1957年上海市
中等学校学生数学竞賽
問題集

1957年上海市第二届

中等学校学生数学竞賽委員会編

新知識出版社

一 算術與代數

1. 一个自然数与3的和是5的倍数，与3的差是6的倍数；間这个自然数最小的值是多少？

答：这个自然数最小是27.

2. 某河从西向东順次有A，B，C三个等高的桥，B桥恰在A，C兩桥的中途．甲船从西向东順次通过三桥时，船頂恰巧能通过各桥洞．乙船从东向西航行，在甲船通过A桥洞的同时也恰巧能通过C桥洞．兩船相遇于B桥，这时乙船頂比桥洞頂低1尺，后来乙船通过A桥洞时，船頂比桥洞頂低1尺6寸．另有丙船当甲船通过A桥时，因船頂高出B桥洞頂9寸，不能通过．問当甲船通过C桥时，丙船能否通过B桥？（假定水面始終成一个平面，水位的降落也不一致．）

答：丙船那时仍不能通过B桥．

3. 假設有一个四位数，它被一位数来除，有图式：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & \times & \times & \times & \times & \times \\ \cline{6-6}
- & \times & \times & & & \times\ \times\ \times \\ \cline{1-5}
 & & & \times & \times & \\
 & & - & \times & \times & \\ \cline{3-5}
\end{array}
$$

被另一个一位数来除，有图式：

```
   × × × × | ×
 −   ×     |------
-----------| × × ×
     × ×
 −     ×
  --------
       × ×
     − × ×
     -----
```

試确定这个四位数.

4. 已給一个数 123456789101112l3……99100，从其中划去 100 个数字，使得所剩下的数是最大的.

5. 試求共有多少个四位数，它加上 400 以后就成为一个自然数的平方数.

答: 共有 64 个四位数加 400 以后是一个平方数.

6. 是否有正整数 m 和 n 满足方程 $m^2+1954=n^2$?

答: 沒有.

7. 求出四位数，等于它的四个数字之和的 4 次方. 証明解是唯一的.

答: 2401.

8. 求两个数，它們的和是 667，又它們的最小公倍数被最大公約数来除所得的商数等于 120.

答: (1) 552, 115; (2) 435, 232.

9. 要二次多項式 $mx^2+(m-1)x+(m-1)$ 之值恒有負数，問 m 之值应如何?

$$答:\quad m<-\frac{1}{3}.$$

10. 方程 $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ 是否有实根存在?

答： 沒有实根.

11. 求方程 $x^2+2x\sin(xy)+1=0$ 的一切实値解

答：$\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi. \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi. \end{cases}$

12. 已知方程

$$x^2+Ax+B=0,$$
$$x^2+Cx+D=0,$$

的根的模数小于1.

証明方程 $x^2+\dfrac{A+C}{2}x+\dfrac{B+D}{2}=0$ 的根的模数也小于1.

A, B, C, D 都是实数.

13. 証明 $3^{2n+2}-8n-9$ 对任何自然数 n 皆能被64整除.

14. 証明 $n^{n-1}-1$ 对大于1的任何整数 n 能被 $(n-1)^2$ 整除.

15. 証明恒等式 $1!1+2!2+\cdots\cdots+n!n=(n+1)!-1$.

16. 某軍队長 l 公里，在进行中末排某士兵因事赶赴头排，到达头排后立刻赶回，当他回到末排时，全队已进行 l 公里，若軍队和士兵的行走速度都不变.求这个士兵所行路的長.

答： $(1+\sqrt{2})l$ 公里.

17. 若 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$,

求証 $\dfrac{1}{a^{2m+1}}+\dfrac{1}{b^{2m+1}}+\dfrac{1}{c^{2m+1}}=\dfrac{1}{a^{2m+1}+b^{2m+1}+c^{2m+1}}$.

18. m 及 n 都是自然数，比較 $m+n$ 及 mn 兩数的大小.

