世界著名数学猜想丛书

毕达哥拉斯——古希腊智者，指环匠之子，帮会掌门，提出“百牛定理”。
费马——业余数学家之王，贵族出身，清廉法官，旁批提猜想。
怀尔斯——腼腆英国男子，蜗居阁楼，八年面壁，一鸣惊人。

这是一个被希尔伯特称为“会下金蛋的母鸡”的数学猜想。
这是一个让引车卖浆之流都趋之若鹜的数学猜想。
这是一个“引无数英雄竞折腰”的数学猜想。

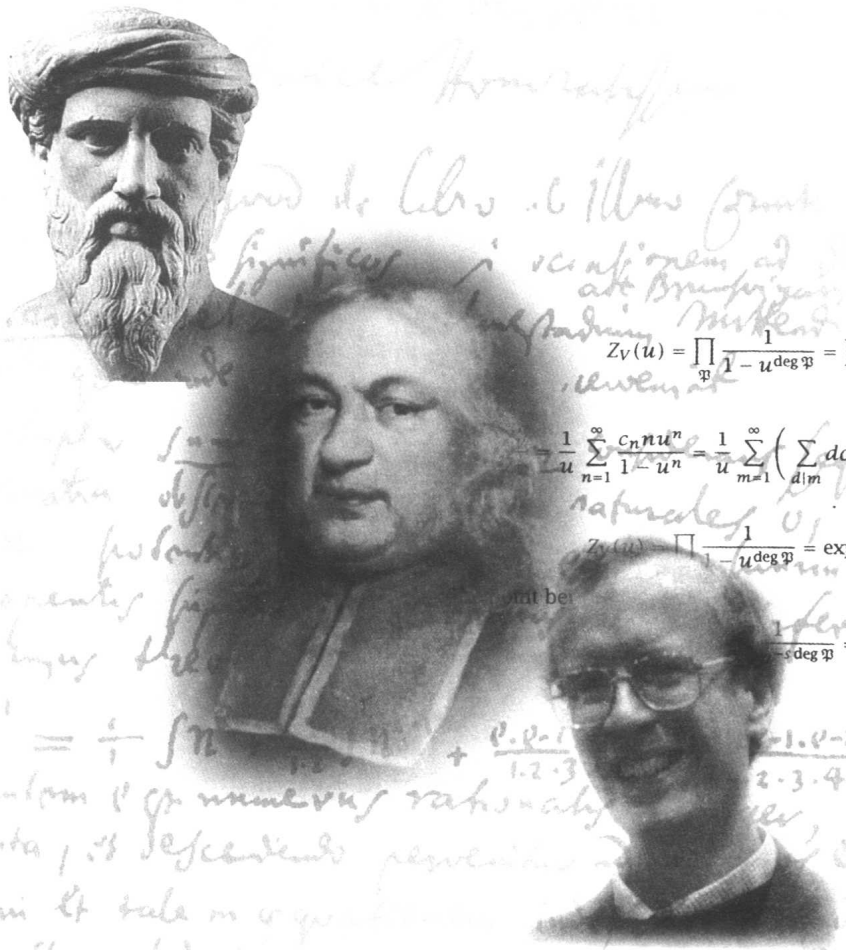
主编 = 刘培杰

从毕达哥拉斯到怀尔斯

From Pythagoras to Wiles

哈尔滨工业大学出版社

世界著名数学猜想丛书



$$Z_V(u) = \prod_{\mathfrak{P}} \frac{1}{1-u^{\deg \mathfrak{P}}} = \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-u^n}\right)^{c_n}.$$

$$= \frac{1}{u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n n u^n}{1-u^n} = \frac{1}{u} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{d|m} d c_d \right) u^m = u^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} N_{p,m} u$$

$$Z_V(u) \quad \prod \frac{1}{1-u^{\deg \mathfrak{P}}} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_{p,m}}{m} u^m \right)$$

$$\frac{1}{s^{\deg \mathfrak{P}}} = \prod_{\mathfrak{P}} \frac{1}{1-(\mathrm{N}\mathfrak{P})^{-s}}.$$

From 从毕达哥拉斯到怀尔斯

From Pythagoras to Wiles

主编　刘培杰

副主编　王忠玉　申春雪

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从毕达哥拉斯到怀尔斯/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2006.10

ISBN 7-5603-2384-7

Ⅰ.从… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学史 Ⅳ.O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119607 号

策划编辑 刘培杰 责任编辑 李广鑫 王勇钢
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 35.5 字数 655 千字
版 次 2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷
印 数 1~3 000 册
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

⊙前言

这是一个源于法国的故事.提到法国,人们自然会想到埃菲尔铁塔、凯旋门、香榭丽舍大街和拿破仑.其实喜欢人文的我国读者对法兰西文化也是并不陌生的,在文学领域中巴尔扎克、斯汤达、大仲马、雨果、乔治·桑的小说曾使我们手不释卷,艺术领域中德拉克洛瓦、科罗、库尔贝、莫奈和米勒的绘画也曾令我们如痴如醉.

