总主编　吴万用　王永珊　　本册主编　杜晓彦

Mathematics

高二数学

课标时代de学

课标时代

上册

学什么　学习内容递进式全解

怎样学　学习方式示范性点拨

云南教育出版社
广西科学技术出版社

Mathematics

高二数学

课标时代de学

课标时代

上 册

本册主编 杜晓彦
编 者 杜晓彦 孟昭侠
庞红全

云南教育出版社
广西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

课标时代de学．高二数学．上册/杜晓彦主编．—昆明：云南教育出版社，2006.5

ISBN 7－5415－3049－2

Ⅰ.课…　Ⅱ.杜…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第041973号

课标时代de学

高二数学　上册

责任编辑：李安泰　王金宝

策　　划：何　醒　李安泰　王永珊

装帧设计：五明设计　王　毅

可铭堂艺术工作室＋凌子

出版发行：云南教育出版社　　广西科学技术出版社

社　　址：昆明市环城西路609号　南宁市东葛路66号

网　　址：http://kbsd.51fxb.com　　http://www.gxkjs.com

经　　销：全国新华书店

印　　刷：辽宁印刷集团美术印刷厂

开　　本：880mm×1230mm　1/16

印　　张：12

字　　数：440千字

版　　次：2006年5月第1版

印　　次：2006年5月第1次印刷

书　　号：ISBN 7－5415－3049－2/G·2432

定　　价：17.00元

课标时代de学

2006年最新版

课标时代

课标时代de学
2006年最新版

创造课标时代的辉煌

《课标时代 de 学》（第三次修订）

序　言

《课标时代 de 学》自 2004 年 6 月一出版，就听光夺目，受到书界同仁志士赞誉：它的“知识”与“功能”为一体的体例设计，字里行间彰显的“师与生”、“生与生”，“教与学”的互动，使它必然成为新时代教辅书的领头羊。

两年来我们接到数千封读者来信，祝贺和感谢我们编写了一套好书。

重庆市三十二中 2006 级某同学来信说：“……我初中时没把化学学好，每次考试总是不及格。上学期我买了一本化学科的《课标时代 de 学》，期末考试时化学考了班上第一名，86 分，分数不高，但是我很高兴，非常感谢你们，编了这么好的书……”

辽宁省辽阳县第三高级中学一位同学来信说：“……此书最大优点是能够多用，它不仅能够做练习，还可以用来预习，并且还能教你一些方法窍门，告诉你学习的重点等，满足了我们的各种需求，不像有些书太单一了。我被此书的魅力深深吸引，我会继续购买此书……”

河南省鄢陵县高级中学某同学来信说：“……因为我家太穷了，买不起教辅书，但是这次我看到这本书太好了，舍不得放下，狠狠心买下了，这是我第一次买教辅书。我给老师和同学看此书，老师说觉得挺不错的，同学们也觉得行……”

时代的步伐总是在前进。随着课标的教学理念日益深入人心，广大教师和学生对《课标时代 de 学》寄予了更大的希望和更高的要求，为此今年我们又对《课标时代 de 学》做了以下重点修订：

课标时代de学
2006年最新版

1. 关注"学习方式"的改变

丛书在"怎样学"栏目中设立的[阅读]、[讨论与探究]、[总结与反思]、[强化练习]四个模块是实施新的学习方式的具体途径。这次修订，力求让学生在掌握新的学习方式的同时对知识的理解更深刻，在"方法"与"知识"的结合上做了深加工。

比如，[阅读]的内容分两部分：(1)教材节选(教材最重要的段落)。通过"点悟"——教师的阅读示范，不仅让学生学会阅读，同时又理解和掌握本节的重点知识。(2)解题规范。以本节知识应用的典型题为例，做出规范解，通过"点悟"让学生知道本节知识的应用有这样的典型题，这类典型题应该有这样的规范解，从而学会规范的解题方法。

2. 关注"中、高考"

(1)以不变应万变，狠抓"知识点"。只要学生有牢固的知识基础，就能应对中、高考的多变的命题。这次修订根据中、高考的考点，拟定了若干个小标题进行剖析，让学生学得更直观，记得更牢，这是应对中档以下试题的最有效的途径。

(2)在"迁移"和"拓展"上下功夫，直击中、高考难题的命题方向。总结历年中、高考的情况，可找出一条命题规律：试题中的难题，不是由教材中或往届考题中"迁移"而成，就是由教材中的重点知识拓展而拟定。这次注重"迁移"和"拓展"的修订，能为学生找出难题的突破点。