答： (1) 当 m 及 n 兩数中至少有一数等于1时，必有 $mn<m+n$.

(2) 当 m 及 n 兩数均等于 2，且仅于此时，有 $mn=m+n$。

(3) 当 m, n 兩数之一不小于 2，另一数不小于 3 时，必有 $mn>m+n$。

19. A、B、C 三人各有豆若干粒，先由 A 給 B、C 所有豆数，再由 B 給 A、C 所有豆数，更由 C 給 A、B 所有豆数，如是三次，每人恰各有 64 粒. 問原来三人各有豆多少粒?

答：A 原有 104 粒，B 原有 56 粒，C 原有 32 粒.

20. 解二次方程 $x^2+px+q=0$ 所得兩根恰为 p 及 q，問这种方程是怎样的?

答：所得方程为 (1) $x^2=0$，(2) $x^2+x-2=0$.

21. a, b, c 都是正实数，p, q, r 是实数，問 p, q, r 在何种关系时，$(a+b+c)(ap^2+bq^2+cr^2)=(ap+bq+cr)^2$ 成立.

答：必須 $p=q=r$.

22. 若 a 为自然数，証明 $a(a+1)+1$ 必非平方数，但 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ 必为平方数.

23. $f(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$， 求 $f(\sqrt{2}+1)$ 之值.

答：$f(\sqrt{2}+1)=4$.

24. 求下面級数的 n 項的和.

$$S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots\cdots+n}.$$

答：$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$.

25. 若 $A^2+B^2+C^2\neq0$，且 A, B, C 均为实数.

証明 三个二次方程

$$\begin{cases} Ax^2+2Bx+C=0 & (1) \\ Bx^2+2Cx+A=0 & (2) \\ Cx^2+2Ax+B=0 & (3) \end{cases}$$

不可能均得等根.

26. $y=\dfrac{2x-m}{x^2-4x+3}$ 当 m 为何种实数值时，对于任意給 y 的实数值，x 的值恒有实数?

答: $2<m<6$.

27. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 以 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 除之，設 $\alpha\neq\beta$，求它的剩余.

答: 剩余 $R(x)=\dfrac{[f(\alpha)-f(\beta)]x+[\beta f(\alpha)-\alpha f(\beta)]}{(\beta-\alpha)}$.

28. 設 $a>b>0$，求証 $a^ab^b>a^bb^a$.

29. 化簡下式

$$e^{2a(\log_e a-\log_e b)/(a-b)}\cdot e^{-2b(\log_e a-\log_e b)/(a-b)}$$

答: $\dfrac{a^2}{b^2}$.

30. A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个角，x, y, z 为任意实数，求証:

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C.$$

31. 如 $2(p+q+r)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$，

且 $x^2+\alpha x-p=0$ 的兩根为 β 及 γ.

$x^2+\beta x-q=0$ 的兩根为 γ 及 α.

求以 α 及 β 为根的二次方程.

答: 所求二次方程为 $x^2+\gamma x-r=0$.

32. 自然数列依下法分組: 第一組一个数，第二組兩个数，

第三組三个数，……，第 n 組 n 个数，依次排列，如

1； 2, 3； 4, 5, 6； 7, 8, 9, 10； ……

求証第 n 組的 n 个数的和是 $\frac{1}{2}(n^3+n)$.

33. 解 $\frac{m(x+a)}{x+b}+\frac{n(x+b)}{x+a}=m+n$.

$$答:\begin{cases} a\neq b\begin{cases} m\neq n \text{ 时}, x=\dfrac{nb-ma}{m-n}. \\ m=n \text{ 时方程无根}. \end{cases} \\ a=b, \text{ 則 } x \text{ 可为 } -a \text{ 或 } -b \text{ 以外的任何值}. \end{cases}$$

34. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 成 G. P.

且 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$,

$$R=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n},$$

$$P=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n,$$

求証：(1) $\frac{S}{R}=a_1a_n$,

(2) $P^2R^2=S^n$.