如果说到哲学,法国那些灿若繁星的哲学大师则更为我国读者所熟悉,正如黑格尔所断言:关涉到文化有两种最重要的形态,那就是法国哲学和启蒙思想,这里既有深邃理论的探索,也有诚挚感情的抒发,既有《百科全书》主编狄德罗,也有一代宗师,启蒙运动的先驱伏尔泰,以及让·梅利叶、孟德斯鸠、卢梭、孔狄亚克、霍尔马赫、马布利等等.

然而就在我们津津乐道于科罗作品的梦幻境界为绘画增添了诗意,拿破仑三世曾一度撰写《凯撒传》,福楼拜因创作小说《包法利夫人》而遭控告,波德莱尔的诗集《恶之花》被删砍等文坛掌故时;在人们为拉美特利的"人是机器",爱尔维修"自爱是人的本性",摩莱里"私有制是万恶之源"的宏论拍案称奇时,人们可曾想到对法兰西的科学,我们又了解多少呢?作为科学的皇后——数学,法国有什么贡献?法国有哪些数学大师?对这些我们又知道多少呢?

法国是一个科学大国，法国的世界大国地位与其说是由其经济实力所决定，倒不如是说由其科技实力所奠定．蔡元培先生早在1928年2月6日欢迎法国大使马德尔演说词中就指出：

> “不久以前，我国某处有一个小学教员，命学生把他们最看得起的一个外国举出来．结果，列强及瑞士、比利时等，都得到一部分学生的崇拜．有的国家，因为它的殖民地是世界上最多；有的国家，因为它的财富是世界上第一；有的国家，因为它的维新 modernis—atio 是世界上最快．法国也得到许多小学生的崇拜，不过小学生崇拜它，不是因为它的殖民地多，不是因为它富庶，也不是因为它能学人家，能维新，却是因为它的文化发达的成就最高．法兰西的文化，在中国小学生的眼光中，已经有这么正确的判断，那在成人的眼光中，更不必说了．
>
> 所以我们今天欢迎马德尔公使，不是因为他是强大盛富的国家的代表，法国尽管是强大盛富，却是因为他是文化极高的国家的代表．”

法国是世界上最盛产数学思想的国度，曾经是世界数学的中心．法兰西民族是世界上数学家辈出的民族，翻开任何一本数学著作映入眼帘的总少不了法国数学家的名字，从近代的韦达、笛沙格、笛卡尔、费马、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、傅里叶、柯西、伽罗瓦到现代的彭加勒、勒贝格、托姆及布尔巴基学派．

在这本书中，我们将选取在近代数学中最具传奇色彩的一位法国数学家来讲叙他和他的猜想的故事．要找到这样一位传主是很困难的．美国第一家现代报纸，1833年7月30日在纽约创办的《太阳报》的一位编辑约翰·博加特曾说过：“狗咬人不是新闻，人咬狗才是新闻．”同样，写职业数学家如何证明或提出数学猜想，除了专家以外，很少有人会感兴趣的，因为这是意料之中的事，是他在做自己该做的事，不具传奇色彩．说到传奇，那么他应该完全是一位并不专门从事数学的业余数学家，如果他再是世界业余数学家之王就更好了．这个唯一的人选就是法国律师费马．首先，是因为怀尔斯那轰动全球的讲演，怀尔斯的证明气势宏大，可谓黄钟大吕，史无前例．它宣告了费马大定理这桩长达350年之久的历史悬案在上世纪末彻底结案，数学将翻开新的一页．而且在费马大定理长达350年的历史中，它一直充当了人类智力极限的计量表．法国一位悲观的物理学家曾断言，人类的智力已达到了极限，例证之一就是费马大定理．传说犹太王大卫的戒指上刻有一句铭文“一切都会过去”．但在契诃夫小说中却有一个人反其意，在自己的戒指上也刻了一句铭文“一切都不会过去”．

如果说怀尔斯宣布了费马猜想已经成为过去，那么本书将告诉你：它不会过去，费马永远在我们心中！费马大定理曾引“无数英雄竞折腰”，而人类又以

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

特有的坚韧一步步向目标逼近，可谓筚路蓝缕，艰苦卓绝，在征服费马大定理的征途中留下了一系列里程碑般的著名的定理.这些定理如同英国索尔兹勃里平原上的巨石群那样，永远巍然矗立.可以将其视为数学史上的一大景观和人类对未知领域不懈探索的顽强精神的见证.作为一个现代人没有到此一游的经历，应该是很遗憾的.