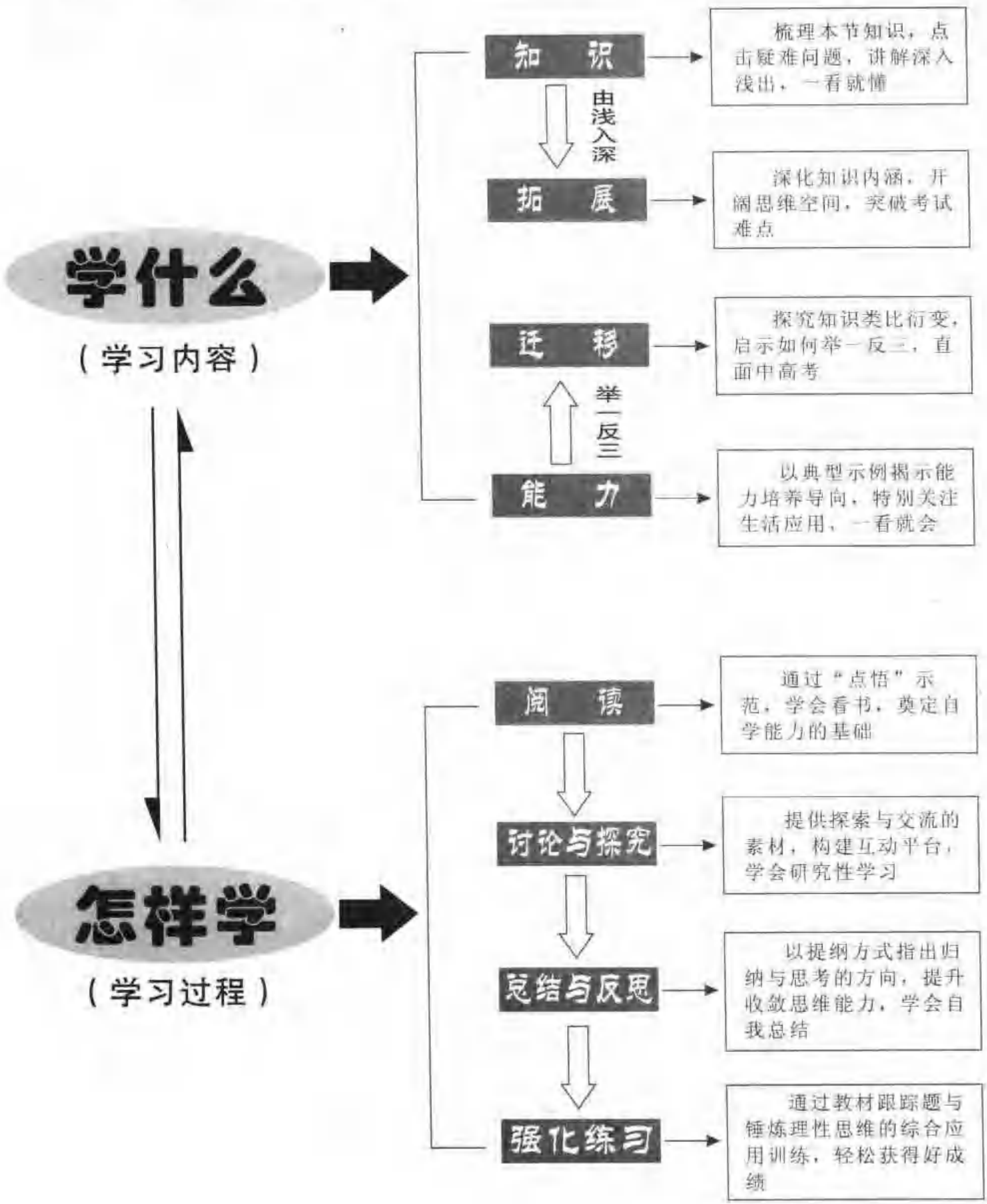
(3)这次修订中，增加了近几年全国各地中、高考的真题，以扩大学生视野，让学生了解中、高考的知识面、难易程度、题型、命题趋向等，做到心中有数，目标明确。

总之，这次修订，使得这套丛书时代性、实用性更强，可信度更高。

吴万用　王永珊

2006年4月于北京

导读示意图


学什么
（学习内容）
知识
梳理本节知识，点击疑难问题，讲解深入浅出，一看就懂
由浅入深
拓展
深化知识内涵，开阔思维空间，突破考试难点
迁移
探究知识类比衍变，启示如何举一反三，直面中高考
举一反三
能力
以典型示例揭示能力培养导向，特别关注生活应用，一看就会
怎样学
（学习过程）
阅读
通过“点悟”示范，学会看书，奠定自学能力的基础
讨论与探究
提供探索与交流的素材，构建互动平台，学会研究性学习
总结与反思
以提纲方式指出归纳与思考的方向，提升收敛思维能力，学会自我总结
强化练习
通过教材跟踪题与锤炼理性思维的综合应用训练，轻松获得好成绩

课标时代de学

2006年最新版

目录

第六章　不等式

知识链接

- 不等式
  - 不等式的性质
  - 不等式的证明 — 方法
    - 比较法
    - 综合法 ← 平均值定理
    - 分析法
    - 其他方法，如：
    - 反证法
    - 单调性法
    - 判别式法
    - 换元法
    - 放缩法
    - 数学归纳法
    - ……
  - 不等式的解法
    - 一元一次不等式(组)
    - 一元二次不等式(组)
    - 分式不等式
    - 无理不等式
    - 绝对值不等式
    - 高次不等式
    - 指数不等式
    - 对数不等式
    - 三角不等式
- 应用
  - 一是研究函数的性质：定义域
  - 值域
  - 单调性
  - 最值 ← 平均值定理
  - 二是取值范围问题
  - 三是方程根的分布问题
  - 四是实际应用问题

目标要求

知识目标

1. 理解不等式的基本性质及其证明．
2. 掌握重要不等式、均值定理并熟练运用．
3. 掌握不等式证明的基本方法并会运用．
4. 熟练掌握不等式的解法．
5. 会用不等式知识解决实际问题．

能力目标

1. 通过掌握不等式的性质、证明及求解综合问题，培养学生严谨推理、思维活跃、技巧构思及综合运用知识的能力．

2. 由不等式的解法培养学生的基本技能和认真仔细、分类讨论、全面考虑问题的能力．

3. 由不等式的应用问题培养学生关心社会、熟悉社会、独立思考以及将实际问题转化为数学问题的能力．

4. 通过不等式的学习，使学生进一步理解在现实世界中的量之间，不等是普遍的、绝对的，相等则是局部的、相对的，从而加深对辨证唯物主义观点的学习和理解．

第一节 不等式的性质

学什么

知识

1. 不等式的概念

(1) 定义：表示两个量之间的大小关系的式子，叫做不等式．不等式只有在实数范围内才有意义．

(2)分类：

按照严格与不严格的角度分：

①严格不等式：用“<”或“>”连接的不等式，叫做严格不等式．

②非严格不等式：用“≤”或“≥”连接的不等式，叫做非严格不等式．

按照成立与不成立的角度分：

①绝对不等式：如果一个不等式中的字母取任何实数值时，这个不等式都能成立，则这个不等式叫做绝对不等式．譬如：$x^2+1>0$；$\sin x\leqslant 1$；$a^2+b^2\geqslant 0$；$|a|\geqslant 0$ 等．

