1092毫米 32开本 11,625印张 256,000 字
1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷
印数 1—3,400
书号：7071·1159 定价：1.60 元

．前　言

这套教材包括《微积分》、《线性代数与线性规划初步》、《概率论与数理统计初步》三册。是根据北京市成人教育局制定的财经类大专院校高等数学教学纲要的精神，由北京市成人教育学院数学组主持，由北京市财贸管理干部学院、北京市机械局职工大学等校教师编写的。本书可作为经济类职工（干部）大专院校基础数学教学用书，也可作为财经工作者自学用书。

本书《微积分》介绍了函数的极限与连续，导数，微分与积分，微分与积分的实际应用，以及常微分方程。

本书由林士中、励金华、张学忠三位同志执笔。在编时，吸取了本市职工大学的一些教师的宝贵意见，在此特别表示感谢。

由于时间和水平所限，缺点在所难免，敬希批评指正。

北京市成人教育学院

一九八五年十月

目　录

第一章 函 数

初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学则以变量及函数为主要研究对象。本章重点介绍变量和函数的概念及函数的性质。

1.1 函 数

（一）变量与函数

在自然现象和社会现象中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在实际过程中不变化，即保持一定的数值，这种量叫常量；还有一些量在实际过程中在变化着，即取不同的数值，这种量叫变量。

例如，某商品在销售过程中，销售单价不变，而销售量在逐渐增加，因而在该商品的销售过程中，销售单价是常量，而销售量是变量。

习惯上用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量。

任何一个变量，总有一定的变化范围，例如某商店水泥的库存量为1000吨，则该商店水泥的销售量最少为 0，最多为1000吨。因此水泥的销售量的变化范围是 0 到1000。

如果一个变量的变化是连续的，则常用区间来表示变量的变化范围，下面我们引进区间的名称和记号。

设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，那末，满足不等式

$$a \leqslant x \leqslant b$$

的一切实数的全体叫做闭区间，记作〔a，b〕；满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数的全体叫做开区间，记作（a，b）；满足不等式

$$a < x \leqslant b \quad 或 \quad a \leqslant x < b$$

的一切实数的全体叫做半开半闭区间，分别记作（a,b〕或〔a,b）。

除此，我们还用区间（$-\infty$，$+\infty$）表示全体实数，也可以写为$-\infty < x < +\infty$；用区间〔$a,+\infty$）表示不小于 a 的全体实数，也可以写为$a \leqslant x < +\infty$；用区间（$-\infty$，b）表示小于 b 的全体实数，也可以写为$-\infty < x < b$。其中符号$-\infty$和$+\infty$分别叫做"负无穷大"和"正无穷大"，这样的区间叫做**无穷区间**。

在同一自然现象或社会现象过程中，变量往往不止一个，这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互联系着并遵循一定的变化规律。下面举两个例子。

1. 某产品年产量为10000吨，每吨销售价为1000元，则该产品的年收入y(元)与年销售量x(吨)的关系为

$$y = 1000x。$$

当年销售量 x 在区间〔0，10000〕内任取一个数值时，年收入 y 的数值便可以由上式唯一确定。

2. 自由落体运动，设物体下落时间为 t，下落距离为 s，则 s 与 t 的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2 。$$

若落地时刻为T，则t在〔0，T〕上取任一数值时，s可由上式唯一确定。

象上面这样的例子是很多的，概括起来，可以得到函数的定义。

定义 设x和y是同一过程中的两个变量，当变量x在某实数范围D内取某一数值时，变量y按照一定的规律，有一个确定的数值与之对应，则变量y叫做变量x的**函数**，记作

$$y=f(x)。$$

其中，变量x叫做**自变量**，而变量y叫做**函数**或**因变量**。

字母f仅仅表示y对于x存在着函数关系，为了表示几个不同的函数，还可以用$y=\varphi(x)$，$y=g(x)$，$y=F(x)$等等表示y与x之间存在着函数关系。

自变量x的取值范围D叫做函数的**定义域**。在实际问题中，函数的定义域可以根据问题的实际意义确定，如例1中函数的定义域是〔0，10000〕，例2中函数的定义域是〔0，T〕。在数学问题中，变量y与变量x常抽去其实际意义，它们的关系如果用一个公式$y=f(x)$表达而没有写出定义域时，**就认为该函数的定义域是使表达式有意义的自变量x的全部实数值，这种由函数表达式自身确定的定义域又叫做函数的自然定义域。**

例如函数$y=\sqrt{x-1}$虽然没明确给出定义域，但由表达式$\sqrt{x-1}$知道，只有$x\geqslant 1$时，$\sqrt{x-1}$才是实数，因而函数的定义域是〔1，$+\infty$）。

对于自变量的某一个值a，函数$f(x)$的对应值叫做函数$f(x)$当$x=a$时的**函数值**，用记号$f(a)$表示，例如函数$f(x)=3x+2$，则$f(4)=3\times4+2=14$。