更令人感到遗憾的是，最初新闻出版界对此事的冷漠和迟钝，就在全球新闻媒介为怀尔斯而疯狂，世界各大报刊铺天盖地、连篇累牍的时候，我们却出奇地冷静，只有《中国科学报》和《上海经济导报》报导了此消息，是什么原因呢？这似乎与世界名著受冷遇原因相同，在一篇分析名著被搁置的原因的文章中道出了其中的原因：

> “我们所处的这个信息、媒介异样发达的时代，有谁想过，恰恰是最容易淹埋真实事物和事物本质的时代呢？因为发达，所有浮泛的、虚假的、劣质的、琐碎的东西得以传播和泛滥、流行和传染，它们实际上正联合起来，谋杀那些最有价值的东西！
>
> 这样的谋杀和误导，正时时刻刻发生在我们身边，混乱着我们的生活.而名著的搁置，只是其中的一部分.一切发展和进步都藏着它的悖论和反效果，就像人们都摆脱不掉自己的影子一样，近两年才有了一些转机.”

对于为什么要读名著这个问题，有人的回答是：只有读名著你才可能知道别人的深度.同样只有读这些著名猜想的解决历史你才可能了解人类思维的深度.客观地说：这本小册子也可以算做一本中级科普读物.科普传统由来已久，科学需要普及，数学尤甚之，因为它面临着双重的需要，大众与数学家.大众需要了解，数学家需要解释.

中国人一直把学习数学当做一件很神圣的事，视为一生中的一件大事.中国有首古诗夸张地表达了这种对数学的崇敬之情.

人生世不能学算，
如空中日月无光；
即学书不学其算，
俾精神减其一半.

十几年前书市曾有一本十分走俏的书叫《曾国藩家书》，多次再版，颇受欢迎.曾国藩在中国历代封疆大吏中可算是博学者（他本人曾是道光进士），并治

家有方,《曾文正公全集》颇受现代人欣赏,他本人曾因为不通晓数学而自责,并瞩其子孙认真习之,因此后代多为科技界精英.例如,他的第五代子孙曾宪衡为湖南医科大学教授,曾宪衡之子曾群曾在中国科技大学少年班学习,后入哈佛大学攻读博士学位.

曾国藩本人也大力擢用数学家,清代著名数学家华衡芳曾在曾国藩府中作嘉宾,并多次被保举,一生与曾国藩洋务运动结下不解之缘.而华氏则是极力推崇数学重要性的数学家.他在其长达12卷之巨的《学算笔谈》中认为:"故深于算法者可以析至纷之数,穷至赜之理,选至精至奇之器,奇造化之极舆,池天人之秘奥.国家因此而富强,天下俱得其便利,其功岂浅鲜哉!"

由于这种心理价值取向的引导,我国一直有着良好的数学科普传统,而且非常成功.比如早在1953年老一辈数学家孙泽瀛曾编写过一本《数学方法趣引》(中国科学图书仪器公司出版)的小书,此书在当时引起强烈反响,其中介绍的"柯克曼女生问题"和"斯坦纳系列问题"吸引了一个当时哈尔滨电机厂生产科叫陆家羲的统计员,从那时起,他经过30多年的拼搏,终于攻克了这一世界难题,成为中国数学界的骄傲.这就是科普书籍该起的作用,它虽然不能告诉你登月球的方法,但它却极力向你讲述那里是琼楼玉宇、玉兔折桂的仙境,让你想往,让你着迷.眼下科普似乎有更重要的功效.因为现实的境况在不断地逼迫人收紧视野,先去关注眼前的物质需要,这使人缺乏理性,粘滞于世俗功利.但有了钱并不能就天圆地方,自足自在,精神生活也是人类所必须的.正如爱德华·杨(E.Young)1728年所写的一首诗"Love and Fame"中所说

"哲人虽然贫穷,
　却是精神富翁;
生性俭朴寡欲,
　小获便有大兴.
愚者贪得无厌,
　炫耀、虚幻、拚命;
追求物质享受,
　每每万事皆空.
贪婪的恶水,
　一旦淹没欢乐的土地,
人生的快乐,
　就会变成梦幻泡影;
就好似耗子,
　钻进了狭窄的风箱,

折命地挣扎，
也解救不了垂危的生灵."

精神的滋养是长期的，正如王国维在其《人间词话》中所说"夫物质的文明，取诸他国，不数十年而具矣.独至精神上之趣味，非千百年之培养与一二天才之出不及此".

