全国高等医药院校药学类规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

杨静化 主编

中国医药科技出版社

全国高等医药院校药学类规划教材

（供药学类专业用）

高 等 数 学

主　　编　杨静化

副 主 编　刘艳杰

编　　委（以姓氏笔画为序）

吕　同（山东大学）

刘艳杰（沈阳药科大学）

孙爱玲（中国药科大学）

张世强（重庆医科大学）

张晓萍（沈阳药科大学）

杨静化（中国药科大学）

郭东星（山西医科大学）

黄榕波（广东药学院）

中国医药科技出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/杨静化主编．—北京：中国医药科技出版社，2006.8
全国高等医药院校药学类规划教材
ISBN 7－5067－3519－9

Ⅰ.高...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.高等数学—医学院校—教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 105369 号

美术编辑　陈君杞
责任校对　张学军
版式设计　郭小平

出版　中国医药科技出版社
地址　北京市海淀区文慧园北路甲22号
邮编　100082
电话　010－62244206
网址　www.cspyp.cn　　www.mpsky.com.cn
规格　787×1092mm 1/16
印张　19 3/4
字数　422千字
印数　1—5000
版次　2006年12月第1版
印次　2006年12月第1次印刷
印刷　世界知识印刷厂
经销　全国各地新华书店
书号　ISBN 7－5067－3519 －9/G·0537
定价　29.00元

全国高等医药院校药学类规划教材编委会

乔延江（北京中医药大学中药学院）
乔海灵（郑州大学药学院）
全　易（江苏工业学院化学工程系）
刘　文（南开大学医学院）
刘巨源（新乡医学院药学系）
刘永琼（武汉工程大学）
刘红宁（江西中医学院）
刘　羽（武汉工程大学）
刘克辛（大连医科大学药学院）
刘利萍（浙江绍兴文理学院化学系）
刘志华（湖南怀化医学高等专科学校药学系）
刘明生（海南医学院药学系）
刘杰书（湖北民族学院医学院）
刘　珂（山东省天然药物工程技术研究中心）
刘俊义（北京大学药学院）
匡海学（黑龙江中医药大学）
印晓星（徐州医学院药学系）
吉　民（东南大学化学化工系）
孙秀云（吉林化学学院制药与应用化学系）
曲有乐（佳木斯大学药学院）
朱大岭（哈尔滨医科大学药学院）
朱景申（华中科技大学同济药学院）
朴虎日（延边大学药学院）
毕开顺（沈阳药科大学）
纪丽莲（淮阴工学院生物工程与化学工程系）
齐香君（陕西科技大学生命科学与工程学院）
吴　勇（四川大学华西药学院）
吴继洲（华中科技大学同济药学院）
吴基良（咸宁学院）
吴清和（广州中医药大学中药学院）
吴满平（复旦大学药学院）
吴　翠（徐州师范大学化学系）
张大方（长春中医学院药学院）

张丹参（河北北方学院基础医学部）
张树杰（安徽技术师范学院动物科学系）
张振中（郑州大学药学院）
张晓丹（哈尔滨商业大学药学院）
张崇禧（吉林农业大学中药材学院）
李元建（中南大学药学院）
李永吉（黑龙江中医药大学药学院）
李青山（山西医科大学药学院）
李春来（莆田学院药学系）
李勤耕（重庆医科大学药学系）
杨世民（西安交通大学药学院）
杨宝峰（哈尔滨医科大学）
杨得坡（中山大学药学院）
沈永嘉（华东理工大学化学与制药学院）
肖顺汉（泸州医学院药学院）
辛　宁（广西中医学院药学院）
邱祖民（南昌大学化学工程系）
陈建伟（南京中医药大学中药学院）
周孝瑞（浙江科技学院生化系）
林　宁（湖北中医学院药学院）
林　强（北京联合大学生物化学工程学院）
欧珠罗布（西藏大学医学院）
罗向红（沈阳药科大学）
罗焕敏（暨南大学药学院）
郁建平（贵州大学化生学院）
郑国华（湖北中医学院药学院）
郑葵阳（徐州医学院药学系）
姚日生（合肥工业大学化工学院）
姜远英（第二军医大学药学院）
娄红祥（山东大学药学院）
娄建石（天津医科大学药学院）
胡永洲（浙江大学药学院）
胡　刚（南京医科大学药学院）

编 写 说 明

经教育部和全国高等医学教育学会批准，全国高等医学教育学会药学教育研究会于2004年4月正式成立，全国高等医药院校药学类规划教材编委会归属于药学教育研究会。为适应我国高等医药教育的改革和发展、满足市场竞争和医药管理体制对药学教育的要求，教材编委会组织编写了“全国高等医药院校药学类规划教材”。

