数学

王诚祥　马家祚　主编

高考专题复习系列丛书

名师专题

排列组合和概率

解题方法与技巧

如何

解排列组合问题

如何

正确运用概率公式

如何

求随机变量的期望和方差

河海大学出版社

MINGSHI ZHUANTI

排列组合和概率

解题方法与技巧

主　编

王诚祥　马家祚

副主编

魏丽光

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

排列组合和概率/王诚祥,马家祚主编. —南京:河海大学出版社,2006.8
(名师专题)
ISBN 7-5630-2281-3

Ⅰ.排... Ⅱ.①王... ②马... Ⅲ.①排列—高中—教学参考资料 ②组合—高中—教学参考资料 ③概率—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 094033 号

书　　名/排列组合和概率
书　　号/ISBN 7-5630-2281-3/O·129
责任编辑/代江滨
策划编辑/代江滨
责任校对/刘凌波
封面设计/黄　炜
出　　版/河海大学出版社
地　　址/南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　　话/(025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)
印　　刷/南京捷迅印务有限公司
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32　4.5 印张　90 千字
版　　次/2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
定　　价/7.00 元

前 言

排列数、组合数的计算和应用是数学计数问题中的一个中心议题，也是学习概率论知识的基础. 概率是研究随机现象的规律性的学科，它为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法，同时为统计学的发展提供了理论基础. 而概率统计则是一门以概率理论为基础研究如何收集、整理、分析数据的学科，它可以为人们制定决策提供依据.

相对于高中数学其他内容而言，这一部分内容有其独自的特点：

(1) 排列组合问题需要有较强的“组合思维”，巧妙的“组合方法”和熟练的“组合技巧”；

(2) 概率统计有其独特的概念，新颖的思想方法，以及与确定性思维迥然不同的统计思维.

因此，这一部分内容的学习，常常是一些同学学习中的难点.

学习这一部分内容，要注意以下几个方面：

(1) 分类加法计数原理和分步乘法计数原理是解决计数问题的两个最基本、最重要的原理，也是贯穿排列组合问题的一根主线；

(2) 要掌握一些常见的排列组合问题的解题方法和解题策略，善于将不同的问题转化为同一模型去解决；

(3) 能准确辨析一些常见的概率模型(如等可能性概率模型、独立重复试验模型等)，正确应用有关的概率公式；

(4) 理解离散型随机变量的分布列、期望和方差的概念，能根据概念进行有关的计算；

(5) 了解正态分布的意义和主要性质，会将非标准型正态分

布和标准型正态分布进行互化,会查正态分布表.

纵观近几年全国各地的高考试题,排列组合、概率统计始终是高考的热点之一,一般是一道客观性试题,一道解答题,而且命题有如下特点:

(1) 客观性试题中单纯排列组合题所占的比例下降,而以排列组合为基础的概率题比重加大,对统计、抽样的方法也时有考查,问题背景灵活多变,难度稳中有升.

(2) 解答题有如下4个特点:

① 以独立重复试验为基础的随机变量的分布列、期望值等问题成为解答题重头戏;

② 注意对随机变量的基本含义的理解及其期望和方差的求法;

③ 几何分布、"类几何分布"成为新宠,正态分布也时有出现;

④ 锐意创新,在知识网络、方法网络交汇处设计问题.

根据以上对教材和高考试题的分析,本书将这部分内容分为三讲进行复习.为了切实提高本书的实效,编者在选材和编排上都作了一些努力:

(1) 内容选择,紧扣高考"脉搏".

从题型的确定,到例题、习题的编选,完全顺从高考的最新动态,其中的例题、习题精选自近年的高考题,名市名校的模拟试题以及根据编者对高考的理解,适应复习需要所编拟的原创题.

(2) 体例安排,突出思路方法.

在例题的解答中,前有"分析",后有"说明".在分析中,帮助读者理清解题思路,教给读者分析问题的方法;在说明中,总结解题方法,揭示解题规律,指出注意事项,以便读者举一反三,触类旁通,切实掌握各种题型的解法.

(3) 表现手法,符合思维规律.

