

重力場的平均方法

苏联 A·H·齐霍諾夫等著



石油工业出版社

內 容 提 要

这本小册子介绍用各种半径的圆板求得平均重力场后所得的区域重力场和局部重力场的物理意义和地质意义。

为了说明问题，作者还举了划分区域重力场和局部重力场的具体例子以供参考。

本册子可供从事地球物理勘探工作的工程技术人员及高等学校地球物理专业教师的参考。

А.Н.ТИХОНОВ, Ю.Д.БУЛАНЖЕ

ОБ ОСРЕДНЕНИИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

根据苏联科学院(АКАДЕМИЯ НАУК СССР)

1945年莫斯科版翻译

統一書号： 15037·346

重力场的平均方法

蔡 隆 健译

*

石油工业出版社出版(地址：北京六铺炕石油工业部内)

北京市书刊出版业营业许可出字第083号

北京市印刷一厂排印 新华书店发行

*

787×1092 $\frac{1}{2}$ 开本 * 印张1 $\frac{1}{2}$ * 18千字 * 印1—680册

1953年1月北京第1版第1次印刷

定价(11)0.24元

551
T365

重力場的平均方法

在這篇論文中，確定了用不同圖板平均了重力圖后求得的區域重力場和局部重力場的物理意義。在某些情況下，還闡明了這些重力場的地質意義。

一般說來，重力圖是這樣一種圖，它是表示在變化比較大的所謂區域背景上（或區域場上）襯托着的微小重力起伏的。與區域場不同的重力場，通常稱為局部重力場。這種局部重力場，一般是一些由埋藏不深的干擾質量所引起的比較小的異常。

區域重力場的區分總是和某些所觀測的重力場的平均有關並且會帶有主觀成分，這些主觀成分，首先決定於工作任務所確定的平均範圍，其次是所採用的平均方法。有時，當區分觀測場為區域場和局部場時，由於觀測場的複雜性和它的區域部份強度微弱而發生很大的困難。

我們的任務，就是要確定用不同圖板求出的平均重力場的物理意義，從而了解其地質意義。

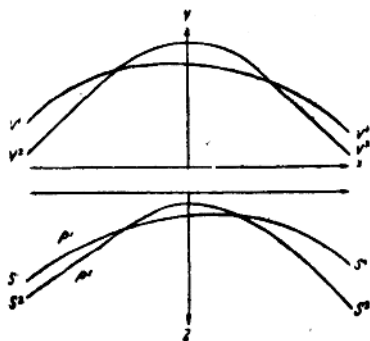


圖 1

§ 1.

1.1. 假設，我們在地表下有一界面 S_1 ，它上面地層的密度為 ρ_1 下面地層密度為 ρ_2 。用 $V_1(x)$ 表示這個構造（或任意由 S_1 界面形成的岩體）在地表面的重力勢。再假設，我們有另外一個界面 S_2 （接近 S_1 ），其上下也是一些具有密度為 ρ_1 和 ρ_2 的地層，它在地表的重力勢為 $V_2(x)$ 。

在求重力勢 $V_1(x)$ 和 $V_2(x)$ 的平均時，在最簡單的情況下，我們就取二值之和的一半。

$$V(x) = \frac{V_1(x) + V_2(x)}{2}. \quad (1,1)$$

顯然，函數 $V(x)$ 是在界面 S_1 和 S_2 上密度為 ρ_1 、界面 S_1 和 S_2 下密度為 ρ_2 、界面 S_1 與 S_2 之間密度為 $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ 的構造的重力勢。

這可以用下面的方法說明。以 ρ' 表示在第一种情況下地層密度的函數，即

對 S_1 面以上各點 $\rho' = \rho_1$,

對 S_1 面以下各點 $\rho' = \rho_2$ 。

同樣，以 ρ'' 表示在第二種情況下地層密度的函數，即

對 S_2 面以上各點 $\rho'' = \rho_1$,

對 S_2 面以下各點 $\rho'' = \rho_2$ 。

因此可以認為，函數

$$V(x) = \frac{V_1(x) + V_2(x)}{2} \quad (1,2)$$

是具有密度 $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ 的地層的重力勢。

实际上, 重力势 V_1 和 V_2 可分别按充满质量的同一体积的积分

$$V_1 = \iiint_B \frac{\rho'}{r} d\tau,$$

$$V_2 = \iiint_B \frac{\rho''}{r} d\tau$$

来确定, 显然

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} = \iiint_B \frac{\rho' + \rho''}{2} \cdot \frac{1}{r} d\tau = \iiint_B \frac{\rho}{r} d\tau,$$

如果 $\rho = \frac{\rho' + \rho''}{2}$.