本系列教材是在充分向各医药院校调研、总结归纳当前药学教育迫切需要补充一些教学内容的基础上提出编写宗旨的。本系列教材的编写宗旨是：药学特色鲜明、具有前瞻性、能体现现代医药科技水平的高质量的药学教材。也希望通过教材的编写帮助各院校培养和推出一批优秀的中青年业务骨干，促进药学院校之间的校际间的业务交流。

参加本系列教材的编写单位有：中国药科大学、沈阳药科大学、北京大学药学院、广东药学院、四川大学华西药学院、山西医科大学、华中科技大学同济药学院、复旦大学药学院、西安交通大学药学院、山东大学药学院、浙江大学药学院、北京中医药大学等几十所药学院校。

教材的编写尚存在一些不足，请各院校师生提出指正。

全国高等医药院校药学类
规划教材编写办公室
2004年4月16日

前　言

本书是全国高等医药院校药学类规划教材，供我国高等医药院校药学类专业本科生学习《高等数学》课程时使用，全书教学时间约为120学时，如果只讲授一元微积分的内容大约需要70学时。

作为一门大学基础课教材，我们在编写时根据部分高等医药院校讲授本课程的实际经验，在尽量保持微积分学的科学性和系统性的前提下，以“培养数学抽象思维，启迪想象力；结合医药数学建模，强调实用性；融入数学软件使用，提高计算力”为重点，所以在内容编写上从强调课程理论体系的完整性和习题求解的技巧性转变为注重培养学生的系统思维、实践能力和创新精神，坚持精选、优化教学内容，注意更新教育理念，树立创新性教育观念，全面体现传授知识、培养能力和提高素质相结合的教改方向。

在本书的编写中，我们强调从介绍实际问题的背景知识入手，通过类比、合情推理，注重启迪学生的想象力和加强创新思维的训练。我们把引导学生学习数学抽象、提高数学修养，了解数学应用的背景知识、掌握医药数学建模方法、促进数学与医药学的相互渗透与结合，尽早地掌握优秀的数学计算软件，提高数学应用和数值计算能力作为本教材的主要特色。

本书的编写工作得到中国医药科技出版社的大力帮助和指导，中国药科大学王小平老师做了大量的组织和联络工作，在此，我们谨表示诚挚的谢意。

杨静化

2005年9月于南京

目录

"

第一章

极限

研究事物的变化规律是认识和改造客观世界的需要。函数关系表达了事物间量的变化规律，高等数学以函数为主要研究对象。极限反映函数在某一过程中的变化趋势，是微积分学（calculus）的基本概念和理论基础。

第一节　函　数

一、函数定义

客观世界中存在着两种不同的量：一种是在所考虑的问题或过程中，始终保持某个数值不变的量，称为常量（constant）；另一种是可以取不同数值的量，称为变量（variable）。

例 1.1　正在发育成长的球形细胞的体积 V 与半径 r 的关系为：

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

在这个问题中，V 与 r 是变量，圆周率 π 是常量。

我们常用不等式表示变量的变化范围。假如某天的最高气温为 b，最低气温为 a。用 x 表示当天的气温，则 x 的变化范围是 $a\leqslant x\leqslant b$。这个不等式也可以记作 $[a,\ b]$，称为闭区间（closed interval）。如果不包含端点，则记作 $(a,\ b)$，称为开区间（open interval）。类似地，可定义半开区间（half-closed interval）和无穷区间（infinite interval）。即

$$[a,\ b]=\{x:\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

$$(a,\ b)=\{x:\ a<x<b\}$$

$$(a,\ b]=\{x:\ a<x\leqslant b\}\quad\text{或}\quad[a,\ b)=\{x:\ a\leqslant x<b\}$$

$$(-\infty,\ +\infty)=\{x:\ -\infty<x<+\infty\}$$

在例 1.1 中，细胞的半径 r 有一定的取值范围 $[0,\ b)$。对于任意的 $r\in[0,\ b)$，都能求出与它对应的体积 V，这个 V 值由 r 值唯一确定。当变量 r 与 V 之间存在着这种对应关系时，称它们之间存在函数关系。

定义 1　对于给定的实数集 D 中的每一个值 x，通过确定的法则 f，都有一个唯一的实数 y 与其相对应，记为

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

称法则 f 为 D 上的一个函数（function），集合 D 为函数的定义域（damain of definition），当 x 遍取 D 中一切值时，与 x 对应的 y 值组成的实数集 $M=\{f(x):x\in D\}$ 称为函数的值域（range of function）。

