数学

马家祚　王诚祥　主编

高考专题复习系列丛书

名师专题

函数与导数

解题方法与技巧

如何

活用函数单调性

如何

求极值

如何

妙用形数结合方法

河海大学出版社

MINGSHI ZHUANTI

MINGSHI ZHUANTI

名师专题

函数与导数

解题方法与技巧

责任编辑 代江滨　策划编辑 代江滨　责任校对 刘凌波　封面设计 黄 炜

函数与导数　解题方法与技巧
不　等　式　解题方法与技巧
数　　　列　解题方法与技巧
排列组合和概率　解题方法与技巧
直线、平面、简单几何体　解题方法与技巧
直线与圆锥曲线　解题方法与技巧

ISBN 7-5630-2276-7
9 787563 022762 >

ISBN 7-5630-2276-7
O · 125 定价：9.00 元

函数与导数

解题方法与技巧

主　编

马家祚　王诚祥

副主编

魏丽光

河海大学出版社

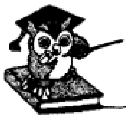
图书在版编目(CIP)数据

函数与导数/马家祚,王诚祥主编. —南京:河海大学出版社,2006.8
(名师专题)
ISBN 7-5630-2276-7

Ⅰ.函... Ⅱ.①马... ②王... Ⅲ.①函数—高中—教学参考资料 ②导数—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 091184 号

书　　名/函数与导数
书　　号/ISBN 7-5630-2276-7/O·125
责任编辑/代江滨
策划编辑/代江滨
责任校对/刘凌波
封面设计/黄　炜
出　　版/河海大学出版社
地　　址/南京市西康路1号(邮编:210098)
电　　话/(025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)
印　　刷/泰州人人印务有限公司
开　　本/850毫米×1168毫米　1/32　6印张　120千字
版　　次/2006年8月第1版　2006年8月第1次印刷
定　　价/9.00元



前　言

函数是贯穿全部中学数学教材始终的主干内容．它与方程、不等式、数列、三角函数，甚至立体几何、解析几何等其他数学内容有着本质的、密切的联系．函数思想和方法又是指导我们观察问题、分析问题、解决问题的基本数学思想和方法．这里的问题，不仅仅指数学本身的问题，而且指现实生活、生产中出现的实际问题．

近年来，高考一直强调，要突出重点内容、主干内容，要在知识的交汇点上命题，要重视对数学思想方法的考查和数学能力的考查．于是函数的内容便理所当然地成了高考的“重头戏”．在高考中，对函数的考查一般包括以下几方面：

（1）函数的一般理论．包括函数的三要素（定义域、值域、对应法则）；函数的基本性质（单调性、奇偶性、周期性、最大值最小值等）；互为反函数的两个函数间的关系等．

（2）函数的图象．包括基本初等函数的图象；图象的变换；运用图象研究函数的性质；图象法解方程、不等式等．

（3）模型函数．包括一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数等．其中一次函数、二次函数、反比例函数在初中阶段已作了初步研究，在高考中，一般和指数函数、对数函数或与其他方程、不等式的知识综合在一起考查．但它们仍不失为重要的函数模型，特别是二次函数．

（4）运用导数研究函数的性质．包括函数图象的切线，函数的单调性、极值、最值，以及运用导数研究方程、不等式等．

（5）函数的应用．包括在数学本身，如方程、不等式、数列、三角函数、几何等方面的应用，以及在日常生产、生活中的实际应用问题．

我们将以上五个方面的内容分成五讲来复习研究．特别需要强

调的是，读者在复习上述内容的同时，要特别重视从中反映出来的数学思想方法的理解和运用，包括函数与方程的思想、形数结合思想、分类讨论思想和化归与转化的思想. 灵活运用这些数学思想来思考问题、解决问题正是提高数学素养、提高解题能力的关键所在.

为了切实提高本书的实效，使读者掩卷而思，既能从宏观上把握函数的内容，用函数的思想去审视问题、分析问题，又能从微观上掌握高考常见题型的解题方法和技巧，对各种函数方法成竹在胸，编者在选材和编排上都作了一些努力：

(1) 内容选择，紧扣高考"脉搏".