当然有人说讲实际、重功利是以西方为榜样，实际上东西方情况完全不同，西方虽然在俗世生活中重功利、重物质，可是在俗世生活外还有宗教生活，可以使人在这个领域内汲取精神的资源，以济俗世生活的偏枯.而在中国，没有超越的领域.一旦受到功利观念的侵袭，则整个人生都陷于不能超拔的境地.

而从某种意义上说，科学特别是自然科学可以暂时充当这种超越的领域.学习科学、热爱科学也可看成是"逃避日常生活的折磨人的粗鲁和绝望的空虚，是由纯个人的存在走向认识客观世界的和谐的形式之一".爱因斯坦曾说过："这种动因，可以同满腹忧愁相比较，这种忧愁不可遏止地促使市民从一般喧嚣和混乱的环境中走入平和的高山区域，在这里，山峰上新鲜而怡静的空气渗入肺腑，那仿佛为世世代代建立的永恒的宁静使他心旷神怡."

这就是爱因斯坦醉心于科学的自我解释，当然这也可以当做老百姓的一种活法的选择.

如果本着这样的目的，选择数论来作科普是再合适不过的了.因为在数论这门最古老，但又是永葆青春的数学分支中，不时会提出精彩的、独特的问题：就其内容而言，它们是如此初等，每个中学生都能理解，它们通常是关于数字世界遵从的某一个很简单的法则，这些法则对于所有已经验证过的特殊情况都是正确的，但是，要求查明它们实际上是否总是正确的.这样，尽管问题看起来简单，但是，为解决它们，往往要用上好几年的时间，有时，甚至困惑历代最著名的学者达几百年.您应会承认，它们使人心向神往.

其次，数学的普及对数学家来说也是至关重要的，往低了说，因为他们花着纳税人的钱在搞研究，他们有义务让纳税人知道他们在干什么.往高了说，社会给了数学家在社会声望排序中很高的地位，数学家也需要向公众解释或说明一下他配占据这一地位.而现在的数学家似乎无不陷入一种矛盾的心理中，一方面是由于庆幸掌握了某种深奥理论和高深技巧所带来的强烈的自豪感，而另一方面却是惧怕自己的理论不被外界理解而产生的懊恼与孤独感.这有点像白居易《卖炭翁》中卖炭翁"可怜身上衣正单，心忧炭贱愿天寒"的两难境地.

无疑，数学是艰深的，现代数学语言是人类现存的最难掌握的、外行人根本无法破译的语言.

1992年2月26日在挪威特隆赫姆举行了纪念挪威著名数学家李(S. Phus

Lie)诞辰150周年的挪威皇家文学理科学院大会上巴思(Nils A. Bass)说:

"用普通语言来叙述一位数学家的工作是一个困难的任务,让我们引用一段西洛(L. Sylow)所做的关于李的纪念演讲:'数学家比任何其他科学家要更加不幸,因为他的工作不能向受过良好教育的一般公众,甚至科学界的一般听众表述和解释,要是能够感受一个数学定理特殊的美或者欣赏这门科学已经完成部分的推理思路,他就必须是位数学家.'"

数学的极端形式化(从布尔巴基开始的),不仅阻碍了一般公众了解和欣赏数学的可能,而且有时甚至连职业数学家都大叫其苦.特别是有许多人病态地将这种形式化倾向发展到了不可理喻的地步.阿诺德(Arnol'd. VLadimir Igorevic)是前苏联著名数学家,他曾成功地证明了希尔伯特第十三问题(不可能用只有两个变数的函数解一般的7次方程),是一位世界级大师.当有一次记者采访他,问他"关于数学,你念些什么?"他回答说:对于我来说,要想读当代数学家们的著述,几乎是不可能的.因为他们不说"彼嘉洗了手",而只是写道:

"存在一个 $t_1<0$,使得这 t_1 在自然的映射 $t_1\to$彼嘉(t_1)之下的像属于脏手组成的集合,并且还存在一个 $t_2, t_1<t_2\leqslant 0$,使得 t_2 在上面得到的映射之下的像属于前一句中定义的集合的补集."

这种令人费解的现象用经济学家"庸俗"的观点解释就是:在市场经济环境下,只有稀缺的才能才可能是高价的.所以社会各行业都有保持从业人员稀少的倾向,于是修高门槛,提高进入成本便是最佳方法,这其中当然包括引入过繁过难的符号(西医用拉丁文写药名,中医用只有行内才认识的天书写药方均同此理).这种形式化倾向在中学数学中也有反映,许多人在评价法国中学数学改革方案时激烈地抨击说:人们往往错误地认为严密的论证就是形式主义.因此,花了很多时间去给出十分抽象的、复杂的定义,使用了过多的符号,以至数学课成了语法修辞课,要学生完成的许多练习往往是毫无趣味的,例如,要教给14岁的学生仿射直线的正式定义是:"一条仿射直线就是一个集合 D,它带有双射 $\sigma D\to R$,这个双射要满足以下一些性质……"这显得相当可笑,以至一个讽刺杂志特地刊登了这个定义,把它作为一个笑料.躲在象牙塔中闭门苦修的数学家与成千上万渴望了解数学的人之间的关系,颇像一个国外幽默所描述的那样.