函数的对应关系和函数的定义域构成函数的两个要素，即两个函数相同，必须对应关系和定义域都相同。

例 1　求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{3-2x}$；

（2）$y=\ln(3-2x)$；

（3）$y=\dfrac{1}{\ln(3-2x)}$；

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$。

解：（1）当 $3-2x\geqslant 0$ 时，即 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$时，$\sqrt{3-2x}$ 在实数范围内有意义，故定义域为$\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$。

（2）当 $3-2x>0$ 时，即 $x<\dfrac{3}{2}$时，$\ln(3-2x)$ 有意义，故定义域为$\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$。

（3）当$3-2x>0$ 且$\ln(3-2x)\neq 0$ 时，即 $x<\dfrac{3}{2}$且 $3-2x\neq 1$ 时函数才有定义，故定义域为 $(-\infty,\ 1)$ 及 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$。

（4）当$3-2x\geqslant 0$ 且$3-2x\neq 0$ 时，即$3-2x>0$ 时函数才有定义，故定义域为$\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$。

例 2　求下列函数的定义域：

（1）$y=\sqrt{x^2-4x-5}$；

（2）$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$。

解：（1）$\because$　$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$，

$\therefore$　当$x\geqslant 5$ 或$x\leqslant -1$时多项式 $x^2-4x-5\geqslant 0$，故函数的定义域为$(-\infty,-1]$，$[5,\ +\infty)$。

（2）∵ $$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1,$$

$$-1\leqslant x\leqslant 3,$$

∴ 函数的定义域为 $[-1, 3]$。

例 3 判断函数 $f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 是否相同？

解：$f(x)=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

$\varphi(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 是分式，分母不能为零，故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$。

它们的定义域不同，所以是不相同的函数。

例 4 若 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(2)$；$f(x-1)$。

解：$f(2)=2\times 2^2+1=9$。

$f(x-1)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$。

（二）建立函数关系举例

例 5 有一工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里，它的垂足 B 到火车站 C 的距离为 b 公里，工厂的产品必须经火车站 C 才能转销外地，已知汽车运费是 m 元／吨公里，火车运费是 n 元／吨公里，$(m>n)$，为节省运费，想在铁路上另外修一小站 M 作为转运站，设 M 距 B x 公里，如图 1－1。试将每吨货物由工厂 A 运至车站 C 的运费 y 表示为距离 x 的函数。

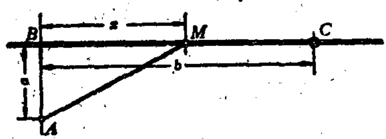


图 1－1

解：设运费为 y。

∵ $|AM|=\sqrt{a^2+x^2}$，∴ 汽车运费为 $m\sqrt{a^2+x^2}$，又 $|CM|=b-x$，∴ 火车运费为 $n(b-x)$。

$$\therefore\quad y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x),$$

根据问题的实际意义知定义域为〔0，b〕。

例 6 某工厂生产某产品每日最多生产100吨，固定成本为130元，每生产1吨，成本增加6元。求该厂生产该种产品的日成本C与日产量x的函数关系。

解： $C(x)=130+6x$，

根据问题的实际意义知定义域为〔0，100〕。

例 7 某工厂生产某种产品，年产量最多生产10000吨。已知固定成本为200,000元，每生产1吨产品，成本增加100元，其销售收入为150元。如果今年的年产量为x吨，求该产品在今年的总利润和产量间的函数关系。

解： 我们习惯用L表示利润，S表示收入，C表示成本，则$L=S-C$。

$\because$ $C=200,000+100x$，

$S=150x$，

$\therefore$ $L=50x-200,000$，

根据题设，函数的定义域为〔0，10000〕。

例 8 已知某产品的销售量x吨与销售单价p元／吨成线性关系，即$x=a+bp$，根据市场调查知道，若销售单价$p=20$元／吨时，销售量为800吨；当$p=30$元／吨时，销售量为700吨。求该产品的销售量x与销售单价p的函数关系。

解： 由题意知，当$p=20$时，$x=800$；当$p=30$时，$x=700$。将这两组数分别代入关系式$x=a+bp$中得

$$\begin{cases}800=a+20b,\\700=a+30b。\end{cases}$$

解上面的方程组得到$b=-10$，$a=1000$。

故 函数关系为$x=1000-10p$。

根据题意知销售量x不能取负值，价格p也不能取负

值，故定义域为（0，100）。

例 9　某厂生产水泥年产量为 a 吨，分若干批生产，每批生产准备费为 b 元。设产品均匀投入市场（即平均库存量等于每批生产量的一半），若库存费每吨每年 c 元。求该水泥产品一年的生产准备费与库存费之和与每批生产量之间的函数关系。

解：设批生产量为 x 吨，库存费与准备费之和为 y 元。

因批量为 x，由于产品均匀投入市场，故平均库存量为$\frac{1}{2}x$，所以年库存费为 $c\cdot\frac{x}{2}$；

因批量为 x，故年生产批数为$\frac{a}{x}$，年生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$。