从题型的确定，到例题、习题的编选，完全顺从高考的最新动态，其中的例题、习题精选自近年的高考题、名市名校的模拟试题以及根据编者对高考的理解，适应复习需要所编拟的原创题.

(2) 体例安排，突出思路方法.

在例题的解答中，前有"分析"，后有"说明". 在分析中，帮助读者理清解题思路，教给读者分析问题的方法；在说明中，总结解题方法，揭示解题规律，指出注意事项，以便读者举一反三、触类旁通，切实掌握各种题型的解法.

(3) 表现手法，符合思维规律.

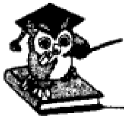
数学的抽象性，给数学学习造成了很大困难，不少同学对所学概念、定理、公式等不能灵活运用于解题. 为此，本书采用让题目"说话"的策略，尽量避免空泛的理论，把基础知识、技能技巧、思想方法融于题目之中，再通过精当的点评加以归纳总结，对照题目，使那些抽象的数学思想方法变为看得见、学得会、用得上的东西.

为了提高本书的使用效果，我们希望读者能与编者配合，变被动阅读为主动学习. 在阅读例题之前，先自己试着思考，然后再看分析与解答，在解答以后再想想有哪些收获，仔细推敲题后的说明. 我们恳切地希望这本书能成为你学习数学的良师益友.

书中的不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2006 年 6 月



目　录

第一讲 函数的概念和性质

对函数一般性质的考查，是高考的重要内容. 其中包括：求函数的定义域、值域、最大值最小值；求函数的单调区间，判断和证明函数的单调性；综合应用函数的单调性、奇偶性、周期性的概念研究函数值的变化情况；研究互为反函数的两个函数间的关系等.

对于解决上述问题的数学思想、基本方法和注意事项等，我们将结合下面典型的例题逐一研究，和读者共同体会总结.

1. 求函数的定义域、值域、最大(小)值

例 1 在下列各函数中，定义域和值域不相同的函数是 ( )

A. $f_1(x) = 2\sqrt{x(1-x)}$

B. $f_2(x) = 2^{\lg(2^x-1)}$

C. $f_3(x) = 2x - \dfrac{1}{x}\left(x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\right)$

D. $f_4(x) = \sqrt{x - 2 + \dfrac{4}{x-2}}$

解 由 $x(1-x) \geqslant 0$ 解得 $f_1(x)$ 的定义域为$[0, 1]$，$\because$ $f_1(x) = 2\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$，$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$时，$f_1(x)$取得最大值 1，$x = 0$ 或 1 时取得最小值 0，因而，$f_1(x)$的值域也是$[0,1]$.

由 $2^x - 1 > 0$ 解得 $f_2(x)$ 的定义域为$(0, +\infty)$. 当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$2^x - 1$ 可取一切正实数，因而 $\lg(2^x - 1)$ 可取一切实数，故 $2^{\lg(2^x-1)}$ 可取一切正实数，即 $f_2(x)$的值域亦为$(0, +\infty)$.

$f_3(x)$的定义域已由题目给出. 因为 $2x$ 在 **R** 上是增函数，$-\frac{1}{x}$ 分别在$(-\infty, 0)$与$(0, +\infty)$上为增函数，所以$2x-\frac{1}{x}$分别在$(-\infty, 0)$与$(0, +\infty)$上是增函数. 因此，$x\leqslant -1$时，$f_3(x)\leqslant f_3(-1)=-1$，$x\geqslant 1$时，$f_3(x)\geqslant f_3(1)=1$. 故$f_3(x)$的值域亦为$(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$.

由$x-2+\frac{4}{x-2}\geqslant 0$解得$f_4(x)$的定义域为$(2, +\infty)$，因为$(x-2)+\frac{4}{x-2}\geqslant 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}=4$(当$x-2=\frac{4}{x-2}$，即$x=4$时取等号)，因而$f_4(x)$的值域为$[2, +\infty)$，故$f_4(x)$的定义域与值域不相同.

综上得，应选 D.

说明 求函数的值域，看似简单实不容易，读者必须切实理解和掌握求函数值域的常用方法和基本初等函数的性质. 本题中求这四个函数的值域依次运用了配方法、观察法、单调性法和不等式法.