记者问体育场工作人员彼得,足球对体育有什么贡献."什么贡献?

一点儿也没有!""一点儿也没有?"记者吃惊地问."你能说得详细一点儿吗?""当然."彼得说:"你想想看,足球使22个需要休息的人在场上拚命地跑,而4万个需要运动的人却坐在那里傻看."

所以说,好的数学科普著作是在大众与数学家这两极之间架起一座互相沟通理解的桥梁,数学科普著作会将读者领入一个陌生的领域,告诉人们什么是现代数学,数学家整天在忙些什么.沃尔夫岗·克鲁尔在其《数学的审美观》(见李硯祖主编.艺术与科学(卷一).清华大学出版社,2005.P175)中指出:与其他大多数学科的代表人物相比,数学家在交流过程中受到极其不利条件的影响,法学家、语言学家、生物学家、化学家和物理学家——所有这些人都可以与未入门的门外汉谈论他们的专业.或许他们不能完全解释那些令他们深思的问题,但他们很容易对那些表层的问题给予一个综合的描述,使他们的听众感兴趣并表示感激.

而在数学中完全不是这样!看来要理解数学真需要一种特殊的第六感官.具有这种感官的少数人会热情地投入这门科学,而其余人就会尽可能远离它,或认为它毫无价值.当然这种隔绝也给数学家们一种好处:他们不必像其他专业人员那样,他们很少在社会集合中试图与外行人作专业对话.但是数学家们并不总是甘于这种隔绝状态.

我今天对此感到特别苦恼.因为我如此热切地想给你们说明那种使我迷恋数学的极富魅力的观念.

另外,科普书与所谓的入门书又有一定区别,有些入门书是为准专家写的(如冯克勤先生的《代数数论入门》,千万别以为可以轻易入门).以费马大定理为例,目前有许多关于费马大定理的入门书,但一般人想读懂它们也是非常之难.1977年美国数学史专家纽约大学数学教授哈罗德·爱德华斯(Harol d M.Edwards)曾写了一本著名的入门书《费马的最后定理》(《Fermat's Last Theorem》),长达410页,他本人曾为此获得美国数学会1980年的一项大奖——Steele奖.此书详细介绍了直到20世纪70年代费马大定理的进程,然而近代从法尔廷斯开始的有关费马大定理的工作又都是跟椭圆曲线相联系的,而要想了解什么是椭圆曲线及它与费马大定理的关系,那又得读西尔弗曼(JosephH.Silverman)的《椭圆曲线的算术理论》,真可谓"路漫漫其修远兮".加拿大数学会最新编辑的一本关于费马大定理近期进展的巨著《SEMINAR ON FERMAT'S LAST THEOREM》正在我国数论界流传,它对普通读者来说绝不亚于天书.所以说,对那些有一点数论知识(初等数论、代数数论),不想作研究,仅想了解一下费马大定理的历史的人来说,甚至仅了解一点整数知识而对费马本人感兴趣的读者来说,读本书是合适的.

数学是需要普及的.同时,数学真正意义下的普及又是极其困难的.首先是因为这项工作不具功利性,甚至比纯数学研究还缺乏功利倾向,而基础数学正是由此受到许多国家政府的冷遇.以美国为例,美国 Exxon 研究与工程公司总经理戴维(Edward E.David)博士曾在《科学美国人》中撰文呼吁美国联邦政府加强对数学基础研究的财政支持,尽管到 1989 年美国用于基础数学的经费已达 1 800万美元,虽然对我国来说已近乎天文数字,但和美国其他基础科学相比仍十分不足.所以,在美国,研究数学的人自称为"敢死队",因为相比较而言,那里的数学教授年薪最低,而这些人因热爱数学而不悔,因为有了他们才有了独执世界数学发展之牛耳的美国数学界,而不是单靠投资.现在再来看看数学普及工作,如果说政府不重视基础数学研究是因为数学对整个社会的功利需求无法快速满足,那么数学普及面临的另一个难题是由于它自身的性质所决定的不具独创性,所以这同时又满足不了那些欲在学术圈中"争名逐利"的数学家的"名利欲",其实这是推动数学研究的健康动力之一,是深植于人性之中,无可非议的,所以尽管美国政府已开始重视数学的普及,美国数学会也在大力提倡人们写说明性和解释性的文章,借以普及现代数学,但这项工作一般说来,由于以上原因,在美国数学家眼中的价值不高,所以真正的精品并不多见.中国的情况也是如此:十几年前由中国科学院学部联合办公室、中国工程院学院工作部和《科学时报》共同策划,组织两院院士撰写,由清华大学出版社暨南京大学出版社联合出版的跨世纪科普工程——《院士科普书录》的作者中我们只发现了少数几位数学家:吴文俊、刘应明、林群、张景中 4 位与总数 176 位之比,仅为 2%,这与数学在自然科学中的地位极不相称.