35. 若 $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a 8+\log_a x+\log_a y$, 求 x, y 之值.

答： $x=1$, $y=2$.

36. 設一个一元四次方程的最高次項系数为 1，常数項为 36，已知这方程的两个根分别等于一等边三角形的底和高，而另两根分别等于另一等边三角形的底和高．且这两等边三角形面积的比为 1：3．求这一元四次方程．

答： $x^4-(5+3\sqrt{3})x^3+(12+15\sqrt{3})x^2$
$-6(5+3\sqrt{3})x+36=0$.

37. 已知 $A=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$,

$B=1+2+3+\cdots\cdots+n$,

其中 $n>1$, 試証 B 不能整除 A.

38. 已知 $\dfrac{a}{c}=\sin\theta \qquad (c>0) \qquad (1)$

$$\frac{b}{c}=\cos\theta \qquad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

$$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a^a \qquad (3)$$

求証 $(\log_e a)^2=\log_e(c+b)\cdot\log_e(c-b)$.

39. 解方程組

$$\begin{cases} 6xyz+xy+2yz+3zx=-35, \\ 7xyz+3xy+yz+3zx=-51, \\ 9xyz+2xy+4yz+3zx=-43. \end{cases}$$

答: (1) $\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4, \\ z=-3. \end{cases}$

40. 若整数 $n>1$, 証明决无正整数 x, y, z 能滿足方程 $x^n+y^n=z^n$, 但其中有一个 x 或 y 不大于 n 者.

41. 若 a,b,c 同时为一个等差級数和一个等比級数的第 p 項,第 q 項,第 r 項.

求証 $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=1$.

42. 設有分式 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$,以任何值代入时,$f(x)$均不变.則它的必要而充分的条件是什么?但 $d\neq0$, $dx+e\neq0$.

答: $a=0$, $\dfrac{b}{d}=\dfrac{c}{e}$.

43. 試解方程組,并討論之.

$$\begin{cases}(m+1)x+y=m,\\3x+(m-1)y=2.\end{cases}$$

答：$\begin{cases}m\neq\pm2\text{ 时，一介，}\\m=2\text{ 时，无限介，}\\m=-2\text{ 时，无介.}\end{cases}$

44. 若对任何 $i\,(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，$a_i>0$，$a_1a_2\cdots a_n=1$，証明 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n$.

45. 設三个未知数 x，y，z 适合以下的方程：

$$x+y+z=a,$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2,$$
$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}.$$

求 $x^3+y^3+z^3$ 之值.

答：$\dfrac{-a^3+3ca^2+3b^2a-3b^2c}{2}$.

46. 解方程組

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\x_2+x_3+x_4=9,\\x_3+x_4+x_5=3,\\x_4+x_5+x_6=-3,\\x_5+x_6+x_7=-9,\\x_6+x_7+x_8=-6,\\x_7+x_8+x_1=-2,\\x_8+x_1+x_2=2.\end{cases}$$

答：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，$x_4=4$，$x_5=-4$，
$x_6=-3$，$x_7=-2$，$x_8=-1$.

47. 若$(2n+1)$是一个質数．試証 1^2，2^2，3^2，……，n^2 被$(2n+1)$除，得不同的余数.

48. 解方程組

$$\begin{cases} yz=ax, \\ zx=by, \\ xy=cz. \end{cases}$$ 其中 a, b, c 为正实数.

答: (1)$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x=\sqrt{bc}, \\ y=\sqrt{ac}, \\ z=\sqrt{ab}. \end{cases}$ (3)$\begin{cases} x=\sqrt{bc}, \\ y=-\sqrt{ac}, \\ z=-\sqrt{ab}. \end{cases}$

(4)$\begin{cases} x=-\sqrt{bc}, \\ y=\sqrt{ac}, \\ z=-\sqrt{ab}. \end{cases}$ (5)$\begin{cases} x=-\sqrt{bc}, \\ y=-\sqrt{ac}, \\ z=\sqrt{ab}. \end{cases}$

49. 解方程 $6^x+4^x=9^x$.