例 2 设 $f(x)=\sqrt{(x-2)(1-x)(x^2-3x+5)}$. 求：

(1) $f(x)$的定义域；

(2) $f(x)$的值域；

(3) $f(4^x)$的定义域.

解 (1) 令$(x-2)(1-x)(x^2-3x+5)\geqslant 0$ ①，$\because x^2-3x+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$，$\therefore$ 由①得$(x-2)(1-x)\geqslant 0$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 2$. 因此$f(x)$的定义域为$[1, 2]$.

(2) 令$x^2-3x=t$，则$f(x)=\sqrt{(-x^2+3x-2)(x^2-3x+5)}=\sqrt{(-t-2)(t+5)}=\sqrt{-\left(t+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$.

$\because t=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，而$1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore -\frac{9}{4}\leqslant$

$t\leqslant -2$.

$\because\ \varphi(t)=-\left(t+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ 在 $\left[-\dfrac{9}{4},-2\right]$ 上是减函数，$\therefore$ $\varphi(-2)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi\left(-\dfrac{9}{4}\right)$，即 $0\leqslant\varphi(t)\leqslant\dfrac{11}{16}$，因此 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\dfrac{\sqrt{11}}{4}\right]$.

(3) 由(1)知，$f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，故令 $1\leqslant 4^x\leqslant 2$，由此解得 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$，即 $f(4^x)$ 的定义域为 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

说明 (1) 通过本题的第(3)小题，请读者自行总结，如果已知 $f(x)$ 的定义域，如何求 $f(\varphi(x))$ 的定义域.

(2) 本题中通过换元，把根号内的表达式转化成关于 t 的二次函数，再通过配方法，利用二次函数的单调性求得了 $f(x)$ 的值域. 在运用换元法求值域时，特别要注意中间变量 t 的取值范围. 本题中如果忽视了这一点. 就可能误以为函数 $f(x)$ 的值域是 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

例 3 已知函数 $y=\dfrac{ax}{x+b}$ $(ab\neq 0)$，$x\in(0,+\infty)$. 求函数 y 的值域.

分析 我们已熟知，利用反函数法可得 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$($c\neq 0$，且 $ad\neq bc$) 的值域为 $y\in\mathbf{R}$ 且 $y\neq\dfrac{a}{c}$. 但本题中自变量 x 不是在由式子确定的自然定义域中取值，因此不能直接运用上述结论，这就需要我们回到得出这一结论的过程中去.

解法 1 单调性法.

将函数式变形为 $y=a-\dfrac{ab}{x+b}$.

(1) $a>0$，$b>0$ 时，$y=a-\dfrac{ab}{x+b}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的递增函

数，故值域为$(0, a)$.

(2) $a>0$, $b<0$ 时，$y=a-\frac{ab}{x+b}$ 分别是$(0, -b)$与$(-b, +\infty)$上的递减函数，故值域为$(-\infty, 0)\cup(a, +\infty)$.

(3) $a<0$, $b>0$ 时，$y=a-\frac{ab}{x+b}$ 是$(0, +\infty)$上的递减函数，故值域为$(a, 0)$.

(4) $a<0$, $b<0$ 时，$y=a-\frac{ab}{x+b}$ 分别是$(0, -b)$与$(-b, +\infty)$上的递增函数，故值域为$(0, +\infty)\cup(-\infty, a)$.

解法 2 方程讨论法.

我们求函数 $y=\frac{ax}{x+b}$ 的值域，根据值域的定义，实质上就是求 y 的取值范围，使得关于 x 的方程 $y=\frac{ax}{x+b}$ 在$(0, +\infty)$上有解. 由上式解得 $x=\frac{by}{a-y}$，令$\frac{by}{a-y}>0$，解此不等式，得：

(1) $a>0$, $b>0$ 时，$0<y<a$，故函数 y 的值域为$(0, a)$.

(2) $a>0$, $b<0$ 时，$y<0$ 或 $y>a$，故函数 y 的值域为$(-\infty, 0)\cup(a, +\infty)$.

(3) $a<0$, $b>0$ 时，$a<y<0$，故函数 y 的值域为$(a, 0)$.