中国科协主席周光召在"高士其星"命名仪式上强调指出:科普工作是整个科学、社会体系中不可缺少的一部分,科普工作的对象不仅包括青少年、领导干部,也包括科学家,科学的发展要求许多跨学科的交流和互相促进.例如,数学界最新的发展除了少数科学家以外鲜有人知,这就需要数学家进行一定的科学普及工作,使他们的研究成果为全社会所享有.

此外,还有一种观点使得数学科普流于文艺化,从而丧失了它的精髓——科学化.有位著名数学家曾对是否是一个好的数学问题提出了一个判别标准是:"它能讲给你的外祖母听."此话固然不错,数学中许多著名猜想,特别是数论中许多猜想真就能讲给老人家听,但千万不要将听懂和真正的理解搞混,虽然表面上结果是一样的,但过程迥然不同,而科普往往追求的是过程.这就像老奶奶不只一次给外孙讲嫦娥奔月的故事,但它和阿波罗登月计划却是完全两回事.以往一提到科普著作很多人会联想到类似凡尔纳科幻小说的笔法,其实随着时代的发展,这种有媚俗之嫌的笔法早已不需要了.前苏联作家和科学家 N.叶费列莫夫说:"优秀的科普书籍和文章吸引着比今天的文艺作品多得多的

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

读者.在这样一些条件下,为了深刻地和独特地影响读者,文艺作品在科学知识普及中的那些老的手法已经不够用了……为了宣传科学知识必须赋以旅游、历险或侦探色彩的时代已一去不复返了.现在,科学在其积累的知识和效用的总和中本身就是有趣的."

数学科普也是要用数学本身的魅力去吸引读者,而绝不是仅靠几条名人轶事.对此中国科技大学的冯克勤教授(他是国内费马问题的权威)有精辟的论述,他曾风趣地讲了一个源于法国数学家托姆(Thom)的一个民间传说.有一次,托姆和两位古人类学家讨论这样一个问题:我们的祖先第一位想保留火种的动机是什么?一位古人类学家说:是由于想吃熟食.另一位则说:是想取暖.而托姆则有不同的看法.他认为:第一个想保留火种的人,首先是由于在黑暗中被美丽的火焰弄得神魂颠倒.我想,对于一位数学教师来说,如果他使班上学生都取得很好的成绩,他是一个努力的教员;只有他能使学生(即使是一部分学生)对数学着了迷,被数学火焰的美妙弄得神魂颠倒,他才是一位真正好的数学教员!

在今天,一本好的科普著作标准,应该是王元教授在其为单墫先生《趣味数论》中所作的序中提出的四个标准,即准、新、浅、趣.然而要想做到这点是很不易的.作者努力以这四个标准为尺度,尽全力悉心写作,虽然作者是学数学出身的,但对数论的学习和研究纯属业余爱好,决非专攻.另外,在费马猜想长达350年的历史中产生了浩如烟海的研究文献,法尔廷斯、怀尔斯等大师的非凡思想又是现代数学博大精深之典范,决非作者编写的几十万字的概括性介绍和评说所能充分表现出来的.

当然,数学科普著作只对那些对数学有兴趣的人才有用,而有些人命里注定要与数学无缘.法国数学家和哲学家朱尔·昂利·彭加勒(Jules Henri Poincaté,1854—1912)在其名著《科学与方法》一书中,提出了一个难解而又具有重大教育意义的问题——数学为什么难以理解?他指出:"有人不理解数学,这是怎么发生的呢?既然数学有助于所有正常思想都能接受的逻辑规则,既然数学的论据建立在对一切人都是共同的原理的基础上,既然没有一个不发疯的人会否认这一点.那么在这里为何出现如此之多不开化的人呢?并非每一个人都能够发明,这绝不是难以理解的;并非每一个人都能够记住一次学到的证明,这也可以略而不提.但是,当把数学推理加以解释之后,并非每一个人都能够理解它.我们考虑这件事,似乎是十分奇怪的."对这个问题彭加勒本人的回答是:(1)记忆力和注意力较差;(2)缺乏数学直觉;(3)过于依赖形象思维、直观思维;(4)缺乏正确的技艺.这四条中似乎只有第四条是可以后天培养的,而其余几条都是天生的,绝非读几本书就可以改变的.

