數學物理方法綱要

周季生　編

山西教育出版社

1996 年秋高等院校理工科教材 4972－8

数学物理方法纲要
周季生　编
*
山西教育出版社出版　（太原并州北路 69 号）
山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：25　字数：564 千字
1993 年 8 月第 1 版　1996 年 7 月山西第 2 次印刷
印数：1501－3000 册
*
ISBN 7－5440－0007－9
G・8　定价：20.00 元

内 容 提 要

本书是一本极富启发性、独具一格的"数学物理方法"教材，曾博得许多专家和读者的赞许。全书共九章，包括向量（复习）、复变函数、傅里叶级数和积分、特殊函数、数学物理方程、格林函数、积分变换、变分法、积分方程。每章都分纲要、例题选解、简史与基本问题三部分，并附大量习题和答案，既便于教师讲授，又便于学生学习。

本书可作为师范和综合性大学物理系和相近专业以及工科有关课程的教材或参考书；也可供职大等成人教育有关读者参考。

序　一

物理学的研究方法，其首位的当然是观测与实验；但由此而得的数据，却有待于数学的处理。古代由观测日月运行而制订历法，用的是算术方法；随后由观测行星出没而形成天体力学，用的是几何方法。直到牛顿的《自然哲学的数学原理》一书问世（1687），才真正地建立了数学物理方法。牛顿的这本书虽然仍是用几何语言表述的，但实质上却用的是分析数学即变量数学的方法。此后200多年来，分析方法是数学物理方法的主体。到19世纪末，特别是本世纪以来，数学物理的研究中又出现了统计的、微分几何的、近世代数的、随机分析的、微分拓扑的、组合的以及计算机等方法，分析方法几乎退居末位。但应注意，上述种种方法无一不是涉及分析数学甚至是以分析数学作为基础的；例如，组合数学中的某些基本定理，只能在分析数学范畴下得到证明。因此，分析方法仍是数学物理方法的基础与核心。

研究物理学，除了实验方法与数学方法外，当然也涉及一般的思维方法，例如哲学、逻辑学等。但实践是一切真知的终极来源。人们能有一般思维法则的指引固然很好，但也应警惕，只从思维框架出发，那怕是好的思维框架，如果脱离实际，也会妨害真知的获取。法拉第与麦克斯韦不一定学过好的哲学，但前者从长期的实验出发，因类比提出了场的概念；后者从来源于实验的数学物理方程出发，因类比预言了电磁波，这类例子很多。因此，如果不结合实际，任何的“先验”思维框架，都是不足取法的。

周季生同志编写的《数学物理方法纲要》，正是以分析方法为主的基础教材。此书特点甚多，每章按纲要、例题选解、简史与基本问题三方面编排，除单复变函数及数学物理方程外，还有变分法、积分方程等材料，内容丰富，条理分明，并特别注意启发读者的学习主动性，在每个章节都留有让读者思考及动手的余地。全书阐述透彻，强调思路。因此，本书确实是一部独具特色的好教材。

陈庆益

1990年11月8日武汉喻家山

● 陈庆益先生：兰州大学数学系博士生导师，华中理工大学数学系教授。

序　二

周季生同志教授“数学物理方法”课程业已二十多年，对教材的编写作了种种探索，最后编写成《数学物理方法纲要》。

《数学物理方法纲要》的写法是一种很好的创新。

已有的数学物理方法教本大都只包含“复变函数”与“数学物理方程”两部分，或者再加上“傅里叶级数和积分”。周季生同志的《纲要》则还包括“积分方程”与“变分法”，又把“积分变换”集中为一个单独部分，前面加上“矢量与场”的综合复习，内容丰富得多。各部分的论述也比较完备。虽然内容丰富完备，篇幅却不比已有的教本大。这是主要的优点之一。

周季生同志之所以能在不大的篇幅中容纳丰富内容，这是因为他写的扼要清晰。所有证明只给出“证明思路”而让读者自已完成证明，这就节省了篇幅；更重要的是培养锻炼了读者自已治学能力；而且略去详细证明过程也使得内容的系统性和逻辑性较为鲜明，便于读者阅读。各章的“基本问题”部分又作了概括综述，读者更易掌握本门课程各章的脉络。