1.2. 如用同样的方法求 n 个重力势的平均时, 我們就能得到具有平均密度的地層的准确重力势。

假設, 我們以任何一种点子板来求重力势圖的平均, 取圖板上所有点的重力势的算术平均值做为点子板的中心的值。

不难看出, 所得到的 O 点的函数即为地層的重力势。如果把這個圖板放在深度为 z 的地方, 同时把它的

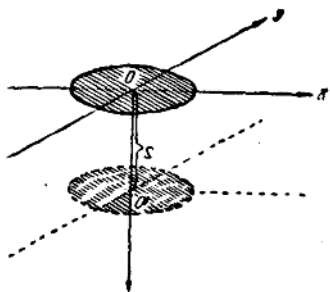


圖 2

中心置于 O' 点上, 則該地層在深度为 z 的 O' 点(圖 2)上的密度就是圖板上所有点的密度的算术平均值。

总之, 借助任意綫性运算方法求得了重力势的平均(例如按圓形圖板取加权平均或用具有一定权的任意面积的积分)后就不难用上述方法确定求重力势圖平均值的意义。

实际上，按某一函数取加权平均得出表式

$$\bar{V}(x_0, y_0, 0) = \iint V(x, y, 0) F(x - x_0, y - y_0) dx dy, (1, 3)$$

式中权 $F(\alpha, \beta) \geq 0$ —— 为一已知的函数并且应当。

$$\iint F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = 1.$$

我們把积分区取为無穷大，同时在必要时假設 F 值等于 0。

重力势 $V(x, y, z)$ 的平均值。

$$\begin{aligned} \bar{V}(x_0, y_0, 0) &= \iint F(x - x_0, y - y_0) \\ &\left\{ \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r(x - \xi, y - \eta, 0 - \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \right\} dx dy \\ &= \iint F(x - x_0, y - y_0) \\ &\left\{ \iiint \frac{\rho(x - x_0 + \alpha, y - y_0 + \beta, \zeta) d\alpha d\beta d\zeta}{r(x_0 - \alpha, y_0 - \beta, \zeta)} \right\} dx dy, \end{aligned}$$

式中 α 和 β 由下列关系式确定：

$$x_0 - \alpha = x - \xi \text{ 和 } y_0 - \beta = y - \eta.$$

改变积分順序

$$\begin{aligned} &\bar{V}(x_0, y_0, 0) \\ &= \iiint \frac{1}{r(x_0 - \alpha, y_0 - \beta, \zeta)} \left\{ \iint F(x - x_0, y - y_0) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \rho(x - x_0 + \alpha, y - y_0 + \beta, \zeta) \cdot dx dy \right\} d\alpha d\beta d\zeta \\ &= \iiint \frac{1}{r(x_0 - \alpha, y_0 - \beta, \zeta)} \left\{ \iint F(\xi' - \alpha, \eta' - \beta) \rho \right. \\ &\quad \left. (\xi', \eta', \zeta) d\xi' d\eta' \right\} d\alpha d\beta d\zeta \end{aligned}$$

表式

$$\iint F(\xi' - \alpha, \eta' - \beta) \rho(\xi', \eta', \xi) d\xi' d\eta'$$

按照(1,3)式为当采用权 F 时在深度为 ξ 的水平面上的密度平均值。因此,

$$\bar{V}(x_0, y_0, 0) = \iiint \frac{\bar{\rho}(\alpha, \beta, \xi)}{r(x_0 - \alpha, y_0 - \beta, \xi)} d\alpha d\beta d\xi,$$