得
$$y=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x。$$

根据题意，定义域为（0，a〕。

例10　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 100 公里以内，每吨公里 2 元，超过100公里，每增一吨公里为1.6 元。求每吨货物运费和里程的函数关系，并作此函数的图形。

解：设里程为 x 公里，每吨货物运费为 y 元。

当 $0\leqslant x\leqslant 100$时，$y=2x$；

当$100<x$　　时，$y=200+1.6(x-100)$。

$$\therefore\quad y=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant 100),\\ 200+1.6(x-100) & (100<x)。\end{cases}$$

本例中运费和里程的函数关系在自变量 x 取值范围为〔0，100〕时表达式为$y=2x$；当自变量在区间（100，+∞）内取值时表达式为$y=200+1.6(x-100)$。这种分阶段表达

的函数称为**分段函数**。要注意的是分段函数的表达式虽然在不同阶段不相同，但是一个函数。

定义域为〔0，+∞)，其图形如图1—2。

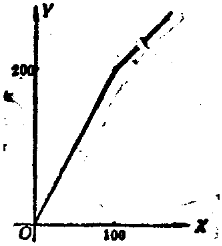


图 1—2

（三）函数的几种特性

1. 函数的单调增减性

定义 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，若对于区间 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内**单调增加**；若当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内**单调减少**。

单调增函数与单调减函数统称单调函数。

单调增函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升；如图1—3；单调减函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降，如图1—4。

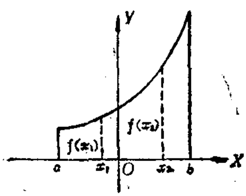


图 1—3

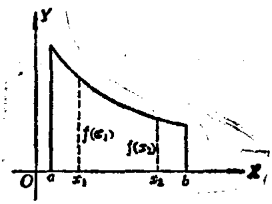


图 1—4

例11 判断函数 $y=f(x)=x^3$ 的单调性。

解：对于任意的两个数 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_2^2)$$

$$=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

∴ $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的。

例12 判断函数$f(x)=x^2$的单调性。

解：∵对于任意的两个数x_1，x_2有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1),$$

∴ 在区间〔0，+∞）内，若$x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)>0$，故$f(x)$在〔0，+∞）上单调增加；

在区间（−∞，0〕内，若$x_1<x_2$，则 $f(x_2)-f(x_1)<0$，故$f(x)$在（−∞，0〕内单调减少。

因而$f(x)=x^2$在（−∞，+∞）内不是单调函数。

由本例可见，一个函数的单调性，和它的自变量所在区间有关，因而说一个函数是否是单调函数，必须指明相应的区间。

2. 函数的有界性

定义 设函数$y=f(x)$在区间（a，b）内有定义，如果存在一个正数M，使得当x在区间（a，b）内任取一值时，函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

就叫做函数$f(x)$在（a，b）内是**有界**的，否则就说函数$f(x)$在（a，b）内是**无界**的。

例如，函数$y=\sin x$在（−∞，+∞）内是有界的，因为对任何实数x，都有$|\sin x|\leqslant 1$；又如$y=\mathrm{arctg}x$在（−∞，+∞）内是有界的，因为对任何实数x，都有$|\mathrm{arctg}x|\leqslant\frac{\pi}{2}$。

例13 讨论函数$f(x)=\frac{1}{x}$在区间〔2，+∞）与（0，1）内的有界性。

解：在〔2，+∞）内，$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，所以函数$f(x)=$

$\frac{1}{x}$在〔2，$+\infty$）内有界；

在（0，1）内，x可以任意变小，因而$\frac{1}{x}$可以任意变大，因而找不到一个正数M，使得$\left|\frac{1}{x}\right|<M$，因而$f(x)=\frac{1}{x}$在（0，1）内无界。

由本例可见，一个函数是否有界，需看它所在的区间如何，同一个函数在不同区间的有界性可以是不同的。因而考察一个函数是否有界，必须指明是在那一个区间内。

3. 函数的奇偶性

定义 若函数$f(x)$满足等式

$$f(-x)=f(x),$$

则$f(x)$叫做**偶函数**；若函数$f(x)$满足等式

$$f(-x)=-f(x),$$

则$f(x)$叫做**奇函数**。

对于偶函数$f(x)$。因$f(-x)=f(x)$，所以，若点$A(x,f(x))$在图形上，则点$A'(-x,\ f(x))$也在图形上，因而偶函数的图形关于y轴对称，如图1－5。

对于奇函数$f(x)$。因$f(-x)=-f(x)$，所以，若点$A(x,f(x))$在图形上，则点$A''(-x,\ -f(x))$也在图形上，因而奇函数的图形关于坐标原点对称，如图1－6。

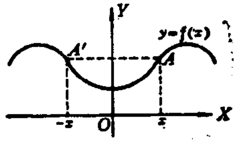


图 1－5

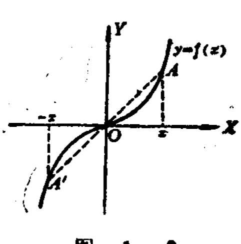


图 1－6