普通高等教育“十一五”国家级规划教材

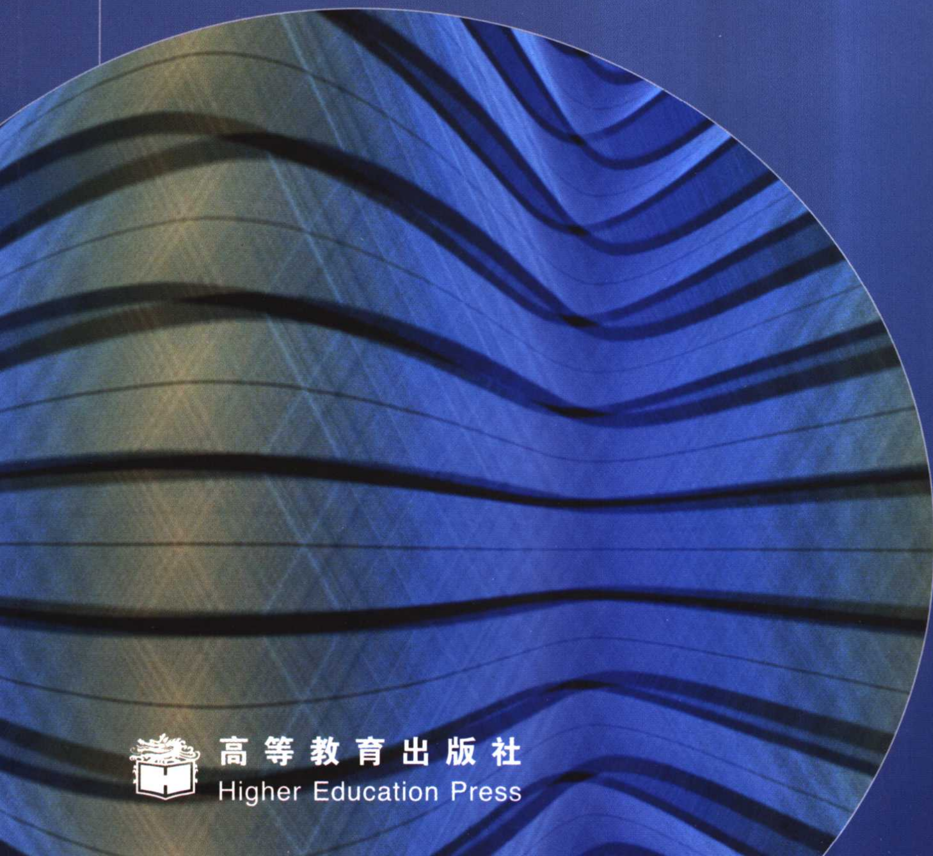
弹性力学

Elasticity

第4版

下　册

徐芝纶



高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

弹 性 力 学

第 四 版

下 册

徐芝纶

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。第四版是在保持第三版内容、编排和写作风格不变的基础上修订而成的。本书是“高等教育百门精品课程教材计划”的一个立项项目。

全书分上、下两册。上册为数学弹性力学部分，内容包括：平面问题的基本理论及其直角坐标解答、极坐标解答、复变函数解答，温度应力的平面问题、平面问题的差分解；空间问题的基本理论及其解答，和等截面直杆的扭转、能量原理与变分法、弹性波的传播。下册为应用弹性力学部分，内容包括：薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法、差分解法、变分解法，及薄板的振动、稳定、各向异性、大挠度问题；壳体的一般理论以及柱壳、旋转壳、扁壳。

本书可作为高等学校工程力学、土建、水利、机械、航空航天等专业弹性力学课程的教材，也可供工程技术人员参考和应用。

本书第一版获“1977—1981 年度全国优秀科技图书奖”。
本书第二版获 1987 年“全国优秀教材特等奖”。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学．下册/徐芝纶．—四版．—北京：高等教育出版社，2006.12
ISBN 7-04-020214-X

Ⅰ.弹… Ⅱ.徐… Ⅲ.弹性力学-高等学校-教材 Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 131468 号

策划编辑	黄 毅	**责任编辑**	姜 凤	**封面设计**	张 楠
责任绘图	尹 莉	**版式设计**	余 杨	**责任校对**	刘 莉
责任印制	尤 静				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1979 年 8 月第 1 版
			2006 年 12 月第 4 版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	18.75	**印　　次**	2006 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	23.60 元