编写这本书的原因有三.

第一，是费马猜想太著名、太令人想往了.如果把现代数学比作夏夜的星空的话，那么众多的数学猜想就是点缀于其间的星座.其中最为耀眼的当首推费马大定理，以至于著名数学家 E.D.克莱姆在《现代数学的现状及其成长》中作了如下的比喻："可以说，这个论断在数学中正如法兰西革命在现代史一样著名."英国数学家阿蒂雅说：

> "我们无法先验地看清楚费马的这个问题的重要性.事实上，它对数学的发展一直有着深远的影响.费马宣称得到了一个证明，但他没有地方把它记下来！在过去 300 年里，许多世界上最好的数学家被这一貌似简单的问题的难度所吸引，致力于证明这个费马的"定理"，但只获得了部分成功.在他们奋力解决这个问题的过程中，引进了许多新的技巧与概念，它们已渗透到大部分数学之中.
>
> "于是费马问题扮演了类似珠穆朗玛峰对登山者(在成功登上之前)所起的作用.它是一个挑战者，试图登上顶峰的企图刺激了新的技巧和技术的发展与完善."

一个问题可能自身具有基本的重要性，它是进一步发展的道路上不可化解的障碍.在这种情形下，任何有关它的解答都代表了进步，都会被人们愉快地接受.然而，在很多情况下，并不能事先预测一个特殊的问题究竟有多重要.如果它很快就被标准的方法所解决，那它就没有多大意思.如果在长时间内用已知的方法对它都无能为力，并被列入经典问题的名单，那它就具备了作为挑战所需的潜在魅力.但是，正如四色问题所提示的，即使达到这种地位也不能保证它不落入虎头蛇尾的境地.判断一个"好的"问题的真正准则在于：在寻求它的解的过程中能产生新的有着广泛应用的强有力的技巧.费马大定理是这种意义下的好问题的典型例子.

在任何给定的时期内，数学都不乏各种类型的众多问题.通往解答的各个台阶，特别是那些包含了本质上的全新的思想的步骤，乃是数学进步的一种主要标志.这种观念已得到公认，因为所有的数学家，不管专业如何，他们本质上都是技巧熟练的艺人，器重用于解决长期未解决问题时的技巧.就是一点不懂数论的人都忍不住要赞美它，我国曾有一部中篇小说就叫《再见吧，费马》，描写了一位证明费马猜想的业余爱好者.

第二，许多事情都是从不知深浅干起的，一个小学生如果知道将来等待着他的将是微分拓扑、积分方程、多复变函数论……非吓得逃离学堂不可.19 世纪 30 年代，法国的一些青年数学家，创立了一个以法国将军命名的布尔巴基学派，他们的著作《数学原理》已出了多卷，被冠以世界数学著作之最，并被几乎所

有的青年数学家奉为圭臬.但这一学派的主力,著名数学家让·迪厄多内(J. Dieudonne)回忆说:"当时我的代数知识不超过预科数学、行列式以及一点方程的可解性和单行曲线,我那时已经从高等师范学校毕业,却不知道什么是理想,而且才刚刚知道什么是群."可以说当时距离写《数学原理》相差甚远,可贵的是,在这种条件下,他开始了并且成功了.

正如迪厄多内所说:"从我个人的经验来看,我相信,假如我没有被迫起草那些我一点都不懂的问题,并且设法使它通过,那我就不可能完成我已经完成的工作的四分之一甚至十分之一."

第三,对于费马大定理这样一个超级题材,世界各国均有大量通俗读物及综述文章来介绍,据台湾高雄大学应用数学系黄文璋教授介绍在台湾可见到的就有康明昌、姚玉强、余文卿、李文卿、于靖、Cook 及 Cox 等人发表的文章.Stewart 是一篇较通俗的文章,假借一位教授与乘坐时空隧道机回来的费马的对话,介绍过去 300 多年来费马最后定理探讨的演变,有趣且易读.Cipra 在《Science》发表关于费马大定理的通俗介绍,并罗列出近年来在该刊物发表的关于费马大定理的文章.Singh 和 Ribet 写的文章也很有趣,将问题的来龙去脉交待得很清楚,Aczel 写了非常好的回顾性专著.