②条件不等式：如果一个不等式中的字母只有在某些范围内取值时，这个不等式才成立，则这个不等式叫做条件不等式．譬如：$x^2+x-2<0$；$|x|\leqslant 0$ 等．

③矛盾不等式：如果一个不等式，不论用任何实数代替其中的字母，它都不成立，这样的不等式叫做矛盾不等式，譬如：$1+x^2+y^2\leqslant 0$；$\sin x>|x|$；$1>2$ 等．

(3)两个不等式的关系：

同向、异向不等式：$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 叫做同向不等式；$f(x)>0$ 与 $g(x)<0$ 叫做异向不等式．

(4)不等式的解集：使 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)成立的 x 的集合，叫做 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的解集．

(5)证明不等式：证明不等式成立的过程叫做证明不等式．

(6)解不等式：求不等式的解集的过程叫做解不等式．

(按照这个定义，解不等式得到的结果是一个集合，其表示形式是集合或区间!)

2. 不等式的性质

(1) a 与 b 的大小顺序(实数的顺序性)与实数的运算性质之间的关系：

设 $a, b\in\mathbf{R}$，则

① $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；

② $a-b=0\Leftrightarrow a=b$；

③ $a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

[**点评** 在数轴上，两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b，右边的点表示的数比左边的点表示的数大．]

设 a, b 是正实数，则

① $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；

② $\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；

③ $\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

(2)基本性质：

对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$.

传递性：$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$.

[**点评** (i)可推广到 n 个的情形，即 $a_1>a_2$, $a_2>a_3$, $\cdots$, $a_{n-1}>a_n\Rightarrow a_1>a_n$.

(ii)传递性是不等式的证明方法——放缩法的理论依据．]

加法单调性：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

同向不等式可加性：$a>b$, $c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

异向不等式可减性：$a>b$, $c<d\Rightarrow a-c>b-d$.

[**点评** 可推广到 n 个的情形：

$a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $\cdots$, $a_n>b_n\Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$.]

乘法单调性：$a>b$, $c>0\Rightarrow ac>bc$.

正值同向不等式可乘性：$a>b>0$, $c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

正值异向不等式可除性：$a>b>0$, $c>d>0\Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

正值不等式可倒性：$a>b>0\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

[**点评** 可推广到 n 个的情形：$a_1>b_1>0$, $a_2>b_2>0$, $\cdots$, $a_n>b_n>0\Rightarrow a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$.]

幂和算术根的单调性：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$；

$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n>1$，且 $n\in\mathbf{N}$).

[**注意** ①学习不等式的基本性质，对表达不等式性质的各不等式，要注意“箭头”是单向的还是双向的，也就是说每条性质是否具有可逆性．

②运用不等式的5条基本性质解答不等式时，要注意其成立的条件，否则将会出现一些错误．如性质“$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ($n\in\mathbf{Z}$，且 $n>1$)”成立的条件是“n 是大于1的整数，$a>b>0$”，假如去掉“$b>0$”这个条件，取 $a=2$, $b=-3$, $n=2$，那么就会出现“$2^2>(-3)^2$”，即“4>9”的错误结论．]

在高考试题中，关于不等式性质的考查有四种类型：

1. 判断不等式能否成立

例1 判断下列命题的真假．

(1) $a>b$, $c=d\Rightarrow ac^n>bd^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$)；

(2)$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}\Rightarrow a>b$；

(3)$a>b$，且$ab\neq0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(4)$a<b<0$，$c<d<0\Rightarrow ac>bd$；

(5)$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Rightarrow a<b(n\in\mathbf{N}^*)$；

(6)$|a|<b\Rightarrow -b<a<b$.

解　此题要充分利用不等式的性质来解题．根据判断可得(1)，(3)是错误的．因为(1)不能保证 c，d 是正数；(3)是错误的．$\because\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，需分类讨论：

当 a、b 同号时，$\frac{b-a}{ab}<0$，$\therefore\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

当 a、b 异号时，$\frac{b-a}{ab}>0$，$\therefore\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(2)，(4)，(5)，(6)都是正确命题．

〔点评　不等式的性质是不等式变形的依据，必须全面、系统、熟练地掌握，其中有些性质的条件是结论的充要条件，也有些性质不可逆，解题时应引起充分重视．〕

例2　若 a，b 是任意实数，且 $a>b$，则　　（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

解　本题考查不等式的性质，可由不等式性质及函数单调性直接判断，或举反例判断．

$a>b\Leftrightarrow a-b>0\not\Rightarrow(a+b)(a-b)=a^2-b^2>0$，故A错；

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$ 而 $\frac{b}{a}<1\Leftrightarrow\frac{a-b}{a}>0\Leftrightarrow a>0$，且 $a>b$，故B错；

$\lg(a-b)>0\Leftrightarrow a-b>1$，而 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，故C错；

$\because$指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

$\therefore a>b\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故选D.

〔点评　若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件．本题可理解为 $a>b$，不是 $a^2>b^2$，$\frac{b}{a}<1$，$\lg(a-b)>0$ 的充分条件，而 $a>b$ 是 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 的充要条件．〕

例3　实数 a、b、c、d 满足：① $d>c$；② $a+b=c+d$；③ $a+d<b+c$. 则 a、b、c、d 的大小顺序是否确定？若确定，请按由大到小的顺序进行排列；若不确定，则添加条件使它们的大小顺序能确定下来．

分析　如何比较这四个数的大小呢？如果两两比较，太繁琐．注意到条件①已明确地指出两数 d 与 c 的大小，而②与③中涉及到四个数的既有不等关系，又有等量关系，把它们适当变形，则可用等量代换把它们转化为两个数的大小关系；利用等量关系也可用消元来达到目的．

解　由②得 $a=c+d-b$，

$\therefore$由③得：$c+2d-b<b+c$，$\therefore d<b$.

同理 $b=c+d-a$. $\therefore$由③得 $2c+d-a>a+d$.

$\therefore c>a$.　又 $d>c$，$\therefore b>d>c>a$.