逻辑的严谨性和思维的抽象性,给同学们的数学学习造成了很大的困难,不少同学对数学的基础知识,基本的技能技巧和思想

方法等知识体系不够清晰,也不能灵活运用,为此,本书每一讲都列出了本讲的知识和方法精要,同时,采用了让题目“说话”的策略.把解题的理论和解题的实践相结合,让基础知识、技能技巧和思想方法融于题目之中,再通过精当的点评加以归纳总结,使那些抽象的数学思想方法变为看得见、学得会、用得上的东西.

为了提高本书的使用效果,我们希望读者能与编者配合,变被动阅读为主动学习.在阅读例题之前,先自己试着思考,然后再看分析与解答.在研读解答以后再想想有哪些收获,仔细推敲题后的说明.我们恳切地希望本书能成为你数学学习的良师益友.

书中的不当之处,敬请读者批评指正.

编　者

2006 年 6 月

目　录

第一讲 排列组合、二项式定理

第一节 分类计数原理和分步计数原理

(一) 知识精要

1. 分类计数原理

完成一件事，有 n 类办法. 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

2. 分步计数原理

完成一件事，需要分成几个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种不同的方法.

说明：

(1) 分类计数原理和分步计数原理是排列组合问题的理论基础，也是组合思维的核心，它们的区别一个是“分类”，一个是“分步”. 分类计数原理中的 n 类办法是各自独立的，每一类办法中的每一种方法都可以独立地完成这件事，因而用加法. 分步计数原理中的 n 个步骤是前后联系、缺一不可的，当且仅当依次完成了这几

步，这件事才能完成，因而用乘法.

(2) 使用两个原理解题时，首先要根据题意确定是分类，还是分步，或者是分类分步综合应用. 如果分类，首先要确定分类的依据，按照确定的依据分类，应做到不重复不遗漏. 实际问题中常常是先分类，每一类中再分步(如例 8，例 9).

(3) 运用两个原理解题，不仅要注意根据题意正确分类，合理分步，还特别要注意元素能否重复，谁是事件的主体，谁选择谁(如例 5).

(二) 主要的数学思想方法

(1) 分类讨论的思想方法. 分类讨论，化整为零，各个击破的数学思想方法在排列组合问题中体现得尤为突出，是组合思维的核心.

(2) 等价转化的思想方法. 这一思想方法也是排列组合的一个特点，如例 3 转化为求数列的通项问题，例 7“数字化”后转化为不定方程解的个数问题，这种思想方法在后面的排列问题中体现得更为突出.

(3) 递推的思想方法. 如例 3，用递推的思想求得数列$\{a_n\}$的递推公式，在此基础上求出 a_{10}.

(三) 例题

1. 分类计数原理的应用

例 1 (1) 从正方体的 6 个面中选取 3 个面，其中有 2 个面不相邻的选法共有 ( )

A. 8 种　　B. 12 种　　C. 16 种　　D. 20 种

(2) 从 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 这 8 个数中任选 3 个不同的数组成二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的系数 a, b, c，则可确定坐标原点在抛物线内部的抛物线有 ( )

A. 72 条　　B. 96 条　　C. 128 条　　D. 144 条

(3) 某城市举行"市长杯"足球比赛,由全市的 6 支企业职工业余足球队参加,比赛组委会规定:比赛采取单循环制进行,每个队胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分. 在今年即将举行的"市长杯"足球比赛中,参加比赛的市工商银行队的可能的积分值有 ( )

A. 13 种　B. 14 种　C. 15 种　D. 16 种

(4) 用 10 元、5 元和 1 元的人民币来支付 20 元的货款,不同的支付方法有 ( )

A. 8 种　B. 9 种　C. 10 种　D. 11 种

解 (1) B. 正方体的 6 个面中,不相邻的两个面有 3 对,每一对再由其余的 4 个面中的任一个面,组成适合题意的 3 个面,所以不同的选法共有 12 种,故选 B.