即重力势的平均值就是由密度平均值得到的重力势。

如果我们不是研究重力势而是研究它的任意次的微分, 例如研究重力加速度, 等于

$$g = \frac{\partial V}{\partial z},$$

则所有上述论断仍都有效。

1.3. 如地表下两个物体的重力场在規定精度內沒有区别, 我們就可以認為这两个物体的重力是相当的。

前面已經談到, 某一物体的重力場平均圖就是根据原有的重力圖用平均密度的方法求出的新物体的真实重力圖。在不同情况下, 这些物体可以成为重力不相当的, 也可以成为重力相当的。如果某一物体位于距地表不深的地方, 則在它的重力影响圖上必有显明的起伏。但如該物体处于很深的地方, 則它的重力起伏形狀將是平緩而展开的。当用一定大小的圖板平均时, 在第一种情况下我們所得的圖有重大的变化, 可是在第二种情况下所得的圖仍和原来的一样。但是, 应当注意無論是第一种情况或是第二种情况, 物体的密度都是被平均过的, 然而在第二种情况下, 新的“平均过”的物体在重力上却和原来的物体相当了。

在利用重力異常圖勘探矿产时，常常發生关于确定相当深处密度相差很大的两个地層接触面的問題。

解决这个問題，常常由于上部地層中包含有平均密度不同的干扰体所造成的不均匀性而复杂化，同时，靠近地表的異常質量还引起了極大的干扰影响。

根据重力異常的外形，我們常能推測引起这种異常的質量的埋藏深度(如異常延展的面不大，一般表示干扰質量層位不深)，但是，要分出类似的局部異常是困难的，何况他們又是彼此挤在一起而且成果圖又是非常复杂的。

在同一区域計算了重力異常的平均后，我們就能得到一个与平均密度相适应的重力圖。当合理地选择平均方法时，可以这样考虑，就是圖上小的局部異常和相应的異常密度会被显著地展平，而与接触面相应的延展面大的異常并不会有大的改变。应当注意到，靠近接触面的密度也已經平均过，并且很陡的分界綫已經成为密度变化比較小的帶。但是，这种分界綫的改变，基本上并没改变深处的密度分佈情况并显示出了由两个互相接触的均匀地層構成的重力相当的構造。

被平均过的重力場决定于平均的方法，即圖板的选择(形狀,大小,权)和地区的地質条件。当平均圖板的面积比干扰体小时，在很大程度上將保存着它們的屏蔽作用。相反，当平均面积和接触面主要形狀的面积相等时，所有对象都有被过分展平的可能。显然對我們來講，如干扰体的大小和我們感兴趣的接触面形狀大小相似时，我們也不是总能够选择到合适的平均面积的。

所以，如果有可能合理选择平均面积时，可以使其显著減少干扰体的屏蔽效应而得到主要由深層接触面特性确定的重

力異常圖。

1.4. 当利用重力圖时，常常需要將重力場分为区域場和局部場。这些術語还没有确切的定义，但根据一般理解，区域場和深層物体的影响有关而局部場則和較淺的物体有关。有时，区域重力場也可能是由有另外的原因造成的，例如岩層密度在水平方向的变化(岩相的变化)。

划分区域場总是多多少少和展平重力起伏的微小特征方法有关。同时，所謂異常的“微小”特征的概念和个别研究的問題有关，因而就和事先規定的平均范围有关。通常，区域場的划分或是用手，或是选择相当簡單的面，例如平面。在这些种情况下，局部場就成为觀測場和所采用的区域場之間的差了。

我們所談的平均重力場的方法，就是可能分出区域場的方法，因而也就是分出局部場的方法。不难看出，用这种方法得出的局部場，就是很精確的異常質量的重力場，它的密度就是实际的密度和用所选的平均方法所得的密度之間的差。

§ 2.