每章的“简史”部分是周季生同志的《数学物理方法纲要》的特色，让读者了解各种方法的发展历史，从中获得启发。

全书的理论论述、例题配置、基础题与选作题的安排都反映作者多年的教学经验和心得。

我以为《数学物理方法纲要》的编写是成功的。

梁昆淼

1988年6月8日

● 梁昆淼先生：南京大学物理系教授。

评 论 摘 要

陈代森（暨南大学物理系教授　1989.10.30）

这是一本颇有特色的数理方法讲义。

一、内容中含有近代物理中常用的但同类教材很少涉及的数学方法，如迭代法求积分方程的级数解等。

二、内容安排紧凑，前后合理，文字流畅，可读性强。

三、注重解题及思路的介绍，对学生有启发作用。

四、各部分都有简史介绍和基本问题分析，可望对激发学生的学习兴趣起良好作用。

这是一本适合国内一般综合性大学及师范院校物理系使用的数理方法教材，具有同等适合程度的教材国内尚未多见。

王永成（北京师范大学物理系副教授　1990.12.11）

《数学物理方法纲要》是一本难得的好教材。内容丰富、论述严谨，体现出作者在这个领域有很高的造诣。特别是，纲要式教学法，纲要式教材，格调清新，是启发式教学的典范，是彻底的启发式教学，是教学改革的一个重大成果，十分值得推广。本教材对于教师，对于学生都是十分有用的。本教材的出版一定会引起各方面的重视，一定会对教学工作起很大推动作用。

梁家宝（武汉大学物理系教授　1991.1.12）

《数学物理方法纲要》是一本具有独特风格的好书。

第一、关于定理的证明，作者给出“证明思路”。在教师的指导下，让学生独立思考，亲自动手去推求定理。这样，有利于培养学生的独立工作能力。

第二、内容丰富，物理系大学生所需的内容基本上都讲到，而且系统性较好，便于学生掌握。

第三、“例题选解”和习题的选材质优量足，给学者以较好的训练和选择的余地。

第四、“简史与基本问题”独具匠心，便于学生启迪思维，抓住主要矛盾。

胡嗣柱（复旦大学物理系副教授　1991.2.28）

《数学物理方法纲要》是目前国内数理方法教材中唯一的纲要式教材，颇具新意。

一、内容全面、丰富。它不仅包含一般数理方法教材的常见内容，还有变分法和积分方程；此外还有数理方法的发展简史（这是现有数理方法教材中所缺少的）。学习这部分内容既可提高学生的兴趣，又能起指导作用。

二、侧重实用性，对定理、公式等的证明仅给出其思路。这种提纲挈领性的论证，思路明确，不影响整个内容的连贯性和系统性，又便于应用。

三、给出大量的例题和习题，供不同层次的读者选用，而教师可以因材施教。

本教材的出版，定能促进我国数理方法的教材建设，为提高教学质量作出贡献。

前　　言

数学物理方法是理工科许多专业的数学基础课。其目的是为后续课程提供必需的数学基础工具；培养学生分析问题的数学思维能力。然而这门课内容多、难度大，学生又务必在短期内基本掌握它。这就给教学带来了较大困难。为缓解教学矛盾、完成教学目的，作者经过多年探索与实践，写就了这本《数学物理方法纲要》。

通常的教材都是演说式、叙述式，虽有其优点，但不可避免的是篇幅过大，难于做到精练、系统、醒目。读者阅读费时，又较难系统掌握。教学时，教师不得不大量板书，学生也忙于笔记，结果常常影响教学效率的提高，妨碍学生智力的开发。因此，有一本既便于讲授，又便于阅读和复习的教材是缓解数理方法教学矛盾的基本措施。

教学过程中，教师的责任不是“嚼烂喂给”，而应示之以“如何嚼”；学生更非单纯地“接受知识”，而应努力去“争取知识”，在教师的指引下，通过自己的脑和手争取到的知识才会是牢固的、有用的。因而作为教材，不仅应为读者提供知识，还应给读者留有思考和动手的余地，也给教师充分发挥水平的余地。

本着上述精神编写的《数学物理方法纲要》有许多明显的特点。

本书内容丰富，且简明系统、条理分明。教师据以讲授，可避免大量板书；学生据以学习，可较快地获得知识。

本书富有启发性。一切证明都给出了“证明思路”，读者只要根据思路分析，并动手演证，定能完成证明。同时正是由于只给出证明思路，为读者留有思考和动手的余地，对开发读者的智力将大有裨益。事实上，读者亲手完成证明，其效果比单纯阅读要好得多。