(2) D. 由题设,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两个交点分别在原点的两侧,即方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根异号,因面 $\frac{c}{a}<0$,分两类:第一类 $a>0$, $c<0$,共有 $4\times3\times6=72$ 种不同的选法;第二类 $a<0$, $c>0$,共有 $3\times4\times6=72$ 种不同的选法,适合题意的不同的抛物线有 144 条,故选 D.

(3) C. 根据比赛规则,市工商银行队要同其余的 5 个队各赛一场,设其中胜 x_1 场,平 x_2 场,负 x_3 场,则积分 $y=3x_1+x_2$,其中 $x_1, x_2, x_3\in\mathbf{N}$ 且 $x_1+x_2+x_3=5$, $\therefore 0\leqslant y\leqslant 15$, $y\in\mathbf{N}$ 且 $y\neq 14$($\because 3x_1+x_2=14\Rightarrow x_1+x_2\geqslant 6$),故选 C.

(4) B. 设付 20 元货款所用 10 元币 x_1 张,5 元币 x_2 张,1 元币 x_3 张,则 $x_1, x_2, x_3\in\mathbf{N}$ 且 $10x_1+5x_2+x_3=20$. 不同的三元有序数组 (x_1, x_2, x_3) 分别为 $(0, 0, 20)$、$(0, 1, 15)$、$(0, 2, 10)$、$(0, 3, 5)$、$(0, 4, 0)$、$(1, 0, 10)$、$(1, 1, 5)$、$(1, 2, 0)$、$(2, 0, 0)$. 故选 B.

说明 本例 4 问都是直接应用分类计数原理,其中的第(2)问数形结合,应用了二次函数和一元二次方程的有关知识;第(3)问

是对积分的取值范围逐一分析，排除 $y=14$ 的情形；第(4)小问对三元有序数组(x_1, x_2, x_3)分类逐一列举，这种枚举法也是解排列组合题常用的方法.

例 2 设坐标平面内有一个质点从原点出发，沿 x 轴跳动，每次向正方向或负方向跳一个单位，经过 5 次跳动质点落在点 $A(a, 0)$(允许重复过此点)处，且 $|OA|=3$，则质点不同的运动方法共有________种.(用数字作答)

解 10 种. $\because |OA|=3$, $\therefore a=\pm 3$，若 $a=3$，则所跳 5 步中 4 步向右，1 步向左，共有 5 种不同的运动方法；同理，若 $a=-3$，也有 5 种不同的运动方法，$\therefore$ 共有 10 种不同的运动方法.

说明 本题根据 $|OA|=3$ 得 $a=\pm 3$，然后分类讨论求解.

例 3 有一楼梯共 10 级，若每次只能跨上一级或二级，要走上第 10 级，不同的走法种数是 ( )

A. 108 B. 78 C. 89 D. 91

解 C. 设走上第 n 级的不同的走法为 a_n，则走上第 $n+2$ 级的不同的走法可分为两类：第一类是从第 n 级跨 2 级到第 $n+2$ 级，这一类不同的走法有 a_n 种；第二类是从第 $n+1$ 级跨 1 级到第 $n+2$ 级，这一类不同的走法有 a_{n+1} 种，$\therefore a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，又 $a_1=1$，$a_2=2$，$\therefore a_{10}=89$. 故选 C.

说明 本题运用了递推的思想，对 a_{n+2} 种方法进行分类，得到了数列 $\{a_n\}$ 的递推公式 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，再根据初始值 $a_1=1$，$a_2=2$，得到 $a_{10}=89$.

2. 分步计数原理的应用

例 4 (1)(2005 年天津高考题)从集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ 中的 m 和 n，则能落在矩形区域 $B=\{(x, y) \mid |x|<11, |y|<9\}$ 内的椭圆的个数为 ( )

A. 43 B. 72 C. 86 D. 90

(2) 如果某礼堂共有 4 个门，规定从一个门进，另一个门出，

那么不同的走法共有 ( )

A. 81 种 B. 64 种 C. 16 种 D. 12 种

(3) 如果将两条异面直线看成一对,那么六棱锥的棱所在的 12 条直线中共有异面直线 ( )