物料号　20214-00

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册，上册先讲平面问题，再讲空间问题，下册先讲薄板问题，再讲薄壳问题。这样安排，大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力，每章之后都附有难易程度不同的习题，任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少，适当布置。

在大多数章的最后，列出了参考教材的目录，以使学生在阅读了这些教材以后，能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表，附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志，以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶　1978 年 10 月

第二版前言

本书在1979年出版以后，曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用，并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改，择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析，数学运算较繁，在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后，已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答，虽然属于古典弹性力学上的重大成就，但在工程上很少有人应用。因此，在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了“斜方向的应变”这一节，是为了适应结构实验分析方面的需要；在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中，增加了弹性支承边的边界条件，因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念，而且在很多的板壳结构中，支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示，沿用过去文献中的传统推导方法，引用了几个人为的调和函数，显得曲折而不自然。在修订版中，放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导，比较直观，容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算，是我国的力学工作者们在50年代末期和60年代初期的重大贡献，至今还不失为国际上的先进成果。因此，在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外，在很多的章节中，文字叙述和数学推导作了某些修改，习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查，把发现的缺点和错误及时通知本人，以便再度加以修改或更正，使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶　1982年4月

第三版前言

在安排本书第三版的内容时，对总的体系未加更改，对次序的先后也只作了很小的变动。

由于国内的大专院校和设计单位都已普遍使用电子计算机(至少已普遍使用微型机)，用手工进行的松弛计算已经失去了实用价值，所以第三版中取消了这方面的内容。

平面问题的位移差分解，与应力函数差分解相比，具有较广泛的适用性，但是，对同样的精度要求说来，方程较多是其缺点。由于电子计算机的使用，这一缺点已无关重要，因此，第三版中增加了位移差分解的内容。

兄弟院校的几位同志建议，增加“解答的唯一性”和“功的互等定理”。还有同志认为，既然空间轴对称问题的应力函数等同于拉甫位移函数，前者就不必介绍了。编者采纳了这两方面的建议。

为了便于教学，第三版中对文句和插图作了不少的修改，对例题和习题也作了一些调整。

徐芝纶　1987 年 5 月

第四版前言

《弹性力学》是徐芝纶教授(1911—1999)为工程力学专业、工科研究生等编著的一部教材，1990年出版了第三版，至今已有16年，为满足教学要求，现修订出版第四版。

第四版在保持第三版的内容、编排和写作风格不变的前提下，进行以下几方面的修订：(1)为方便读者阅读，在正文之前增加了“主要符号表”。(2)按1993年发布的GB 3100~3102—93《量和单位》系列国家标准及有关规定。规范使用量和单位的名称、符号及书写规则。(3)重新绘制了全部插图，少数图示有所改进，图注均用宋体字。(4)在反复斟酌的基础上，对个别字、词及表述作了修订，在“能量原理及变分法”一章中增加了余能概念。

第四版的修订工作由王润富(河海大学)、徐慰祖(北京工业大学)、张元直(高等教育出版社)共同完成。

修订不当之处敬请读者指正。

修订者

2006年7月

主要符号表

弹性力学

坐标　直角坐标 x，y，z；圆柱坐标 ρ，φ，z；极坐标 ρ，φ；球坐标 r，θ，φ。

体力分量　f_x，f_y，f_z（直角坐标系）；f_ρ，f_φ，f_z（圆柱坐标系）；f_ρ，f_φ（极坐标系）。

面力分量　$\bar{f}_x$，$\bar{f}_y$，$\bar{f}_z$（直角坐标系）；$\bar{f}_\rho$，$\bar{f}_\varphi$，$\bar{f}_z$（圆柱坐标系）；$\bar{f}_\rho$，$\bar{f}_\varphi$（极坐标系）。