由于 y 的值随 x 而定，故称 x 为自变量（independent variable），y 为因变量（dependent variable），习惯上也称 y 为 x 的函数。当定义域 D 和对应法则 f 确定后，值域 M 也随之确定。因此，D 上的函数也可以看成是从 D 到 M 的一个映射，并称 y 为 x 的象，x 为 y 的原象。

例 1.2 一物体从距离地面为 h 处落下，若不考虑空气阻力，则下落路程 S 与时间 t 之间的关系可表示为

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

此函数的定义域为 $[0,\sqrt{2h/g}]$，值域为 $[0,h]$。

例 1.3 当函数关系由等式 $y^2=x$ 表示时，函数的定义域为 $x\geqslant 0$。但是，与每一个大于零的 x 值对应的 y 值有两个：$y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$。例如，当 $x=4$ 时，$y=2$ 和 $y=-2$，等等。

根据函数的定义，$y=f(x)$ 对定义域内每一个确定的 x 值，只有唯一的一个 y 值与其相对应，称为单值函数（one - valued function）。而例 3 中的函数，对于定义域中的一个 x 值，却能得到两个不同的 y 值。这类由定义域中的一个 x 值，能得到两个以上不同的 y 值的函数，称为多值函数（multiple - valued function）。本书中，若无特别说明，所用的函数都指单值函数。

在平面上取定一个直角坐标系 xOy 之后，每一个函数 $f:D\to M$ 都在平面上有它的图形。更确定地说，在平面上坐标为 $(x,f(x))$ $(\forall x\in D)$ 的全体点集称作 f 的图形或图像。

例 1.4 函数 $y=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{-1,0,1\}$。这种在定义域的不同部分，采用不同表达式表示的函数，称为分段函数（piecewise function）。

分段函数的图形由几段不同的曲线组成，例 1.4 中的分段函数称为符号函数，记为 $\operatorname{sgn}x$。图形见图 1－1。

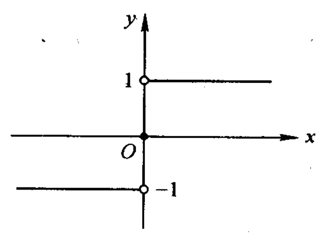

图 1－1

例 1.5 $|x|=x\operatorname{sgn}x$ 称为 x 的绝对值。函数 $y=|x|$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$。图形见图 1－2。

例 1.6 对于任意一个实数 x，取它的不超过 x 的最大整数值，称为对 x 取整，记作 $[x]$。例如 $[0.36]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$ 等等。如果以 x 为自变量，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数。它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 Z。图像见图 1－3。

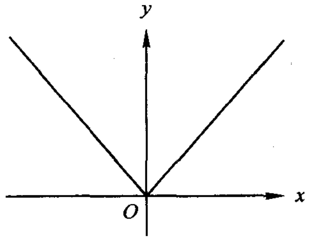

图 1 - 2

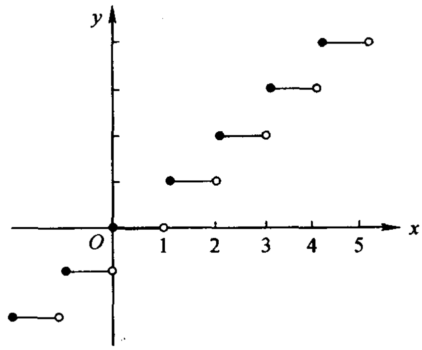

图 1 - 3

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义。若存在一个正数 M，对于所有的 $x \in (a, b)$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内**有界**（bounded），如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内**无界**。

例如，对于任意 $x \in \mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 为实数集），恒有 $|\sin x| \leqslant 1 = M$，因此函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界。而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 内无界，在 $[1, +\infty)$ 上有界。

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递增的；当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调递减的。单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**（tone function）。

单调递增函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线（图 1 - 4）；单调递减函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线（图 1 - 5）。

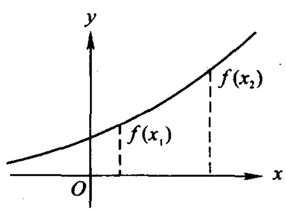

图 1 - 4

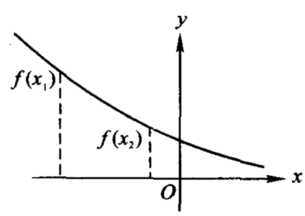

图 1 - 5

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x，都有 $f(-x) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**（even function）。如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x，都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**（odd function）。

在中学数学里已经知道，奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于 y 轴对称。

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在一个不等于零的常数 T，使得对每一个 $x\in D$，只要 $x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数（periodic function），称常数 T 为这个函数的周期。周期函数的周期不是唯一的，通常所讲的周期指它的最小正周期。例如，$2k\pi$（$k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$）都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而最小正周期为 2π。