2.0. 圖板形狀的选择，决定于被平均的重力場的特性和所研究的專門目的。具有固定权的圓形圖板，是最簡單和最常見的圖板形狀。在某些情況下，当需要着重質量的延伸方向时，例如当分出一个由拖長構造造成的区域場时，可以用橢圓形的圖板。

在第一节中，讓我們来研究几个用圓形和橢圓形圖板来平均不同的簡單形狀的理論例子。

2.1. 我們要說明如何用圓形圖板来平均球狀干扰体的間

題。為此，首先要確定某些有關平均球狀干擾體的原理。

大家知道，由不同形狀和質量的物體產生的異常，可能是彼此完全一樣。例如，球形干擾體異常就和集中在它中心的這個球的全部質量所引起的異常完全一樣。平均異常的方法，並不決定於這個異常是由什麼東西引起的。因此我們就可不必去研究球形干擾體的異常，而應該特別注意研究點狀質量引起的異常。

我們已經知道，被平均過的重力起伏圖給了我們一幅精確的重力異常圖，其重力異常分佈情況與用同一圖板平均過的異常質量的分佈情況一致。

現在，我們先來談一下地面下深度 z 處質量為 M 的點。在用半徑為 R 的圓形圖板求出了這個質量的平均後，我們求得了一個在 z 深處半徑為 R 的平盤，其中心在曾為質量 M 所佔據之點上。這個盤的密度為常數，等於

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}.$$

因此，我們可以不必去平均已知的重力場，只須採用 z 處的平盤在地面上所產生的垂直方向引力來代替。在球心上面被平均過的重力場的表式如下

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \frac{\partial V}{\partial z} = -k^2 \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi = \\ &= 2k^2 \frac{M}{R^2} \left[\sqrt{\frac{z}{z^2 + R^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

另外，在這一點上沒有平均過的重力場的值為

$$g = -k^2 \frac{M}{z^2}.$$

可以用下面的比值做为平均度 ε :

$$\varepsilon = \frac{g}{g_0} = 2 \frac{1}{\mu^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right], \quad (2,1)$$

式中
$$\mu = \frac{R}{z}.$$

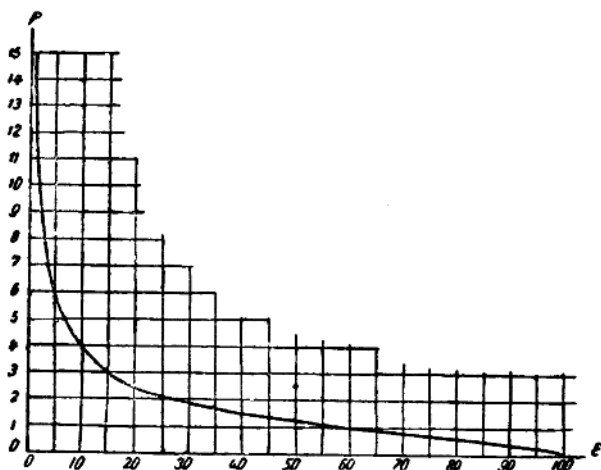


圖 3 根据已知球形干扰体中心埋藏深度 z 和已知的質量中心上的平均度 ε 来确定圓形圖板半徑 $R = z\mu(\varepsilon)$ 的圖表

如果我們的目的是平均一个中心在深度 z 处的球形干扰体,使剩余的重力場不大于 $P\%$ (此处 $P = 100\varepsilon$),則我們应当使

$$R = z\mu(\varepsilon), \quad (2,2)$$

式中 $\mu(\varepsilon)$ ——为下列方程式的解

$$\varepsilon = 2 \frac{1}{u^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right].$$

在圖 3 中，給出函数 $\varepsilon(u)$ 的圖綫，同时它还給了我們未知函数 $u(\varepsilon)$ 的圖綫。

用公式(2,2)和函数 $u(\varepsilon)$ 的圖綫(圖 3)，能容易地确定在展平球形干扰体引起的重力时所用的平均圓形圖板的半徑，要求达到的精度为 $P\%$ ($P=100\varepsilon$)。

例如，如果我們希望展平被某一球形干扰体引起的異常，其精度到 10% ($\varepsilon=0.10$)，則如函数 $u(\varepsilon)$ 的圖綫所示，求平均时用的圖板半徑 R ，应当大約四倍于異常質量埋藏中心的深度 z 。

2.2. 用任何一种形狀的圖板去計算球形質量所引起的平均重力異常，这个問題和前面求点質量所引起的平均重力異常的情形一样。当用橢圓形圖板平均这样的異常时，我們可以得到一个和圖板的橢圓盤相适应的重力場，該圓盤是水平的，其中心放在質量的集中点上。我們以 z 表示中心点的埋藏深度。所求得的橢圓盤的密度等于