本书在编排上更是独具风格。为便于教师讲授与读者阅读、复习和查阅，各章都按“纲要”、“例题选解”、“简史与基本问题”三大部分编排（第一章因只作复习之用，没有“例题选解”）。“纲要”是讲授与学习的依据，其叙述凝练而集中，条理清楚，一目了然，对师生的教与学都很便利。“例题选解”集中了“纲要”中没有列入但富于启发和拓广思路的典型问题，对“纲要”起补充和发展的作用，可讲授也可自学。“简史与基本问

题”更为读者提供了各章理论的发展脉络与概括，并指出要点和学习方法，起启迪思维和指导的作用；读者通过自学，对全面掌握各章内容极有助益。此外，除第一章外，每章都配置有大量习题并附提示与答案，习题分基础题与选作题。基础题为掌握基本理论而设，类型与数量均较多，师生有较大的选择自由；选作题具有提高性质，可供深入思考之练习。

今日之科学，树大根深，凡有志于国者，必须有牢固而宽广的基础知识。但时间精力有限，除非多、深、快地继承，不能从事高、精、尖的发展。《数学物理方法纲要》在一个小的方面为读者较快地获得宽广的基础数学知识提供了方便。

本书自1985年使用以来，虽经多次修改，但谬误之处犹恐难免，望读者指正。

本书在出版前，承蒙陈庆益、梁昆森、陈代森、王永成、梁家宝、胡嗣柱先生以及湘潭大学教授颜家壬先生、华中理工大学副教授邹凤梧先生、廊坊师专副教授黄守学先生、山东师大副教授张维广先生、莫镰先生、福州大学程利青先生、汉中师院龙妹明先生阅读原稿并提出宝贵意见或提供材料，作者谨向上述诸位先生致谢。

周季生谨识

1991年8月于河北师范大学

目　录

一章　向　量

第二章　复　变　函　数

第三章　傅里叶级数与傅里叶积分

第四章　特殊函数

第五章　数学物理方程

第六章　格林函数

第七章　积分变换

第八章　变分法

第九章　积分方程

第一章　向　　量

Ⅰ 纲　　要

本章对数学物理方法的学习十分重要，其内容虽在解析几何与微积分中介绍过，但为便于读者复习和查阅，此处仍然作出较详细的纲要。

§1　向量及其运算

一、向量概念

向量（或**矢量**）是有大小、有方向的量（仅有大小的量称**数量**或**标量**）。向量用 **A** 等表示；而用$|\mathbf{A}|$或 a 表示其大小的数值，称为向量的**模**；模为 1 和 0 的向量分别称为**单位向量**和**零向量**。

向量的几何表示：通常用带箭头的线段（有向线段）表示向量，其长表示模。

向量的坐标表示（或解析表示）：取直角坐标系，分别在 x、y、z 轴上取正向单位向量 **i**，**j**，**K**，将向量 **A** 向坐标轴上投影，相应得 A_x，A_y，A_z，称为 **A** 的**分量**或**坐标**（向量方向相反时其分量反号）。向量A的坐标表示为

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}，简记为\mathbf{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)。$$

其模：　$a=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$；

其方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{A_x}{a}$，$\cos\beta=\dfrac{A_y}{a}$，$\cos\gamma=\dfrac{A_z}{a}$；$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 称为向量 **A**的**方向角**。

二、向量的代数运算

（一）加（减）法——平行四边形法则（图 1），是向量合成分解的基础，其坐标表示为

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=(A_x\pm B_x)\mathbf{i}+(A_y\pm B_y)\mathbf{j}+(A_z\pm B_z)\mathbf{k}.$$

性质：$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$；

$\lambda(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}\pm\lambda\mathbf{B}$（$\lambda$为数量）。

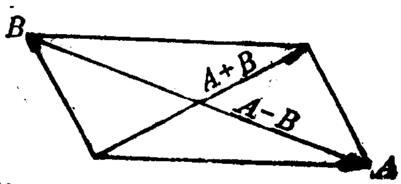

图　1

（二）乘法——向量的乘法有两个：

1. **点乘**（其积称**数量积**、**标积**或**内积**）：两个向量 **A**，**B**的“·乘”其积为数量。可以视为**A**的模与**B**在**A**上的投影