A. 12 对 B. 24 对 C. 36 对 D. 48 对

(4) 如果 $A=\{-1, 0, 1\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$, f 表示从集合 A 到集合 B 的映射,那么满足 $x+f(x)+xf(x)$ 为奇数的映射的个数是 ( )

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

解 (1) B. 分两步,第一步确定 m 的值, $\because |x|<11$, $\therefore m$ 可取 1, 2, …, 10 这 10 个不同的值,即第一步有 10 种方法;第二步确定 n 的值, $\because |y|<9$, $\therefore n$ 可取 1, 2,…, 8 这 8 个不同的值,即第二步有 8 种方法,但 $m\neq n$,否则方程不表示椭圆. $\therefore$ 去掉(m, n)为$(1, 1)$, $(2, 2)$, …, $(8, 8)$这 8 种情形,共有 $10\times 8-8=72$ 个不同的椭圆,故选 B.

(2) D. 分两步:第一步,进门有 4 种方法;第二步,出门有 3 种方法,共有 $4\times 3=12$ 种方法,故选 D.

(3) B. 六棱锥的 6 条侧棱交于一点,其中任两条侧棱都共面,底面 6 条边也共面,将从 12 条直线中选取一对异面直线分两步进行:第一步,从底面上选取 1 条直线;第二步,从侧棱中选取一条直线. $\because$ 从底面上任选一条棱,它与 6 条侧棱中的 4 条侧棱都异面,由分步计数原理,共有 $6\times 4=24$ 对异面直线,故选 B.

(4) C. 令 $h(x)=x+f(x)+xf(x)=x+(x+1)f(x)$. 分三步:第一步确定 $f(-1)$, $\because h(-1)=-1+0f(-1)$ 为奇数, $\therefore$ 确定 $f(-1)$ 有 5 种方法;第二步确定 $f(0)$, $\because h(0)=f(0)$ 为奇数, $\therefore$ 确定 $f(0)$ 有 2 种方法;第三步确定 $f(1)$, $\because h(1)=1+2f(1)$ 为奇数, $\therefore$ 确定 $f(1)$ 也有 5 种不同的方法,根据分步计数原理,不同的映射个数为 $5\times 2\times 5=50$ 个.

说明 本例 4 问都是直接应用分步计数原理破题. 其中的

第(1)问要注意剔除 $m=n$(此时方程表示圆)的情形;第(4)问要求理解映射的概念,确定从集合 A 到集合 B 的一个映射,实质上就是确定集合 A 中每一个元素在集合 B 中的象,据此第(4)问的映射 f 的确定须分为 3 步,即依次确定 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

例 5 4 个同学报名参加三个不同的比赛项目:(1)每个同学限报一项,有多少种不同的报名方法?(2)若每个项目限一名同学报名,有多少种不同的报名方法?(3)若每个项目限一名同学报名,且每个同学至多报一项,有多少种不同的报名方法?

解 (1)若每个同学限报一项,则这 4 个同学都各有 3 种不同的报名方法,根据乘法原理,共有 $3^4=81$ 种不同的报名方法;(2)若每个项目限一名同学报名,则每个项目都有 4 种不同的报名方法,根据乘法原理,共有 $4^3=64$ 种不同的报名方法;(3)若每个项目限一名同学报名,且每名同学至多报一项,则这三个项目的不同的报名方法依次是 4, 3 和 2,根据乘法原理,不同的报名方法有 $4\times3\times2=24$ 种.

说明 (1)本例中的第(1)、(2)两问是元素允许重复的排列问题,而第(3)问是元素不允许重复的排列问题,所以对于排列组合问题,一定要字斟句酌,审清题意;(2)对本题的 3 问要注意搞清谁是主体,由谁选择谁,第(1)问学生是主体,学生选择比赛项目,而第(2)、(3)问比赛项目是主体,比赛项目选择学生.

例 6 (1)现有 5 张 1 元币、4 张 1 角币、1 张 5 分币,2 张 2 分币,可以组成________种不同的币值(一张不取,即 0 元 0 角 0 分不计在内).

(2) 630 的正约数(包括 1 和 630 在内)的个数为________,所有这些约数的和为________.