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi ab}, \quad (2,3)$$

式中 M ——点的質量，等于球的全部質量 而 S 为所选的橢圓圖板的面积。

在这种情况下，我們的任务就是要計算比值 $\varepsilon = \frac{\bar{g}}{g}$ ，这里 $\bar{g}$ ——在球心上面平均过的重力異常值，而 g ——沒有平均过的这个異常的值，等于

$$g = -k^2 \frac{M}{z^2}.$$

这样一来，計算平均度 ε 的問題，就成为計算距离橢圓盤中心上面 z 处的某点上的橢圓盤的垂直方向引力。

現在來計算 $\bar{g}_z$ 。距橢圓盤中心上面 z 处的橢圓盤的重力勢等于

$$V = k^2 \sigma \iint \frac{dS}{r} = k^2 \sigma \int_0^{\rho(\varphi)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho d\rho d\varphi,$$

式中

$$\rho(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}} \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right),$$

也就是具有半軸 a 和 b 的極坐標橢圓方程式。

橢圓盤引力的关系式

$$\bar{g}_z = \frac{dV}{dz} = -k^2 \sigma z \int_0^{\rho(\varphi)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \rho d\rho d\varphi.$$

对 ρ 进行积分，得到

$$\begin{aligned} \bar{g}_z &= k^2 \sigma z \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\varphi) + z^2}} - \frac{1}{z} \right\} \\ &= 4k^2 \sigma \left\{ z \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + z^2(1 - e^2 \cos^2 \varphi)}} d\varphi - \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= -2\pi k^2 \sigma \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \right\}, \quad (2,4) \end{aligned}$$

式中
$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}}, \beta = \alpha e. \quad (2,5)$$

由此得到下面的 ε 的表式

$$\varepsilon = \frac{\tilde{g}}{g} = 2 \frac{z^2}{ab} \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \right\}. \quad (2,6)$$

决定于独立变数 z, a 与 b 的 ε 值, 实际上仅决定于用两个独立变数对第三个的比值表示的两个参变数。为方便起见取参变比值为

$$\mu = \frac{r}{z}, \eta = \frac{b}{a}, \quad (2,7)$$

式中
$$r = \sqrt{ab}. \quad (2,8)$$

也就是平均半径, 即和该椭圆大小相等的圆的半径。

用此参变数可得如下的 ε 的表式:

$$\varepsilon(\mu, \eta) = 2 \frac{1}{\mu^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2 \eta}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi}{1 - \beta^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \right\}. \quad (2,9)$$

应特别注意, 对于圆形图板, 这个公式可变为我们已知的表式(2,1):

$$\varepsilon(\mu) = 2 \frac{1}{\mu^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right\},$$

因为当 $a=b$ 时

$$\eta = 1, e = 0, \beta = 0.$$

函数 $\varepsilon(\mu, \eta)$ 的计算结果示于图 4。

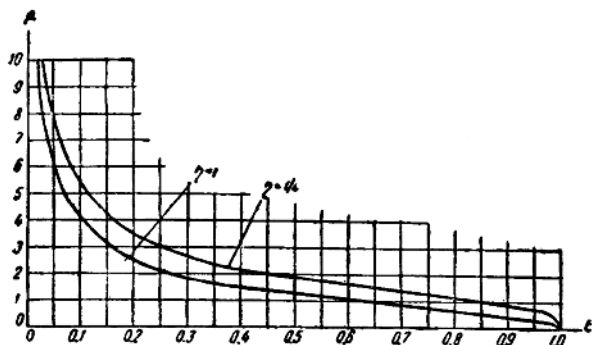


圖 4 根据給定的球形干扰体中心的埋藏深度 z 、半軸比 $\eta = \frac{b}{a}$ 和質量中心上面的平均度 ε 来确定橢圓圖板平均半徑 $\bar{r} = z\mu(\varepsilon, \eta)$ 的圖表