答: $x=\dfrac{\lg(1+\sqrt{5})-\lg 2}{\lg 3-\lg 2}$.

50. 解方程 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

答: $5\leqslant x\leqslant 10$.

51. 求函数 $y=\cos 2x-4\sin x$ 的最小值与最大值.

答: 最小值为 -5, 最大值为 3.

52. 設有 100 个 a_1, a_2, ……, a_{100}, 滿足条件:

$$\begin{aligned} &a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0, \\ &a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0, \\ &a_3-3a_4+2a_5\geqslant 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &a_{99}-3a_{100}+2a_1\geqslant 0, \\ &a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0. \end{aligned}$$

証明所有这些 a_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, 100$)都相等.

53. 解方程組

$$\begin{cases} x^2=a^2+(y-z)^2, \\ y^2=b^2+(z-x)^2, \\ z^2=c^2+(x-y)^2. \end{cases}$$

答： $(1)\begin{cases} x=\dfrac{ab^2+ac^2}{2bc}, \\ y=\dfrac{a^2b+bc^2}{2ac}, \\ z=\dfrac{a^2c+b^2c}{2ab}. \end{cases}$ $(2)\begin{cases} x=-\dfrac{ab^2+ac^2}{2bc}, \\ y=-\dfrac{a^2b+bc^2}{2ac}, \\ z=-\dfrac{a^2c+b^2c}{2ab}. \end{cases}$

54. 設兩个二次式 ax^2+bx+c, cx^2+bx+a 有一次公因式. 則有 $(a+c)^2=b^2$, 但 $a\neq c$.

55. 解 $x^4+3x^3+6x^2+6x+4=0$,

答： $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$, $-1\pm i$.

56. 設方程 $\sqrt{2x^2-5x+2}+\sqrt{x^2-7x+6}=\sqrt{2x^2-3x+1}+\sqrt{x^2-9x+7}$,

（1）不用解方程判定它在实数范圍內是否有解?

（2）解出方程的根，不用代入驗根方法，如何判定它們是方程的根或是增根.

答： $x=\dfrac{1}{2}$, $x=-5$.

57. 把方程 $(2x+7)^4+(2x+3)^4=82$ 先化为准二次方程再介之.

答： -2, -3, $\dfrac{-5\pm 5i}{2}$.

58. 已知 $\lg 2673=3.42700$, $\lg 3267=3.51415$, $\lg 3=0.47714$. 求 $\lg 11$.

答： $\lg 11=1.04143$.

59. 設 n 为正奇数,試証$(1+x)^n$ 展开式的中央兩項的系数都等于

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots n}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot2^{\frac{n-1}{2}}$$

60. 試証 $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots\cdots-(-1)^nC_n^n=0$.

二 几何与三角

1. 設有兩个凸多边形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 和 $B_1B_2B_3\cdots\cdots B_n$,已知 $A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3$, $\cdots\cdots$, $A_nA_1=B_nB_1$, 而一个多边形有$(n-3)$个角等于另一多边形的对应的角，間这兩个多边形是否全等?

答: 全等的.

2. 在空間是否有这样的四点 A, B, C, D 使 $AB=CD=8$ 厘米，$AC=BD=10$ 厘米，$AD=BC=13$ 厘米?

答: 沒有这样的四点存在.

3. 已知四条直綫 m_1, m_2, m_3, m_4 依次相交于 O 点.过直綫 m_1 上任意一点 A_1 引平行于 m_4 的直綫而交直綫 m_2 于 A_2, 过 A_2 引直綫平行于 m_1 而交 m_3 于 A_3, 过 A_3 引平行于 m_2 的直綫交 m_4 于 A_4, 过 A_4 引平行于 m_3 的直綫交 m_1 于点B.