三、复合函数 反函数

为了求出竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数，应用公式

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{1-1}$$

式中，m 为物体的质量，v 为竖直上抛物体在时间 t 的速度。若上抛时的初速度为 v_0，则竖直上抛物体在时间 t 的速度由

$$v=v_0-gt \tag{1-2}$$

唯一确定。将此唯一确定的 v 代入（1-1）式，得到竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数关系：

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\ (v_0-gt)^2 \tag{1-3}$$

（1-3）式所表示的函数关系是由（1-2）式代入（1-1）式后“复合”而成。在微积分学中经常会遇到这类函数。

定义 2 设 $y=f(u)$ 是数集 E 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是从数集 D 到数集 E 的函数，对于每一个 $x\in D$，经过中间变量 u，都有唯一的 y 与之对应，从而得到 D 上的一个新函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

称为数集 D 上的复合函数（compound function）。其中，u 称为中间变量（intermediate variable），显然，$u=\varphi(x)$ 的值域含在 $y=f(u)$ 的定义域中。

例 1.7 设 $y=\lg u$，$u=1-x^2$，则有复合函数 $y=\lg(1-x^2)$。由于 $\lg u$ 的定义域为 $u>0$，只有 $1-x^2>0$，即 $x\in(-1,\ 1)$ 时，复合函数 $y=\lg(1-x^2)$ 才有意义。故这个函数的定义域为 $(-1,\ 1)$。

例 1.8 复合函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 由 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 复合而成。但是函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$，与函数 $u=2+x^2$ 的值域 $u\geqslant2$ 无公共部分。因此，这个复合函数不存在。

在微积分的计算中，经常遇到复合函数，并且需要分析它由哪几个函数复合而成。

定义 3 对于函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$，如果满足条件：

(1) $y=f(x)$ 的值域包含在 $x=g(y)$ 的定义域内，并且

$$g[f(x)]=x \tag{1-4}$$

(2) $x=g(y)$ 的值域包含在 $y=f(x)$ 的定义域内，并且

$$f[g(y)]=y \tag{1-5}$$

则称函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 互为反函数（inverse function），习惯上将 $x=g(y)$ 改写成 $y=g(x)$ 后，记作 $y=g(x)=f^{-1}(x)$，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数。

实际上，要验证函数 $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 是否互为反函数。根据（1-4）、（1-5）两式，只要验证等式 $g[f(x)]=x$ 和 $f[g(y)]=y$ 即可。

例 1.9 对于函数 $f(x)=2x+3$，$g(x)=\frac{x-3}{2}$ 有

$$f[g(x)]=2\frac{x-3}{2}+3=x;\qquad g[f(x)]=\frac{(2x+3)-3}{2}=x。$$

因此，$f(x)=2x+3$ 和 $g(x)=\frac{x-3}{2}$ 互为反函数。

例 1.10 对于函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\sqrt{x}$，当 $x=2$ 时，$g[f(2)]=2$，等式 $g[f(x)]=x$ 成立；当 $x=-2$ 时，$g[f(-2)]=2$，等式 $g[f(x)]=x$ 不成立。产生这种情况的原因，是由于函数 $f(x)=x^2$ 在大于零的每一个函数值，对应着两个不同的自变量值。

定理 1 若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，则一定存在反函数。

证明：设函数 $f(x)$ 单调递增。对于 D 中的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1>x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$；当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$。所以，只有 $x_1=x_2$ 时，才有 $f(x_1)=f(x_2)$，即每一个函数值 y 与唯一的 x 值相对应。如果以 y 为自变量，x 为 y 的函数，这个新函数就是 $y=f(x)$ 的反函数。对函数 $f(x)$ 是单调递减的情形，其证明是类似的。

对于一些不存在反函数的函数，限制它的定义域，使之成为单调函数后，就可以有反函数。例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增。因此，将它的定义域限制为 $[0,+\infty)$ 后，就存在反函数 $g(x)=\sqrt{x}$。

四、初等函数

（一）基本初等函数

中学数学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数都是经常遇到的简单函数，将它们与常量合在一起，统称为基本初等函数（basic elementary function）。现在扼要地复习如下：

1. 常量　$y=C$（C 为常量）

定义域为 $(-\infty,+\infty)$；值域为 $\{C\}$。图形为平行于 x 轴，截距等于 C 的直线。

2. 幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 为实数）

定义域、值域与图形随 α 值不同而异。但不论 α 为何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，所有图形都通过点 (1，1)。(图 1-6，图 1-7)

3. 指数函数　$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$。图形通过点 (0，1)。当 $a>1$ 时，函数单调递增，当 $0<a<1$ 时，函数单调递减（图 1-8）。