这本小书中所引用的均是国外一些著名数学家有关费马大定理的通俗文章,由于时间关系在编译时参考了国内一些优秀数学家的译文与著作,如胡作玄先生、袁向东先生、冯克勤先生、冯绪宁先生、戴宗铎先生、史树中先生,等等.在此向他们表示最诚挚的谢意,正是由于他们的引介,才使得国人得以了解当今数学主流——代数数论的发展.

另外需指出的是时间的紧迫,使得写作时间很短,错误与不足显然会很多.按说数学著作的写作周期,应该是很长的,这是严谨的治学态度的必然结果.例如前面提到的那套《数学原理》的第一部分整整用了 30 多年才出版完毕,为了完成一卷著作,布尔巴基的成员可以 8 次、10 次地推翻手稿一年修改一次或重写一次,要经过 10 多个年头才最后去付印.虽然这本小书无法和皇皇《数学原本》相比,但严谨的写作态度应该是可以学习的.正如美国经济学家保罗·A·萨缪尔森、威廉·D·诺德豪斯在其名著《经济学》(第 12 版)的结束语中写到:"有的时候,我们在学习经济学中所寻求的是哲人之石,得到的却是沙滩卵石."

对于费马大定理来说,我们又何尝不是如此呢?

刘培杰

2006.10

目录

上篇　攻克费马大定理的历程

第一章　毕达哥拉斯——费马大定理的原始雏形提出者　//　3

1.指环王之子——毕达哥拉斯　//　3
2.神秘组织——毕达哥拉斯盟会　//　6
3.谁能告诉我　//　9
4.高徒之名师　//　10
5.毕达哥拉斯之梦　//　12
6.充满激情的沉思　//　13
7.抽象不敌具体　//　14
8.天国中独立的永恒存在　//　15
9.亲和数的历史　//　17
10.数学史上的第一个定理　//　18
11."万物皆数"　//　25

第二章　费马——孤独的法官　//　27

1.出身贵族的费马　//　27

2.官运亨通的费马 // 28
3.淡泊致远的费马 // 29
4.复兴古典的费马 // 30
5.议而不作的数学家 // 32

第三章 欧拉——多产的数学家 // 35

1.$n=3$ 时,费马定理的初等证明 // 35
2.被印在钞票上的数学家 // 36

第四章 库默尔——"理想"的创造者 // 38

1.老古董——库默尔 // 38
2.哲学的终生爱好者——库默尔 // 40
3."理想数"的引入者——库默尔 // 41
4.承上启下的库默尔 // 44
5.悠闲与幽默的库默尔 // 46

第五章 高斯——数学王子 // 47

1.最后一个使人肃然起敬的峰巅 // 48
2.高斯的《算术研究》及高斯数问题 // 49
3.离散与连续的"不解之缘" // 50
4.高斯的《关于一般曲面的研究》 // 50
5.高斯与正 17 边形 // 51
6.奇妙的高斯数列 // 52
7.多才多艺的数学家 // 53
8.追求完美的人 // 54
9.不受引诱的原因 // 55

第六章 闯入理性王国的女性 // 57

1.首先闯入理性王国的女性——吉尔曼的故事 // 57
2.糊在墙上的微积分——俄国女数学家柯娃列夫斯卡娅的故事 // 63

3.美神没有光顾她的摇篮——近世代数之母诺特 // 70

第七章 法尔廷斯——年轻的菲尔兹奖得主 // 84

1.曲线上的有理点——莫德尔猜想 // 84
2.最年轻的菲尔兹奖得主——法尔廷斯 // 90
3.厚积薄发——法尔廷斯的证明 // 94
4.激发数学——莫德尔猜想与阿贝尔簇理论 // 100
5.众星捧月——灿若群星的代数几何大师 // 107

第八章 布朗——用真心换无穷 // 112

第九章 谷山和志村——天桥飞架 // 127

1.双星巧遇——谷山与志村戏剧性的相识 // 127
2.战时的日本科学 // 128
3.过时的研究内容——模形式 // 129
4.以自己的方式行事 // 131
5.怀尔斯证明的方向——谷山－志村猜想 // 132

第十章 宫冈洋一——百科全书式的学者 // 135

1.费马狂骚曲——因特网传遍世界，UPI电讯冲击日本 // 135
2.从衰微走向辉煌——日本数学的历史与现状 // 138
3.废止和算、专用洋算——中日数学比较 // 141
4."克罗内克青春之梦"的终结者——数论大师高木贞治 // 144
5.日本代数几何三巨头——小平邦彦、广中平佑、森重文 // 147
6.好事成双 // 158
7.对日本数学教育的反思——几位大师对数学教育的评论 // 160

第十一章 怀尔斯——毕其功于一役 // 168

1.世纪末的大结局——怀尔斯的剑桥演讲 // 168

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com