証明 $$OB<\frac{OA_1}{2}.$$

4. 若三角形的三条边之長成等差級数,証明这三角形的內切圓半徑等于某一边上高的 $\frac{1}{3}$.

5. 証明任一直角三角形的面积,等于斜边被內切圓切点所分成兩綫段的乘积.

6. 已給三平行直綫和其中一条上面的綫段 AB, 利用直尺

来使 AB 扩大为兩倍.

7. 求作所設圓的內接梯形，已知梯形的高及平行兩边之差.

8. 試作切一定直綫及一定圓，而且中心在另一定直綫上的圓.

9. 試証正四面体的二面角等于边成 $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 的三角形中小銳角的兩倍.

10. 試在所設平面上求点，令由这点至平面外所設之兩点的联綫与此平面成等角，求这种点的軌迹.

答: 軌迹是一个圓，它的特殊情形是一直綫.

11. 設一定長綫段的兩端，常在垂直的兩异面直綫上运动. 求这定長綫段中点的軌迹.

答: 軌迹为垂直平分兩异面直綫的公垂綫的平面上的一个圓.

12. 在定綫段 AB 上取任意点 C，以 AC，CB 为底向同側作正三角形 ACD 及 CBE，連 AE 和 BD 兩直綫，求这兩直綫交点 P 之軌迹.

答: 軌迹为以 AB 为弦的兩个对称的弓形弧.

13. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，从一点 P 向 $\triangle ABC$ 的三頂点引直綫，令 $\angle APB=\angle APC$，求 P 点之軌迹.

答: 軌迹为(1) $\angle BAC$ 的二等分綫，(2) BC 与 CB 的延長綫，(3) $\triangle ABC$ 外接圓的 BC 弧.

14. 过梯形外的一定点 P，求作一直綫將这梯形的面积分为兩等分.

15. 求作一等边三角形，使它的三个頂点分別落在三个同心圓的圓周上.

16. 設有兩定圓 M，N，以动点 O 为圓心的圓周通过 M，N

兩圓直徑之兩端．求 O 点之軌迹．

答： 軌迹是一直綫．

17．AB 为圓 O 的定弦，C，D 为 $ACDB$ 弧上兩定点，求在共軛弧上作一点 P，使兩弦 PC，PD 截 AB 一部分 MN 的長等于定長 d．

18．已知四边形的兩对角綫及一双对边，及这双对边中点的联結綫段．求作这个四边形．

19．已知兩定圓 A 及 B，和一定直綫 l，求作一直綫截 A，B 兩圓的弦相等并平行于直綫 l．

20．已給綫段 p，q，l．用代数作图法作出下面方程組中的 x 和 y 綫段．

$$\begin{cases} x : y = p^2 : q^2, \\ x + y = l. \end{cases}$$

21．圓内接四边形 $ABCD$ 中，兩双对边的交点为 E 及 F，由 E 及 F 分別作圓的切綫 ET 和 FS．則有 $ET^2+FS^2=EF^2$．

22．求与已知点 A，B，C，D 成等积三角形 PAB，PCD 的 P 点之軌迹．

23．大圓半徑为小圓半徑之兩倍，当小圓在大圓内滚动时，求小圓周上一定点的軌迹．

24．已知兩定点 M，N，試于定直綫 l 上求一点 P，使 $MP+PN$ 为定長．

25．三角形 ABC 繞 AB 边旋轉一周，求

(1) AC，BC 所产生面积之和，

(2) $\triangle ABC$ 所产生的体积，

(3) 当 $\angle C$ 及 AB 为定量时，在何种情形上題(2)所产生的体积为最大．

26．試証等腰三角形中，重心与垂心的距离为

$$\pm 2m\left(\frac{l}{k}-\frac{1}{3}\right) \text{或} \ 2m\left(\frac{l}{k}+\frac{1}{3}\right).$$