(4) $a<0$, $b<0$ 时，$y<a$ 或 $y>0$，故函数 y 的值域为$(-\infty, a)\cup(0, +\infty)$.

说明 在以上两种解法中，均按照 a、b 值的正负把问题分成了四类求解，解法 1 是根据函数 y 的单调性求值域的，而影响函数 y 在$(0, +\infty)$上的单调性的是 ab 的符号及 b 的符号，归根到底是 a、b 的符号. 在解法 2 中，把求函数 y 的值域归结为求不等式 $\frac{by}{a-y}>0$ 的解集，而此不等式的解集取决于 a、b 的正负，由此我们清楚地看到了为什么要把问题分成上述四类求解. 分类讨论是中学数学中的基本思想方法，我们要通过解题实践逐步把握何时

需要分类，怎么分类.

例 4 设函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1, 4]$，求 a、b 的值.

分析 运用"Δ"法，将条件 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 4]$，转化为不等式 $\Delta \geqslant 0$ 的解集为 $[-1, 4]$.

解 令 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ ①，去分母，整理得 $yx^2-ax+y-b=0$ ②.

在 $y\neq 0$ 时，② 是关于 x 的一元二次方程，故由 $x\in \mathbf{R}$ 知 $\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$，即 $y^2-by-\dfrac{a^2}{4}\leqslant 0$ ③.

$\because$ $f(x)$的值域是 $[-1, 4]$，$\therefore$ ③的解集为 $[-1, 4]$. 因此 -1 和 4 是一元二次方程 $y^2-by-\dfrac{a^2}{4}=0$ 的两个根. $\therefore$ $b=(-1)+4=3$，$-\dfrac{a^2}{4}=(-1)\cdot 4$，$a=\pm 4$.

说明 本题求值域的方法，通常叫做判别式法. 求二次分函数（即分子、分母中至少有一个是二次的分式函数）的值域常常可用此法，这是因为去分母整理后，可得到关于 x 的一元二次方程. 利用判别式法求 $y=f(x)$ 的值域，实质是把 y 视为参变数，求 y 的取值范围，使关于 x 的方程 $y=f(x)$ 有实数解. 因此，这种方法可统一于方程讨论法中.

从上面的例题中我们看到求函数值域的常用方法有观察法、单调性法、配方法、反函数法、方程讨论法、不等式法、变量代换法等. 下面我们再看几道求最大值、最小值的题目. 值域求出来了，最大值、最小值也就得到了，因此求值域与求最值的方法是相通的.

例 5 已知函数 $f(x)=\log_2\dfrac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)+\log_2(p-x)(p>1)$.

(1) 求 $f(x)$的定义域;

(2) $f(x)$是否存在最大值或最小值,若存在,求出其最大值或最小值.

解 (1) 由不等式组 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}>0 \\ x-1>0 \\ p-x>0 \end{cases}$ $(p>1)$,解得 $f(x)$的定义域为$(1,\ p)$.

(2) $f(x)=\log_2[(x+1)(p-x)]=\log_2\left[-\left(x-\dfrac{p-1}{2}\right)^2+\dfrac{(p+1)^2}{4}\right](1<x<p)$.

当 $\dfrac{p-1}{2}\leqslant 1$,即 $1<p\leqslant 3$ 时,$f(x)$ 在$(1,\ p)$ 内递减,$f(x)<f(1)$,即 $f(x)<1+\log_2(p-1)$,因此函数 $f(x)$无最大值和最小值;

当 $1<\dfrac{p-1}{2}<p$,即 $p>3$ 时,则 $x=\dfrac{p-1}{2}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $\log_2\dfrac{(p+1)^2}{4}=2\log_2(p+1)-2$,无最小值.

说明 (1) 本题中的函数 $f(x)$,通过变形转化成一个对数函数与一个二次函数的复合函数.求一个二次函数当自变量限制在某一区间上时的值域,这是一个基本题型,它有广泛的应用,同学们必须十分熟练.本题正是建筑在这一基本题型基础上的.

(2) 求函数最值时,要特别注意函数的定义域.本题设计了第(1)小题正是提醒同学们注意这一点.前面的一些例题也说明了这一点.