解 (1) 179. 分四步,即依次考虑 1 元币,1 角币,5 分币,2 分币的取舍情况,这四步的不同的方法依次是 6, 5, 2, 3,报据乘法

原理,共有 $6\times5\times2\times3=180$ 种情形,剔除都不取(即 0 元 0 角 0 分)的情形,共可组成 179 种不同的币值.

(2) 24, 1 872. 将 630 进行质因素分解得 $630=2^1\times3^2\times5^1\times7^1$, 630 的正约数一定形如 $2^a3^b5^c7^d$,其中 $a, b, c, d\in\mathbf{N}$,因此要确定 630 的正约数,需分 4 步,即依次确定 a, b, c, d. 而这 4 步的不同的方法依次为 2, 3, 2, 2, ∴ 630 的正约数的个数为 $2\times3\times2\times2=24$. 实际上,这些约数为 $(2^0+2^1)(3^0+3^1+3^2)(5^0+5^1)(7^0+7^1)$ 展开后的 24 个数,它们的和为 $3\times13\times6\times8=1\,872$.

说明 (1) 本例的第(1)问中较小币值的和都小于较大币值的面值,因而可直接用乘法原理,否则,如若有 3 张 5 分币等情形,则要去除所取出的币值相同(如 1 张 1 角币和 2 张 5 分币币值相同)的情形;(2) 设正整数 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为素数,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\in\mathbf{N}^*$,则 m 的不同的正约数的个数为 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$,这些正约数的和为 $(p_1^0+p_1^1+\cdots+p_1^{\alpha_1})\cdot(p_2^0+p_2^1+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(p_n^0+p_n^1+\cdots+p_n^{\alpha_n})=\prod\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{k=0}^{\alpha_i}p_i^k)$.

3. 分类计数原理和分步计数原理的综合应用

例 7 有 A、B、C、D、E、F 六人依次站在正六边形的六个顶点上传球,每次可传给相邻的两人之一,从 A 开始,若在 5 次之内传到 D,则停止传球;若 5 次之内传不到 D,则传完 5 次也停止传球,那么从开始到停止,可能出现的不同传法种数是 ( )

A. 24　　B. 26　　C. 30　　D. 32

解 B. 若第 i 次逆时针方向传球则记为 $x_i=1$,若顺时针方向传球则记 $x_i=-1$,则从 A 开始,经 n 次传球后球到 D 的条件是 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=3$ 或 -3,显然 $n\geqslant3$. 当 $n=3$ 时,因为每次传球都有两种不同的方法,所有 3 次传球共有 $2^3=8$ 种不同的传法,将这 8 种不同的传法分为两类:第一类是球到 D 手中,这一类有两种传法,即

$x_1=x_2=x_3=1$ 或 $x_1=x_2=x_3=-1$；第二类是经过 3 次传球球未到 D 手中，这一类有 $8-2=6$ 种传法，根据题意需继续传下去，但 $n=4$ 时，$\sum_{i=1}^{n}x_i=\pm 3$ 不可能，故须到第 5 次传球才能结束，所以传完 5 次的不同的传法为 $6\times 2^2=24$. 因此，从开始到停止，可能出现的不同的传法种数为 $24+2=26$ 种，故选 B.

说明 本题先将传球问题"数字化"，再对 3 次传球后的情形分类讨论，一类是经过 3 次传球球到 D，因而停止传球，另一类是经过 3 次传球球未到 D，因而需继续传球直至第 5 次结束，解题过程综合应用了分类计数原理和分步计数原理.

例 8 （2003 年新课程卷）将 3 种作物种植在如下的 5 块试验田里，每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物，不同的种植方法共有________种.