〔点评　本题条件较多，如果两两比较，一般需要进行 $C_4^2=6$ 次，如果能找到一个合理的程序，则可减少解题的步骤，本题的关键是找到了一个合理的程序，问题则干净利落地解决了．〕

2. 判断命题间的充分必要关系

例　设 x，$y\in\mathbf{R}$，判断下列各题中，命题 A 与命题 B 的充分必要关系．

(1)命题 A：$\begin{cases}a>0,\\b>0;\end{cases}$　　命题 B：$\begin{cases}a+b>0,\\ab>0;\end{cases}$

(2)命题 A：$\begin{cases}x>2,\\y>2;\end{cases}$　　命题 B：$\begin{cases}x+y>4,\\xy>4.\end{cases}$

解　(1)若 $a>0$，且 $b>0$，则 $ab>0$，且 $a+b>0$.

若 $ab>0\Rightarrow a$，b 同号，又 $a+b>0$，$\therefore a>0$，且 $b>0$.

$\therefore A$ 是 B 的充要条件．

(2)若 $x>2$，且 $y>2$，则 $x+y>4$，且 $xy>4$.

若 $x+y>4$，且 $xy>4$，如 $x=1$，$y=5$，则有 $x<2$.

$\therefore A$ 是 B 的充分不必要条件．

〔点评　利用不等式的性质及充分条件、必要条件的定义来判断命题中条件与结论之间的逻辑关系是常见的基本题型．〕

3. 比较数(式)的值的大小及求某一范围

例1　(1)已知 $a>0$，试比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小．

解　$a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}=\frac{(a+1)(a-1)}{a}$.

$\because a>0$，令 $(a+1)(a-1)>0$，得 $a>1$.

$\therefore$当 $a>1$ 时，$\frac{(a+1)(a-1)}{a}>0$，此时 $a>\frac{1}{a}$；

令 $(a+1)(a-1)=0$，得 $a=1$. $\therefore$当 $a=1$ 时，$\frac{(a+1)(a-1)}{a}=0$，此时 $a=\frac{1}{a}$.

令 $(a+1)(a-1)<0$，得 $0<a<1$. $\therefore$当 $0<a<1$ 时，$\frac{(a+1)(a-1)}{a}<0$，此时 $a<\frac{1}{a}$.

综上所述：当 $0<a<1$ 时，$a<\frac{1}{a}$；

当 $a=1$ 时，$a=\frac{1}{a}$；

当 $a>1$ 时，$a>\frac{1}{a}$.

〔点评　令 $\frac{(a+1)(a-1)}{a}>0$ 是确认分类标准的关键，是寻找分类标准的常用方法，若将条件 $a>0$ 改为 $a<0$，请读者自行完成．〕

(2)设 a、$b\in\mathbf{R}$，$a+b=2$，且 $a\neq b$. 试排列 1，ab，$\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小顺序．

分析　先取特殊值尝试，例如取 $a=2$，$b=0$，知 $ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$，"投石问路"是个好办法，但上面探得的结论是否具有一般性，还需作出证明．

证明　$\because 1-ab=1-a(2-a)=a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant$

0，但当 $a=1$ 时，$b=2-a=1$，与已知条件 $a\neq b$ 发生矛盾，因此 $a\neq 1$，$\therefore 1>ab$.

又 $\frac{a^2+b^2}{2}-1=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)=\frac{1}{2}[a^2+(2-a)^2-2]=(a-1)^2>0$,

$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}>1>ab$.

〔点评　本题先采用“投石问路”的办法，做到“心中有数”，从而省略了 ab 与 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小比较，以使证明过程简化．〕

例 2　(1)设 $2<a\leqslant 5$, $3\leqslant b<10$. 求 $a+b$，$a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的范围；

(2)如果 $2a<\frac{1}{x}<-a$，求 x 的取值范围．

解　(1)因为　$2<a\leqslant 5$, $3\leqslant b<10$,

所以　$2+3<a+b<5+10$,

即　$5<a+b<15$.

因为　$3\leqslant b<10$,

所以　$-10<-b\leqslant -3$.

又　$2<a\leqslant 5$,

所以　$2-10<a-b\leqslant 5-3$,

即　$-8<a-b\leqslant 2$.

因为　$3\leqslant b<10$, 所以 $\frac{1}{10}<\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{3}$.

又　$2<a\leqslant 5$，所以 $\frac{1}{5}<\frac{a}{b}\leqslant\frac{5}{3}$.

〔点评　同向不等式两边分别相加，不等式仍然成立，但同向不等式不能两边分别相减或相除．本题是先创设应用不等式性质的条件，然后再合成出所求的结论．〕

(2)　$\because 2a<-a$，$\therefore a<0$.

若 $x>0$，则 $2a<\frac{1}{x}<-a\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-a\Leftrightarrow x>-\frac{1}{a}$,

$\therefore x>-\frac{1}{a}$;

若 $x<0$，则 $2a<\frac{1}{x}<-a\Leftrightarrow 2a<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x<\frac{1}{2a}$，$\therefore x<\frac{1}{2a}$.

综上所述：$x\in(-\infty,\frac{1}{2a})\cup(-\frac{1}{a},+\infty)$.

用图表示，则如图 6-1-1 所示．

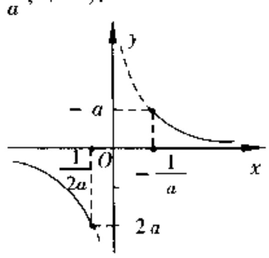


图 6-1-1

〔点评　由条件确定 a 的符号是本题的关键．本题第二个关键问题是对 x 进行讨论；用图形表示已知和结论，使学生数形结合，达到真正理解其含义的目的．〕

4. 利用不等式性质证明不等式

例　设 a、$b\in\mathbf{R}^+$，m、$n\in\mathbf{N}_+$，且 $1\leqslant m<n$. 试证明：$a^n+b^n\geqslant a^{n-m}\cdot b^m+a^m\cdot b^{n-m}$.