之积，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|\cos\varphi\ （\varphi 为\mathbf{A}，\mathbf{B}的夹角），$$

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|}.$$

其坐标表示为 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$。

（注意到 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$，$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$ 可证）

性质： $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$；

$\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{B}+\mu\mathbf{C})=\lambda\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mu\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$；

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2=a^2$；

A，B非零向量时，若 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$，则 $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$；反之亦真。

2. **叉乘**（其积称**向量积**或**外积**）：两个向量 A，B的“×乘”其积为向量．积向量的方向按右手螺旋法则与每个因子向量垂直；其模为

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|\sin\varphi\ （\varphi 为\mathbf{A}，\mathbf{B}的夹角），$$

$$\sin\varphi=\frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|}.$$

叉乘的坐标表示为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}.$$

xyzxyz

〔注意到 $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$，$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$，$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$，$\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$，$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$ 可证。〕

性质： $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$；

$\mathbf{A}\times(\lambda\mathbf{B}+\mu\mathbf{C})=\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mu\mathbf{A}\times\mathbf{C}$；

$\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$；

A，B非零向量时，若 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$，则 $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$；反之

3. 两个乘法的联合运算——三向量的**混合积**

$$(\mathbf{ABC})\equiv\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}$$

$$=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

= 以A，B，C为棱的平行六面体体积。

性质： 交换任意两个向量的位置其混合积变号，如

$(\mathbf{ABC})=-(\mathbf{BAC})$；

轮换法则：$(\mathbf{ABC})=(\mathbf{BCA})=(\mathbf{CAB})$；

A，B，C三向量共面的充要条件为 $(\mathbf{ABC})=0$。

几个恒等式：

① $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$；

② $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}$；

③ $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})+\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0$；

④ $\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{A}\times\mathbf{C})-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\times\mathbf{D})$；

⑤ $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{ABD})\mathbf{C}-(\mathbf{ABC})\mathbf{D}=(\mathbf{CDA})\mathbf{B}-(\mathbf{CDB})\mathbf{A}$。

⑥ $$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=\begin{vmatrix}\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}\end{vmatrix}.$$

⑦ $$(\mathbf{ABC})(\mathbf{DEF})=\begin{vmatrix}\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{F}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{F}\\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{F}\end{vmatrix};$$

$$(\mathbf{ABC})^2=\begin{vmatrix}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}\end{vmatrix}.$$

⑧ $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\quad \mathbf{C}\times\mathbf{D}\quad \mathbf{E}\times\mathbf{F})=(\mathbf{ABD})(\mathbf{CEF})-(\mathbf{ABC})(\mathbf{DEF})$；

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\quad \mathbf{B}\times\mathbf{C}\quad \mathbf{C}\times\mathbf{A})=(\mathbf{ABC})^2$。

〔各式的证明思路：对于①，依次求出左边的三个分量，设法配成$B_x(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-C_x(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$的形式即可导至右边。②，③，④，⑤可由①导出。对于⑥，令$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{E}$，利用轮换规则再结合②可证。对于⑦，只要注意行列式与转置行列式等值即可证。对于⑧由混合积的定义再结合⑤可证。〕

〔注〕向量无除法。因$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=b$无唯一解；$\mathbf{A}\times\mathbf{x}=\mathbf{B}$无解或无唯一解。

三、向量的分析运算

矢端曲线：以数量t为自变量的向量函数可表示为

$$\mathbf{A}(t)=A_x(t)\mathbf{i}+A_y(t)\mathbf{j}+A_z(t)\mathbf{k}.$$

从原点作矢量$\mathbf{A}(t)$，当t变化时，矢径终端描出的曲线称**矢端曲线**。当$A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$连续时，矢端曲线为连续曲线。

（一）极限运算：

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\mathbf{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\mathbf{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\mathbf{k};$$

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\mathbf{A}(t)=\mathbf{A}(t_0)$，则称$\mathbf{A}(t)$在$t_0$连续。

（二）微分运算：

1. 向量的导数

定义：若 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$存在，则称此极限为$\mathbf{A}(t)$在$t$处的**导数**。记为