位移分量　u，v，w（直角坐标系）；u_ρ，u_φ，w（圆柱坐标系）；u_ρ，u_φ（极坐标系）。

边界约束分量　$\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{w}$（直角坐标系）。

方向余弦　l，m，n（直角坐标系）。

应力分量　正应力 σ，切应力 τ；全应力 $\boldsymbol{p}$；斜面应力分量 p_x，p_y，p_z（直角坐标系）；σ_N，τ_N；体积应力 Θ。

应变分量　线应变 ε，切应变 γ；体应变 θ。

势能和功　形变势能（应变能）V_ε，外力势能 V，总势能 E_p，功 W，动能 E_k，应变余能 V_c。

艾里应力函数 Φ，扭转应力函数 Φ。

弹性模量 E，切变模量 G，体积模量 K，泊松比 μ。

质量 m，密度 ρ，重力加速度 g。

温度场和温度应力

温度 T，绝热温升 θ。

热量 Q，热流密度 q。

比热容 c，线胀系数 α。

导热系数（热导率）λ，导温系数（热扩散率）a，运流放热系数（表面传热系数）β。

薄板力学

挠度 w，振形函数 W，振动频率 ω，抗弯刚度 D。

中面内力（薄膜内力）　拉压力，平错力（纵向剪力）$F_{\mathrm{T}x}$，$F_{\mathrm{T}y}$，$F_{\mathrm{T}xy}=F_{\mathrm{T}yx}$（直角坐标系）；$F_{\mathrm{T}\rho}$，$F_{\mathrm{T}\varphi}$，$F_{\mathrm{T}\rho\varphi}=F_{\mathrm{T}\varphi\rho}$（极坐标系）。

平板内力　弯矩，扭矩　M_x，M_y，$M_{xy}=M_{yx}$（直角坐标系）；M_ρ，M_φ，$M_{\rho\varphi}=M_{\varphi\rho}$（极坐标系）。

横向剪力，总剪力　$F_{\mathrm{S}x}$，$F_{\mathrm{S}y}$；$F^{\mathrm{t}}_{\mathrm{S}x}$，$F^{\mathrm{t}}_{\mathrm{S}y}$（直角坐标系）。$F_{\mathrm{S}\rho}$，$F_{\mathrm{S}\varphi}$；$F^{\mathrm{t}}_{\mathrm{S}\rho}$，

$F^{t}_{S\varphi}$(极坐标系)。

薄壳力学

正交曲线坐标 α, β, γ。坐标线上微分线段 ds_1, ds_2, ds_3。

位移 u_1, u_2, u_3; 中面位移 u, v, w。

线应变 e_1, e_2, e_3; 切应变 e_{23}, e_{31}, e_{12}。

中面线应变 ε_1, ε_2。中面切应变 ε_{12}。中面主曲率 k_1, k_2。中面主曲率改变 χ_1, χ_2。中面扭率改变 χ_{12}。壳体的中面荷载 q_1, q_2, q_3。

中面内力(薄膜内力) 拉压力 F_{T1}, F_{T2}; 平错力 F_{T12}, F_{T21}。总平错力 F^{t}_{T12}, F^{t}_{T21}。

平板内力 弯矩 M_1, M_2; 扭矩 M_{12}, M_{21}。

横向剪力 F_{S1}, F_{S2}。总剪力 F^{t}_{S1}, F^{t}_{S2}。

量纲

国际单位制(SI)采用的基本量为，长度(L)，质量(M)，时间(T)，电流(I)，热力学温度(Θ)，物质的量(N)，发光强度(J)。

目　录

（下　册）

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法

§13-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13-1。这两个平行面称为板面，而这个柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离 δ 称为板的厚度，而平分厚度 δ 的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度 δ 远小于中面的最小尺寸 b（例如小于 $b/8$ 至 $b/5$），这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

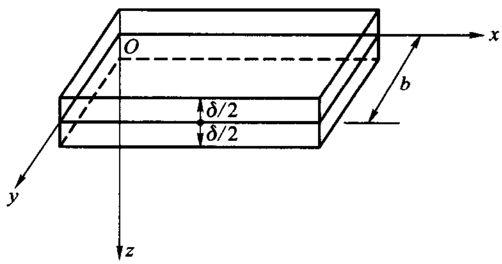


图 13-1

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，可以用来较简便地计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但还不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分荷载，一个是作用在薄板中面之内的所谓纵向荷载，另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载，可以认为它们沿薄板厚度均匀分布，因而它们所引起的应力、形变和位移，可以按平面应力问题进行计算，如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲，它们所引起的应力、形变和位移，可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时，中面所弯成的曲面，称为薄板的弹性曲面，而中面内各点在横向的（即垂直于中面方向的）位移，称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论，也就是只讨论这样的薄板：它虽然很薄，但仍然具有相当的弯曲刚度，因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小，以致挠度与厚度属于同阶大小，则须另行建立所谓大挠度弯曲理论，见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论，是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为 xy 面，图 13-1，这些假定可以陈述如下：