在这个圖表上，对应于 $\eta = 1$ 的曲綫，即相当于橢圓轉变为圓时的曲綫，是和前节中的 $\varepsilon(\mu)$ 曲綫一样的。

为了求得能給我們下列圖板平均半徑

$$\bar{r} = z\mu(\varepsilon, \eta),$$

如平均度 ε 和半軸比 η 都已規定，那就可以按給定的 ε 和 η 来确定 $\mu(\varepsilon, \eta)$ 的值。

容易看出(圖 4)，当求球狀(或点狀)質量的平均时，在它埋藏中心上面的平均度很少决定于橢圓的半軸比。但是，不能由此做出結論，以为用圓形和橢圓(当 $a < 4b$ 时)圖板求平均时，对所有求平均異常的面积都能得到同样的結果。当干扰質量埋藏深度不大时，这点特別明显。

2.3. 現在讓我們来談一談在 z 深处水平面上半徑为 r 的圓盤。此时主要問題是計算为此圓盤所引起的在它中心上面的平均重力場。

這個問題也就是解決比較普通的問題——關於計算旋轉體引起的平均重力場——的過渡步驟。實際上，在用水平面劃分旋轉體為很多薄盤時，我們可以認為旋轉體的場近似於這些圓盤引起的異常的總合。

當解這個問題時，像前面的情況一樣，我們就不用計算平均重力場，只須計算平均了的質量的重力場。用半徑為 R 的圓形圖板去計算半徑為 r 的平盤的平均時，結果可以得到在同一深度半徑為 $r+R$ 的平盤。一般地講，這個平盤的密度是變的，並且是距圓盤中心距離 c 的函數

這個函數 $\sigma(c)$ 的值等於

$$\sigma(c) = \sigma_0 \frac{S_1}{S}, \quad (2,10)$$

式中 σ_0 = 所平均的圓盤的密度； S —— 平均圖板的面積，等於 πR^2 ；而 S_1 —— 被平均圖板遮蓋的圖盤的部份面積。這個面積 S_1 是圓盤中心和平均圖板中心間的距離 c 的函數。

如 $R > r$ 和 $R < r$ 時，可能發生兩種情況。我們現在來詳細地討論第一種情況 ($R > r$)。第二種情況的研究和第一種的一樣，不需特殊說明。如果 $c < R - r$ ，則 $S_1(c)$ 為一常數，因為平均圖板遮蓋了整個圓盤。同時

$$\sigma(c) = \sigma_0 \frac{r^2}{R^2} \quad (\text{對於 } c < R - r).$$

如果 $c > R + r$ ，則

$$\sigma(c) = 0 \quad (\text{對於 } c > R + r),$$

因為平均圖板不和被平均的圓盤相割。當 c 由 $R - r$ 變到 $R + r$ 時，則 $\sigma(c)$ 由 $\sigma_0 \frac{r^2}{R^2}$ 變到 0。

在被平均了的圓盤 (半徑 $R + r$) 中心上面的引力值如下

列关系式

$$\bar{g} = -2\pi k^2 \int_0^{R+r} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sigma(r) r dr, \quad (2,11)$$

我們以前应用的平均度 ε , 等于

$$\varepsilon = \frac{\bar{g}}{g_0},$$

式中 g_0 ——在均匀圓盤中心上面的引力, 等于

$$g_0 = 2k^2 \frac{M}{r^2} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} - 1 \right\}. \quad (2,12)$$

計算 ε 得出

$$\varepsilon = \frac{\bar{g}}{g} = 2 \frac{1}{\mu^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu^2} \int_{1-\rho}^{1+\rho} \sqrt{\frac{[(1+\rho)^2 - \xi^2][\xi^2 - (1-\rho)^2]}{1 + \xi^2 \mu^2}} \frac{d\xi}{\xi} \right\} \cdot \frac{\rho^2 \mu^2 \sqrt{1 + \mu^2 \rho^2}}{2(\sqrt{1 + \mu^2 \rho^2} - 1)}, \quad (2,13)$$

$$\text{式中 } \mu = \frac{R}{z}, r = \frac{r}{z}, \rho = \frac{r}{\mu} = \frac{r}{R}, \xi = \frac{c}{R}. \quad (2,14)$$

对于 ε 这个表式的詳細演算, 由于步驟繁瑣而且屬於純技術性質的, 所以將留在附录中討論。

可以指出, 所得到的公式, 当 ρ 趋近于 0 时, 就变为我們以前平均点狀質量时計算 ε 的公式(2,1)。

同样, 对于 $r > R$ 我們得到公式