证明　$a^n+b^n-a^{n-m}\cdot b^m-a^m\cdot b^{n-m}=a^{n-m}(a^m-b^m)-b^{n-m}(a^m-b^m)$

$=(a^m-b^m)(a^{n-m}-b^{n-m})$.

若 $a>b>0$, $m\in\mathbf{N}_+$，$n-m\in\mathbf{N}_+$,

则 $a^m>b^m$, $a^{n-m}>b^{n-m}$.

$\therefore(a^m-b^m)\cdot(a^{n-m}-b^{n-m})>0$.

即 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}b^m+b^{n-m}\cdot a^m$.

若 $a=b>0$, 则 $a^n+b^n=a^{n-m}b^m+a^m\cdot b^{n-m}$;

若 $0<a<b$, 则 $a^m<b^m$, $a^{n-m}<b^{n-m}$．$\therefore a^n+b^n>a^{n-m}b^m+a^mb^{n-m}$.

综上所述，有 $a^n+b^n\geqslant a^{n-m}\cdot b^m+a^m\cdot b^{n-m}$.

〔点评　作差比较法是证明不等式的基本方法之一，其一般步骤为“作差——变形——判断符号”．在变形中，尽可能在作差后转化为若干因式积的形式或可判断符号的多项式，再与 0 比较大小．对 m，n 取具体特殊值，可得到一些大家比较熟悉的题目：

(1)已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$, 求证：$a^5+b^5\geqslant a^3b^2+a^2b^3$;

(2)已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$, 求证：$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$;

(3)已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$, 求证：$a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$.〕

能力

1. 判断能力

例 1　下列命题中正确的是　(　　)

A. $|x|\geqslant a$ 是绝对不等式

B. $2\leqslant 2$ 是矛盾不等式

C. $(x-2)^4>0$ 是条件不等式

D. $x>0$ 与 $|x|>0$ 是同解不等式

〔点评　若混淆绝对值不等式与绝对不等式，则可能误选 A. 事实上，a 没有限定为非正数，故不能选 A. $2\leqslant 2$ 意为 2 小于或等于 2，即 2 不大于 2，不是矛盾不等式，不选 B. $|x|>0\Leftrightarrow x>0$，或 $x<0$，也不能选 D. 而 $(x-2)^4>0$ 只有当 x 为不等于 2 的实数时才能成立，即为条件不等式，故应选 C.〕

例 2　若 $a, b, x, y\in\mathbf{R}$，则

$\begin{cases}x+y>a+b,\\(x-a)(y-b)>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>a,\\y>b\end{cases}$ 的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

证明　(1)若 $\begin{cases}x+y>a+b, & ①\\(x-a)(y-b)>0 & ②\end{cases}$

由式②知　$x-a$ 与 $y-b$ 同号，

又由式①得　$(x-a)+(y-b)>0$,

所以　$x-a>0$, $y-b>0$, 即 $x>a$，且 $y>b$.

故充分性成立．

(2)若 $\begin{cases}x>a,\\y>b\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-a>0,\\y-b>0\end{cases}$ 有 $\begin{cases}x+y>a+b,\\(x-a)(y-b)>0.\end{cases}$

故必要性成立．

综合(1)，(2)知，应选 C.

2. 思维严谨能力

例　已知 $x>0$, $x\neq 1$, $m>n>0$,

比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小．

解 $x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$

$=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}$

$=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}$

$=(x^m-x^n)(1-\frac{1}{x^{m+n}})$.

(1)当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$ 知 $x^m<x^n$，且 $0<x^{m+n}<1$，则有 $1-\frac{1}{x^{m+n}}<0$，所以

$$(x^m-x^n)(1-\frac{1}{x^{m+n}})>0.$$

(2)当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$ 知 $x^m>x^n$，且 $x^{m+n}>1$，则有

$$1-\frac{1}{x^{m+n}}>0,$$

所以 $(x^m-x^n)(1-\frac{1}{x^{m+n}})>0$.

综上所述，有 $x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，

即 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}$.

〔**点评** 按充分条件、必要条件、充要条件的概念进行判断．从充分性和必要性两个方面进行推理．在判断命题的充要条件时，若由条件出发，每一步推理都应用的是充要条件，则最后得到的结论与条件是互为充要条件的．解答本题所用的数学思想是分类讨论思想．解答含有参数的不等式题，一般都需要对参数的取值进行分类讨论，这需要思维严谨．〕

3. 逻辑推理能力

例1 若 $-1<a<b<1$，$-2<c<3$，则 $(a-b)\cdot c$ 的取值范围是__________.

解 $\because -1<a<b<1$，$\therefore -2<a-b<0$，$\therefore 0<-(a-b)<2$.

当 $-2<c<0$ 时，$0<-c<2$，$\therefore 0<[-(a-b)](-c)<4$.

即 $0<(a-b)\cdot c<4$.

当 $c=0$ 时，$(a-b)\cdot c=0$；

当 $0<c<3$ 时，$0<[-(a-b)]\cdot c<6$.

即 $-6<(a-b)\cdot c<0$.

综上可得 $-6<(a-b)\cdot c<4$.

〔**点评** 运用不等式的性质时，要注意不等式成立的条件．如本题利用的是正值同向不等式的可乘性．〕

例2 求证实数 a、b、c 均为正数的充要条件是：

$a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$.

分析 必要性易证．因为条件 $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$，$abc>0$ 的结构比较复杂，而结论的否定比较简单，故可用反证法证明其充分性．

证明 必要性：

$\because a$、b、c 均为正数，

$\therefore a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$.

充分性：

$\because abc>0$，$\therefore a$、b、c 均为正数，或两负一正．

下面用反证法证明两负一正不可能．不失一般性，假设 $a<0$, $b<0$, $c>0$，则由 $a+b+c>0$. 知 $c>-(a+b)>0$，两边同乘以负数 $a+b$，得

$(a+b)c<-(a+b)^2$，即 $ac+bc<-a^2-2ab-b^2$.