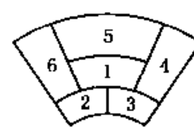
1	2	3	4	5

解 42. 题设 3 种作物种在 5 块试验田里，分两类：第一类，其中的一种作物种三块田，另两种作物各种一块田. 第一步确定种三块田的作物，有 3 种方法，第二步确定该种作物的三块田，只有 1 种方法，即图中的(1, 3, 5)，第三步确定其余两种作物的种法，有 2 种方法，所以第一类共有 $3\times 1\times 2=6$ 种不同的种法；第二类，其中的一种作物只种一块田，另两种作物各种 2 块田，第一步确定种一块田的作物，有 3 种方法，第二步确定该作物的一块田，若该作物种在 1 号地，则另两种作物田块的选配只能是(2, 4)、(3, 5)，有 2 种方法. 若该作物种在 2 号地，则另两种作物田块的选配只能是(1, 4)、(3, 5)，也有 2 种方法. 根据对称性，该作物种在 4 号地、5 号地的情形同 1 号地、2 号地，各有 2 种方法. 若该作物种在 3 号地，则另两种作物可分别在 3 号地的左右各选一块，有 4 种方法. 所以第二类中共有 $3\times(2+2+4+2+2)=36$ 种不同的种

法.最后根据分类计数原理,共有 $6+36=42$ 种不同的种植方法.

说明 本题首先根据作物种植的田块数分为两类,每一类中再分步考虑种植情况,其中第二类中对只种一块田的作物的田块号码逐一考察,考察中运用了对称性.请注意领悟解题的思维过程.

例 9 某城市在中心广场建造一个花圃,花圃分为 6 个部分(如图),现要栽种 4 种不同颜色的花,每部分栽种一种花且相邻部分不能栽种同色的花,不同的栽种方法有________种.(用数字作答)



思路分析 将该问题分为 6 步,即依次填上 1, 2, …, 6 这 6 个部分,但在填到第 6 部分时,"2、5 同色"与"2、5 异色"对"6"的填色方法有影响,需分类讨论.在"2、5 异色"这一类中,"2、4"是否同色对"5"的填色也有影响,所以又需进一步分类讨论.

解 120.将不同的栽种方法分为两类.

第一类:2、5 同色,依次栽种 1, 2, …, 6 号,栽法分别是 4, 3, 2, 1, 1, 2,共有 $4\times3\times2\times1\times1\times2=48$ 种不同的栽法;

第二类:2、5 异色,这一类中又分如下两小类.

① 2、4 同色,则从 1 号到 6 号不同的栽法依次是 4, 3, 2, 1, 2, 1,共有 $4\times3\times2\times1\times2\times1=48$ 种不同的栽法;

② 2、4 异色,则从 1 号到 6 号不同的栽法是 $4\times3\times2\times1\times1\times1=24$ 种不同的栽法.

∴ 第二类中共有 $48+24=72$ 种不同的栽法.

由分类计数原理,不同的栽法共有 $48+72=120$ 种.

说明 正确分类、合理分步是解排列组合题成功的关键.正确分类,首先要根据解题的需要确定分类的依据,本题分 6 步栽种,发现 6 号地的栽种方法无法确定,与 2、5 是否同色有关,所以需第一次分类,而在 2、5 异色这一类中,发现 5 号地的栽种又与 2、4 是否同色有关,所以又需第二次分类.以上的分类,类似于函数、

方程、不等式等问题中对参数的讨论，在做不下去难以为继的地方分类讨论.

例 10 （错位问题）4 个人各写一张贺年卡，放在一起，然后每个人取一张不是自己写的贺卡，共有多少种不同的取法?

解 这个问题可以分 4 步考虑，但列式计算较难，不妨一一列举. 将 4 个人编号为一、二、三、四，他们写的贺年卡依次为 1、2、3、4. 则取贺年卡的各种方法列举如下：

四个人	各种取贺年卡的方法								
一	2	2	2	3	3	3	4	4	4
二	1	3	4	1	4	4	1	3	3
三	4	4	1	4	1	2	2	1	2
四	3	1	3	2	2	1	3	2	1

共 9 种方法.

说明 本题是一个错位排列问题. 错位问题的一般定义如下：

设 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个全排列，若对于任意 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 都有 $a_i \neq i$，则称 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个错位.

用 D_n 表示 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的错位个数.

根据定义可知 $D_1 = 0$，$D_2 = 1$，$D_3 = 2$，$D_4 = 9$. 一般地错位问题有以下定理：

设 n 是自然数，则

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

这个公式的推导，需要用计数问题中的容斥原理.