例 6 设 a 为实数,记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1) 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$,求 t 的取值范围,并把 $f(x)$表示

为 t 的函数 $m(t)$；

(2) 求 $g(a)$；

(3) 试求满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

分析　(1) 先求 t^2 的表达式及 t^2 的取值范围.

(2) $g(a)$即为函数 $m(t)$的最大值，而 $m(t)$是关于 t 的二次函数，故需根据二次项系数的符号及对称轴的位置，按 a 的范围进行分类讨论.

(3) 按 a 和$\frac{1}{a}$所在的范围分类讨论.

解　(1) $\because t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，$\therefore$ 要使 t 有意义，必须 $1+x\geqslant 0$ 且 $1-x\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

$\because t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$，$t\geqslant 0$　①，$\therefore$ t 的取值范围是$[\sqrt{2},2]$.

由①得 $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，

$\therefore m(t)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t\in[\sqrt{2},2]$.

(2) 由题意知，$g(a)$即为函数 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$；$t\in[\sqrt{2},2]$ 的最大值.

注意到直线 $t=-\frac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴，分以下几种情况讨论.

① 当 $a>0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向上的抛物线的一段，由 $t=-\frac{1}{a}<0$ 知 $m(t)$ 在$[\sqrt{2},2]$ 上单调递增，$\therefore$ $g(a)=m(2)=a+2$.

② 当 $a=0$ 时，$m(t)=t$，$t\in[\sqrt{2},2]$，$\therefore$ $g(a)=2$.

③ 当 $a<0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向

下的抛物线的一段.若$t=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$,即$a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,则$g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$.

若$t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$,即$a\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right]$,则$g(a)=m\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}$.

若$t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$,即$a\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$,则$g(a)=m(2)=a+2$.

$$综上,g(a)=\begin{cases}\sqrt{2} & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ -a-\frac{1}{2a} & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2},\\ a+2 & a>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

(3) 解法1:

情形1 当$a<-2$时,$\frac{1}{a}>-\frac{1}{2}$,此时$g(a)=\sqrt{2}$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+2$.由$\frac{1}{a}+2=\sqrt{2}$解得$a=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin(-\infty,-2)$.

情形2 当$-2\leqslant a<-\sqrt{2}$时,$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}$.此时$g(a)=\sqrt{2}$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$.由$-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}=\sqrt{2}$解得$a=-\sqrt{2}\notin[-2,-\sqrt{2})$.

情形3 当$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.此时$g(a)=\sqrt{2}=g\left(\frac{1}{a}\right)$,$\therefore -\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

情形4 当$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$时,$-2\leqslant\frac{1}{a}<-\sqrt{2}$.此时$g(a)$

$=-a-\frac{1}{2a}, g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$，由 $-a-\frac{1}{2a}=\sqrt{2}$ 解得 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

情形 5　当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\frac{1}{a}<-2$，此时 $g(a)=a+2$，$g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$. 由 $a+2=\sqrt{2}$ 解得 $a=\sqrt{2}-2 \notin \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

情形 6　当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0$，此时 $g(a)=a+2, g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+2$. 由 $a+2=\frac{1}{a}+2$ 解得 $a=\pm 1$，由 $a>0$ 知 $a=1$.

综上知，满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a 为：$-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=1$.

解法 2：当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$g(a)=a+2>\frac{3}{2}>\sqrt{2}$.

当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a \leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$-a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), -\frac{1}{2a} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$，所以 $-a \neq -\frac{1}{2a}, g(a)=-a-\frac{1}{2a}>2\sqrt{(-a) \cdot \left(-\frac{1}{2a}\right)}=\sqrt{2}$.

当 $a>0$ 时，$\frac{1}{a}>0$，由 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 知，$a+2=\frac{1}{a}+2$，解得 $a=1$.

当 $a<0$ 时，有 $a \leqslant -1$ 或 $\frac{1}{a} \leqslant -1$，从而 $g(a)=\sqrt{2}$ 或 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$. 要使 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$，必须有 $a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{a} \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 此时 $g(a)=\sqrt{2}=g\left(\frac{1}{a}\right)$.