两边同加 ab，得 $ac+bc+ab<-(a^2+ab+b^2)=-\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]<0$.

这与 $ab+bc+ac>0$ 矛盾，因此 a、b、c 两负一正不可能．

$\therefore a$、b、c 均为正数．

〔**点评** 主要考查不等式的性质及逻辑推理能力．本题条件复杂，一定要找到一个合理的程序和巧妙的方法．当结论的否定比较简单时，往往采用反证法．〕

4. 分类讨论、全面分析问题的能力

例1 若 $m>0$，比较 m^m 与 2^m 的大小．

解 当 $m=2$ 时，$\frac{m^m}{2^m}=(\frac{m}{2})^m=1$，此时 $m^m=2^m$；

当 $0<m<2$ 时，$\frac{m^m}{2^m}=(\frac{m}{2})^m<1$，此时 $m^m<2^m$；

当 $m>2$ 时，$\frac{m^m}{2^m}=(\frac{m}{2})^m>1$，此时 $m^m>2^m$.

〔**点评** 注意到 $m^m>0$, $2^m>0$，且次数相等，可采用作比法．比较两实数的大小，是用"作差法"还是"作比法"，要视具体问题而定．〕

例2 设 $f(x)=1+\log_x3$，$g(x)=2\log_x2$，其中 $x>0$，且 $x\neq 1$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小．

解 $f(x)-g(x)=\log_x\frac{3}{4}x$，$\log_x\frac{3}{4}x$ 的正负取决于 x、$\frac{3}{4}x$ 与 1 的大小关系．所以需分以下三种情况讨论．

当 $\frac{3}{4}x=1$ 时，即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x=0$，有 $f(x)=g(x)$；

当 $0<x<1$，且 $0<\frac{3}{4}x<1$，或 $x>1$，且 $\frac{3}{4}x>1$ 时，

即 $0<x<1$，或 $x>\frac{4}{3}$ 时，有 $f(x)>g(x)$；

当 $0<x<1$，且 $\frac{3}{4}x>1$，或 $x>1$，且 $0<\frac{3}{4}x<1$ 时，

即 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，有 $f(x)<g(x)$.

〔**点评** 运用作差法、分类讨论思想方法．〕

5. 生活应用

例 某公司有一批不易存放的蔬菜，急需从 A 地运到 B 地，有汽车、火车、直升飞机三种运输工具可供选择，三种运输工具的主要参考数据如下：

运输工具	途中速度（千米/时）	途中费用（元/千米）	装卸时间（小时）	装卸费用（元）
汽车	50	8	2	1000
火车	100	4	4	2000
飞机	200	16	2	1000

若这批蔬菜在运输过程(含装卸时间)中的损耗为300元/时，问采用哪种运输工具比较好，即运输过程中的费用与损耗之和最小.

解 设A、B两地的距离为s千米，则采用三种运输工具运输(含装卸)过程中的费用和时间可用下表给出：

运输工具	途中及装卸费用	途中时间
汽车	$8s+1000$	$\frac{s}{50}+2$
火车	$4s+2000$	$\frac{s}{100}+4$
飞机	$16s+1000$	$\frac{s}{200}+2$

分别用y_1、y_2、y_3表示用汽车、火车、飞机运输时的总支出，则有：

$$y_1=8s+1\,000+(\frac{s}{50}+2)\times 300=14s+1\,600,$$

$$y_2=4s+2\,000+(\frac{s}{100}+4)\times 300=7s+3\,200,$$

$$y_3=16s+1\,000+(\frac{s}{200}+2)\times 300=17.5s+1\,600.$$

$\because s>0$，$\therefore y_1<y_3$恒成立.

而$y_1-y_2<0$的解为$s<\frac{1\,600}{7}$，

$y_2-y_1<0$的解为$s>\frac{3\,200}{21}$.

当$s<\frac{1\,600}{7}$(千米)时，$y_1<y_2$，$y_1<y_3$，

此时采用汽车较好；

当$s=\frac{1\,600}{7}$(千米)时，$y_1=y_2<y_3$，

此时采用汽车或火车较好；

当$s>\frac{1\,600}{7}$(千米)时，$y_2<y_1$，

此时采用火车较好.

〔**点评** 令$y_1-y_2<0$，$y_2-y_1<0$是确认分类标准的关键，是寻找分类标准的常用方法.〕

迁移

例1 求证函数$f(x)=x^3+1(x\in\mathbf{R})$是增函数.

证明 设函数$f(x)$的自变量任取的两个值x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

$$=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right].$$

因为$x_1-x_2<0$，$\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$，

所以 $(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$.

即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在定义域内是增函数.

〔**点评** 以前所学的函数单调性的证明过程，实际上就是比较两个实数的大小.〕

例2 若$0<x<\pi$，$0<y<\pi$，求证：

$$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)\leqslant\sin\frac{x+y}{2}.$$

证明 $\because\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$，$0<x<\pi$，$0<y<\pi$，$\therefore-\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\cos\frac{x-y}{2}\leqslant 1$.

又$\because 0<\frac{x+y}{2}<\pi$，$\therefore\sin\frac{x+y}{2}>0$.

$$\therefore\cos\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x+y}{2}\leqslant\sin\frac{x+y}{2}.$$

故$\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)\leqslant\sin\frac{x+y}{2}$.

〔**点评** 不等式的性质迁移到三角函数值大小的比较.本题采用三角函数的有界性及利用不等式放缩达到目的.〕

例3 设$n\in\mathbf{N}^*$，求证：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$.

证明 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=2(\frac{1}{1+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}})>2(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})$

$=2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=2(\sqrt{n+1}-1)$.

〔**点评** 不等式的性质迁移到函数值大小的比较.本题采用了放缩法、数学归纳法等方法.〕

拓展

柯西不等式及其应用.