这里 m 为底上中綫之長，k 为腰上的高之長，l 为垂心至腰上的距离．

27．有一个三稜錐 $V-ABC$，G 为底 ABC 的重心，

求証 $3(VA^2+VB^2+VC^2)-(AB^2+BC^2+CA^2)=9\overline{VG}^2$．

28．諸多面体之稜，不可能有 7 条，試証之．

29．直角三角形的三边为 a, b, c．且 $c>b>a$．設 V_c, V_b, V_a 分别以 c, b, a 为軸旋轉所成的体积．試比較（1）V_c, V_b, V_a，（2）T_c, T_b, T_a 的大小．（T_c, T_b; T_a 表示旋轉体的全面积．）

答： （1）$V_a>V_b>V_c$．（2）$T_a>T_b>T_c$．

30．圓內接正七边形 $ABCDEFG$，P 是 AG 弧上的任意一点．試証：

$$PA+PC+PE+PG=PB+PD+PF.$$

31．适合（a）$2^{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$，（b）$2^{\sin^2\alpha}=\cos\alpha$ 的角是否存在？

答： 角 α 不存在．

32．解方程組

$$\begin{cases} \sin^3 x=\dfrac{1}{2}\sin y, \\ \cos^3 x=\dfrac{1}{2}\cos y. \end{cases}$$

其中 x, y 是銳角．

答： $x=\dfrac{\pi}{4}$, $y=\dfrac{\pi}{4}$.

33．設等腰三角形 ABC 中，$AB=BC=b$, $AC=a$, $\angle ABC=20^\circ$，証明 $a^3+b^3=3ab^2$．

34. 解方程

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}.$$

答: $x=\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{12}$.

35. 在$\triangle ABC$中,如 $a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B=(a+b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$,

求証 $a=b$.

36. 在半徑为 R 的圓中,有內接四边形 $ABCD$, 如 AB 弧 $=\alpha$, BC 弧 $=\beta$, CD 弧 $=\gamma$.

求証 四边形 $ABCD$ 的面积为

$$2R^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

37. A, B, C 是一直路上的三点, AB 与 BC 各等于1公里,从三点分别遙望一塔, A 見塔在正北东, B 見塔在正东, C 見塔在南偏东 60°. 求証塔与路的最短距离为$\frac{7+5\sqrt{3}}{13}$公里.

38. 求証 $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

39. 一船向北航行500公里后,向东航行500公里,再向南航行500公里,适回到原处.問这船开始时位置若何?

40. 如果一个三角形的三个角的余弦平方和等于1, 那末它是一个直角三角形.

41. 解 $\sin 2x\sin 5x+\sin 4x\sin 11x+\sin 9x\sin 24x=0$.

答: $x=n\cdot 12^\circ$ 或 $n\cdot 10^\circ$ (n 为整数).

42. 設三角形的三边为 m^2+m+1, $2m+1$, m^2-1. 試証这三角形的最大角为$\frac{2}{3}\pi$.

43. 在$\triangle ABC$中，若$\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$，問是何种三角形？

答： 等腰三角形或直角三角形.

44. 三角形ABC的角平分綫AD, BE, CF; $\angle ADB=\alpha$, $\angle BEC=\beta$, $\angle CFA=\gamma$;

求証 $a\sin 2\alpha+b\sin 2\beta+c\sin 2\gamma=0$.

45. 若$\cos\theta-\sin\theta=b$, $\cos 3\theta+\sin 3\theta=a$.

求証 $a=3b-2b^3$.

46. 設三角形ABC的三边为a, b, c;

若 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

求証 $c=(a+b)\sec\theta\sin\dfrac{C}{2}$.

47. 試証

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}$$

$$+\cdots\cdots+\arcsin\left[\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n^2+n}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

48. 試求半徑为a与b之相交兩圓的公弦，設它們的交角为θ.

答： 公弦之長为$\dfrac{2ab\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}$.

49. 若 $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}\theta)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg}\theta)$,

求証 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{1}{4}[2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}]$,

但n为小于-2及大于1的整数.