(1) 垂直于中面方向的正应变，即 ε_z，可以不计。取 $\varepsilon_z=0$，则由几何方程(8-9)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z}=0$，从而得

$$w=w(x,y)。\tag{13-1}$$

这就是说，在中面的任一根法线上，薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w，也就等于挠度。

由于作出了上述假定，我们必须放弃与 ε_z 有关的物理方程

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)}{E}。$$

这样才能容许 $\varepsilon_z=0$，而同时又容许 $\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)\neq 0$，如下一节中所见。

(2) 应力分量 τ_{zx}、τ_{zy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量，因而是次要的，它们所引起的形变可以不计(注意:它们本身却是维持平衡所必需的,不能不计)。

因为不计 τ_{zx} 及 τ_{zy} 所引起的形变，所以有

$$\gamma_{zx}=0,\qquad \gamma_{yz}=0。$$

于是由几何方程(8-9)得

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}。\tag{13-2}$$

与上相似，必须放弃与 γ_{zx} 及 γ_{yz} 有关的物理方程

$$\gamma_{zx}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx},\qquad \gamma_{yz}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}。$$

这样才能容许 γ_{zx} 及 γ_{yz} 等于零，而又容许 τ_{zx} 及 τ_{yz} 不等于零，如下一节中所见。

由于 $\varepsilon_z=0$，$\gamma_{zx}=0$，$\gamma_{yz}=0$，可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩，并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变，所以由物理方程有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{13-3}$$

这就是说，薄板小挠度弯曲问题中的物理方程和薄板平面应力问题中的物理方

程是相同的。

（3） 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移，即

$$(u)_{z=0}=0, \qquad (v)_{z=0}=0。 \tag{13-4}$$

因为 $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$，所以由上式得出

$$(\varepsilon_x)_{z=0}=0, \qquad (\varepsilon_y)_{z=0}=0, \qquad (\gamma_{xy})_{z=0}=0。$$

这就是说，中面的任意一部分，虽然弯曲成为弹性曲面的一部分，但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

§ 13 - 2　弹性曲面的微分方程

薄板的小挠度弯曲问题是按位移求解的，取为基本未知函数的是薄板的挠度 w。因此，我们要把所有的其他物理量都用 w 来表示，并建立 w 的微分方程，即所谓弹性曲面微分方程。

首先把形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}用 w 来表示。将方程(13 - 2)对 z 进行积分，积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变，即得

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z+f_1(x,y), \qquad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z+f_2(x,y),$$

其中的 f_1 和 f_2 是任意函数。应用方程(13 - 4)，得 $f_1(x,y)=0$，$f_2(x,y)=0$。可见

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z, \qquad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z。$$

于是可以把形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}用 w 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z,\\
\varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z,\\
\gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z。
\end{aligned}\right\} \tag{13-5}$$

在这里，由于挠度 w 是微小的，弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用 w 表示为

$$\chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \chi_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \chi_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \tag{a}$$

所以(13 - 5)式也可以改写为

$$\varepsilon_x=\chi_x z, \qquad \varepsilon_y=\chi_y z, \qquad \gamma_{xy}=2\chi_{xy}z。 \tag{13-6}$$

因为曲率χ_x、χ_y和扭率χ_{xy}完全确定了薄板所有各点的形变分量，所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次，将应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}用w来表示。由物理方程(13－3)求解应力分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x),\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将(13－5)式代入式(b)，即得所需的表达式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ \sigma_y&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\ \tau_{xy}&=-\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{13-7}$$

注意w不随z变化，可见这三个应力分量都和z成正比。

再其次，将应力分量τ_{zx}及τ_{zy}用w来表示。在这里，因为不存在纵向荷载，所以有$f_x=f_y=0$，而平衡微分方程(8－1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y},\qquad \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}。$$

将表达式(13－7)代入，并注意$\tau_{yx}=\tau_{xy}$，即得

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,$$

$$\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。$$

注意w不随z而变，将上列二式对z进行积分，得

$$\tau_{zx}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+F_1(x,y),$$

$$\tau_{zy}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+F_2(x,y),$$

其中F_1及F_2是任意函数。但是，在薄板的下面和上面，有边界条件

$$(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0,\qquad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0。$$

应用这些条件求出$F_1(x,y)$及$F_2(x,y)$以后，即得表达式