中学数学基本上是初等数学知识，但它是高等数学的基础.高等数学是初等数学的发展，并对初等数学和中学数学具有一定的指导作用.在中学教材和教学中适当渗透高等数学知识，可适当解决学生从中学到大学这个变化过程中所产

生的不适应．下面介绍柯西不等式及其在中学数学中的一些应用．

柯西不等式：$(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 (i=1,2,\cdots,n)$．当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时等号成立．

应用一：导出常见的数学公式

例 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in \mathbf{R}$，则$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$．

证明 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=(a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+\cdots+a_n\cdot 1)^2$

$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(\underbrace{1^2+1^2+\cdots 1^2}_{n\text{个}1^2})=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)n$，

即$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n}\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$．

$\therefore \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$．

应用二：证明不等式

例 已知：a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：$(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})\geqslant 9$．

证明 $[(\sqrt{\frac{a}{b}})^2+(\sqrt{\frac{b}{c}})^2+(\sqrt{\frac{c}{a}})^2][(\sqrt{\frac{b}{a}})^2+(\sqrt{\frac{c}{b}})^2+(\sqrt{\frac{a}{c}})^2]\geqslant(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}})^2=(1+1+1)^2=9$．

应用三：求函数的最值

例 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$ 的最大值．

解 由柯西不等式得

$(1\cdot\sqrt{4a+1}+1\cdot\sqrt{4b+1}+1\cdot\sqrt{4c+1})^2\leqslant(1^2+1^2+1^2)(4a+1+4b+1+4c+1)$

$=3[4(a+b+c)+3]$．

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时，等号成立．

$\therefore \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$的最大值为$\sqrt{21}$．

应用四：解决几何问题(略)

怎样学

阅读

1．教材节选

“这就是说：

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；
$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；
$a<b\Leftrightarrow a-b<0$．

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了．”

［**点悟** (1)“作差法”的理论依据是实数的大小顺序与实数的运算性质之间的关系．其一般步骤为“作差→变形→判号→定论”．其中变形是作差法的关键，配方和因式分解是常用的变形手段．为了便于判断“差式”的符号，常将“差式”变形为一个常数或一个常数与几个平方和的形式，或几个因式的积等．

(2)当“差”中含有参数时，一般情况下都需要对参数的取值进行分类讨论．］

2．解题规范

例 已知 $a>b>c$，求证$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$．

证明 因为 $a>b>c$，

所以 $a-c>a-b>0$，

所以 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a-c}$．

又因为 $\frac{1}{b-c}>0$．

所以 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}$，

所以$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$．

［**点悟** 想到“$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}>\frac{1}{a-c}$”是关键．运用不等式的性质解题时，一定要注意其限制条件．］

讨论与探究

例1 船在流水中的 A 地和 B 地间往返行驶一次的平均速度和船在静水中的速度是否相等，为什么？

解 设 A、B 两地间的距离为 S，船在静水中的速度为 m，水流速度为 $n(m>n>0)$，则船在 A、B 两地间往返行驶一次的时间为

$t=\frac{S}{m+n}+\frac{S}{m-n}=\frac{S\cdot 2m}{m^2-n^2}$，

平均速度为$\bar{v}=\frac{2S}{t}=\frac{m^2-n^2}{m}$．

$\because \bar{v}-m=\frac{m^2-n^2}{m}-m=-\frac{n^2}{m}<0$，

$\therefore \bar{v}<m$．

综上可知，船在流水中往返一次的平均速度与船在静水中的速度不相等，且平均速度小于船在静水中的速度．

［**点评** 本题是直接应用不等式的性质求解的一个应用问题．］

例 2 我们知道，在△ABC 中，若 $a^2+b^2=c^2$，则△ABC 为直角三角形，现在请你研究，若 $c^n=a^n+b^n(n>2, n\in\mathbf{N})$，那么△$ABC$ 为何种三角形？

解 △ABC 为锐角三角形，理由如下：$\because a^n<c^n, b^n<c^n$，

$\therefore a<c, b<c. \therefore \frac{a}{c}\in(0,1)$，且 $\frac{b}{c}\in(0,1)$.

又 $c^n=a^n+b^n$，$\therefore (\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n=1$.

而 $n>2$，$\therefore (\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2>(\frac{a}{c})^n+(\frac{b}{c})^n=1$.

$\therefore a^2+b^2>c^2$，即∠C 为锐角.

例 3 若 a、b、c、d 均为实数，使不等式 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>0$ 和 $ad>bc$ 都成立的一组值(a、b、c、d)是________(只要写出适合条件的一组值即可).

解 写一个等比的式子，如 $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}>0$. 此时内项积和外项积相等，减小 $\frac{4}{2}$ 的分子则分数值变小，把上式变成不等式：$\frac{2}{1}>\frac{3}{2}>0$，此时外项积大于内项积，不合题意．接着进行变换可得 $\frac{2}{1}>\frac{-3}{-2}>0$，此时 $2\times(-2)<1\times(-3)$，

故{2，1，-3，-2}是符合要求的一组值.

总结与反思

1. 哪些知识点应熟练掌握?其中哪个知识点最难?

〔**提示** 不等式基本性质的正确使用应熟练掌握，基本定理的推导是难点.〕

2. 哪些知识间易混?怎样区分?

〔**提示** 不等式的基本性质 3 中的可加性和可减性易混，注意同向、异向；性质 4 的可乘性、可除性易混，注意符号.〕

3. 本节知识的应用表现在哪些方面?有哪些习题类型?

〔**提示** 主要应用在：实数的大小的比较，函数的单调性、函数的值域、最值，不等式的放缩，三角函数等方面.

类型题四类：比值、判断题、逻辑推理题(充要条件)、证明题(见前面例题).〕

思化反习

教材跟踪练习

1. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，下面不等式成立的是 (　　)

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab^2>ab>a$

C. $ab>a>ab^2$　　D. $ab>ab^2>a$

2. 下列命题中正确的是 (　　)

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$　　B. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\Rightarrow a>b$

C. $\left.\begin{matrix}a^3>b^3\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\left.\begin{matrix}a^2>b^2\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

3. 若角 α，β 满足 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $\alpha-\beta$ 的取值范围是 (　　)

A. $-\pi<\alpha-\beta<0$　　B. $-\pi<\alpha-\beta<\pi$

C. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$　　D. $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

4. 若 $x+y>0$，$a<0$，$ay>0$，则 $x-y$ 的值为 (　　)

A. 大于 0　　B. 小于 0

C. 等于 0　　D. 符号不确定

5. 若 x, y, z 均为大于 -1 的负数，则一定有 (　　)

A. $x^2-y^2-z^2<0$　　B. $xyz>-1$

C. $x+y+z<-3$　　D. $(xyz)^2>1$

6. 如果 $\log_a 3>\log_b 3>0$，那么 a、b 间的关系为 (　　)

A. $0<a<b<1$　　B. $1<a<b$

C. $0<b<a<1$　　D. $1<b<a$

7. 如果 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是 (　　)

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

8. "$\alpha+\beta>2$，且 $\alpha\beta>1$"是"$\alpha>1, \beta>1$"成立的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式① $a+b<ab$；② $|a|>|b|$；③ $a<b$；④ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

10. 对于 $0<a<1$，给出下列四个不等式：① $\log_a(1+a)<\log_a(1+\frac{1}{a})$；② $\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$；③ $a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$；④ $a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$. 其中成立的是 (　　)

A. ①与③　　B. ①与④

C. ②与③　　D. ②与④

11. 已知 $\frac{a}{1-a}>0$，且 $x>1$，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $a^x<x^{\frac{1}{a}}<\log_a x$　　B. $\log_a x<a^x<x^{\frac{1}{a}}$

C. $\log_a x<x^{\frac{1}{a}}<a^x$　　D. $a^x<\log_a x<x^{\frac{1}{a}}$

12. 若不等式 $[(1-a)n-a]\lg a<0$ 对于任意正整数 n 恒

成立，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\{a|a>1\}$　　B. $\{a|0<a<\frac{1}{2}\}$

C. $\{a|0<a<\frac{1}{2}$,或 $a>1\}$　　D. $\{a|0<a<\frac{1}{3}$,或 $a>1\}$

13. 已知函数 $f(x)=x+x^3$, x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$, $x_1+x_2<0$, $x_2+x_3<0$, $x_3+x_1<0$,那么 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$的值　　(　　)

A. 一定大于0　　B. 一定小于0

C. 等于0　　D. 正负都有可能

14. 若 $m, n\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,且 $m\cdot\sin m-n\cdot\sin n>0$，则下列结论中正确的是　　(　　)

A. $m>n$　　B. $m+n>0$

C. $m<n$　　D. $m^2>n^2$

15. 已知函数 $g(x)=2^x-1$,函数 $y=f(x)$是 $y=g(x)$的反函数，设 $a>b>c>0$,则$\frac{f(a)}{a}$,$\frac{f(b)}{b}$,$\frac{f(c)}{c}$ 的大小关系为　　(　　)

A. $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(c)}{c}<\frac{f(b)}{b}$

B. $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}<\frac{f(c)}{c}$

C. $\frac{f(c)}{c}<\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$

D. $\frac{f(c)}{c}<\frac{f(b)}{b}<\frac{f(a)}{a}$

16. 已知函数 $y=f(x)$对任意实数都有 $f(-x)=f(x)$, $f(x)=-f(x+1)$，且在$[0,1]$上单调递减，则　　(　　)

A. $f(\frac{7}{2})<f(\frac{7}{3})<f(\frac{7}{5})$

B. $f(\frac{7}{5})<f(\frac{7}{2})<f(\frac{7}{3})$

C. $f(\frac{7}{3})<f(\frac{7}{2})<f(\frac{7}{5})$

D. $f(\frac{7}{5})<f(\frac{7}{3})<f(\frac{7}{2})$

17. 如图 6-1-2 所示，A、B、C、D 是四个采矿点，l 表示公路，线段表示道路，$ABQP$、$BCRQ$、$CDSR$ 近似于正方形，A、B、C、D 的采矿量之比为 6:2:3:4，且运矿费用与路程、采矿量的乘积成正比，现要从 P、Q、R、S 中选一中转站，使得采矿点到中转站费用最少，则应选　　(　　)

A. P 点

B. Q 点

C. R 点

D. S 点

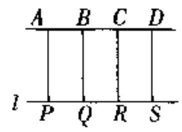


图 6-1-2

18. 已知 $1\leqslant a+b\leqslant 5$, $-1\leqslant a-b\leqslant 3$，求 $3a-2b$ 的取值范围．

理性思维　综合应用

1. 已知 $-1<2a<0$. 将下列各数按大小顺序排列，$A=1+a^2$, $B=1-a^2$, $C=\frac{1}{1+a}$, $D=\frac{1}{1-a}$.

2. 已知 $60<x<84$, $28<y<33$，则$\frac{x}{y}$ 可取得的整数值是什么?

3. 已知 $-3<a<b<1$, $-2<c<-1$，求证 $-16<(a-b)c^2<0$.

4. 设 $\alpha_1\approx\sqrt{2}$,令 $\alpha_2=1+\frac{1}{1+\alpha_1}$,

(1)证明 $\sqrt{2}$ 介于 α_1 与 α_2 之间;

(2) α_1、α_2 中哪个更接近 $\sqrt{2}$?

5. 已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$,证明方程 $ax^2+2bx+c=0$ 的两实根 x_1, x_2 满足 $\sqrt{3}<|x_1-x_2|<2\sqrt{3}$.

6. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$, $n\in\mathbf{N}^*$，求证$a^{\frac{n^2+n}{4}}<\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}\cdot\frac{1+a^3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1+a^n}{2}$.

7. 设 $f(x)$是定义域为$(-\infty,0)\cup(0+\infty)$的奇函数，且在$(-\infty,0)$上是增函数．

(1)若 $f(1)=0$，解关于 x 的不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0(a>1)$;

(2)若 $mn<0$，$m+n\leqslant 0$，求证 $f(m)+f(n)\leqslant 0$.