高中
平面几何
指导复习参考資料

前　　言

这一套书共包括高中物理、代数、平面几何、立体几何、三角等五種，是我局組織本市一高、二高、三高、工中、鉄中与回中等学校的有关課程教学的教师編写的，并經我局教学研究室審查定稿，原是作为本市高中毕业班教师指导复习以及学生平时結合課本进行复习参考用的。現为了扩大供应，并作为与本省各地高中教师交流对学生复习輔导經驗参考，特由河南人民出版社公开出版。

这套书是从教师輔导同学复习功課的要求出发編写的。为了便于各地教师輔导同学复习参考，特結合課本內容添选了一部分例题；同时也为了便于同学們独立思考，又酌情增加了一部分思考复习題，以便同学們在詳閱課本之后，运算解决。

但由于水平与編写的时間所限，錯誤与不妥之处，在所难免，希望各地教师同志在使用参考中随时提出宝貴意見，以便作进一步修訂。

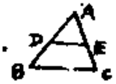
郑州市教育局

1958年6月

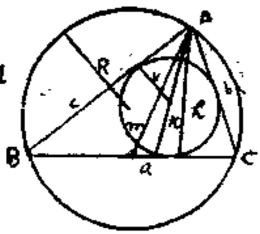
目　　錄

(一) 定义和定理

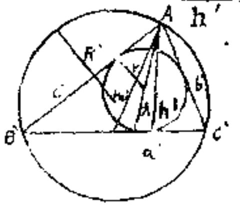
- 用长度單位量一条線段
  - 被量線段和长度單位有公度
    - 长度單位本身是最大公度……整数 } 有理数
    - 另外有最大公度…分数 } 有理数
  - 被量線段和长度單位沒有公度……………………无理数
- 有理数、无理数 } 实数

- 相似多边形（包括三角形）定义——各角对应相等并且对应边成比例的多边形。
- 三角形相似判定定理
  1. 

     中DE∥BC則△ADE∽△ABC。
  2. 有两双角对应相等.
  3. 有一双角对应相等，夾等角的两边又成比例。
  4. 三双边成比例。
- 1.在两个相似三角形中，一切对应線段都和对应边成比例如：



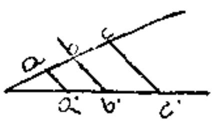
关于比例綫段的定理



$$\frac{h}{h'}=\frac{t}{t'}=\frac{m}{m'}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

2.在每个相似多边形中，周长的比，对应边的比都是同一数值（相似系数）

3.平行綫截角的两边成比例綫段

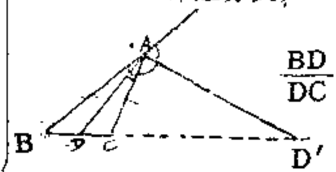


$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

或$a:b:c=a':b':c'$

4.綫束截两条平行綫成比例綫段。

5.三角形內角（或外角）的平行綫，內分（或外分）对边成两条綫段和两条鄰边成比例（逆命題亦眞）



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\quad \frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}$$

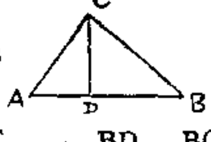
相似形

两个相似多边形可以分成个数相同排列位置一样的相似三角形（逆命題亦眞）

射影定理

△ABC中 ∠C=d，CD⊥AB

则



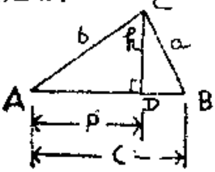
1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$ 2) $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$ 3) $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BA}$

或 $CD^2 = AD \cdot BD$ 或 $AC^2 = AD \cdot AB$

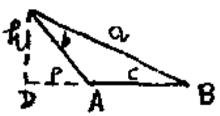
或 $BC^2 = BD \cdot BA$.

勾股定理.

勾股定理推广

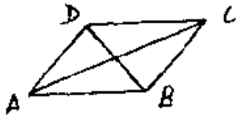


$a^2 = b^2 + c^2 - 2cp$. 中



$a^2 = b^2 + c^2 + 2cp$. 中

1)平形四边形对角綫平方和定理



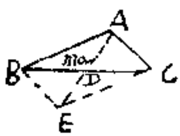
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

2)由三角形三边求高公式:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

中綫长公式:

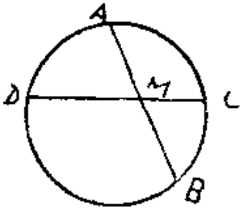


$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

或 $b^2 + c^2 = 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2\right]$

三角形的一角是銳角，直角或者鈍角，可以由它所对的边的平方小于，等于或者大于其他两边平方的和决定。

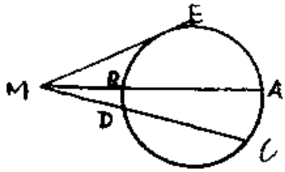
圓幂定理



图中

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

(逆命題也眞可証四点共圓)



图中

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = ME^2$$

(逆命題也眞可証四点共圓或一直綫和圓相切)

关于比例綫段的定理，射影定理，勾股定理，勾股定理的推广，圓幂定理都是解决計算題布列算术式或代数方程的依据，也是解决終結为代数恒等式的証明題的依据。

正多边形性質：

1. 如果把圓分成 n 等分
   1. 連接每相鄰两个分点的几条弦組成一个內接正 n 边形。
   2. 切于各分点的几条切綫組成一个外切正 n 边形。
2. 都可作一个外接圓和一个內切圓而且两圓同心。
3. 边数相同的正多边形相似。

矩形面积＝底×高

平行四边形面积＝底×高

三角形面积＝底×高×$\frac{1}{2}$＝$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

面积：

三角形面积比：

(1)任意两三角形面积之比＝底高乘积之比.

(2)等底两三角形面积比＝高的比.

(3)等高两三角形面积比＝底的比.

(4)有一双角对应相等两三角形面积的比＝等角的夾边乘积的比。

(5)有一双角互为补角两三角形面积的比＝补角夾边乘积之比。

(6)两相似△面积的比＝对应边平方的比。

菱形面积＝两条对角線乘积的一半＝底×高。

梯形面积＝$\frac{1}{2}$(上底＋下底)×高＝中綫×高。

相似多边形面积的比＝对应边平方的比。

正多边形面积＝$\frac{1}{2}nar$（n是边数、a是边长、r是边心距）

圓面积＝πR^2，扇形面积＝弧长×半徑×$\frac{1}{2}$，

弓形面积＝扇形面积－三角形面积

(二) 証 題 法

按思考方法的不同分类如下表

証題法：

- 演繹法
  - 直接証法(順証法)
    - 綜合法
    - 解析法
  - 間接証法(反証法)
    - 归謬法
    - 穷举法
    - 同一法
- 归納法

（1）**归納法**：

这是一種分別論証一个問題的結論，在多種情况下都成立，最后归納出問題結論，正确的証明方法。

例如：矩形面积定理的証明，底和高的关系有三種情况，即：

（1）用同一长度單位量底和高都得整数。

（2）都得分数，或者其中的一个得分数，一个得整数。

（3）都得无理数，或者其中的一个得无理数。而这三種情况的証法，又不能取得一致，分証結果，三者的結論都是一样；因而最后可以归納出一条全面的結論即矩形面积等于底和高的乘积。需要用归納法的証明题不多，故不贅述。

（2）**演繹法**：

借助于定义，定理等已知命題来論証新的命題的眞实性的証法叫演繹法，这種証法在几何中經常使用。

根据定义、定理等已知命題和新命題的假設直接論証新命題的成立叫直接証法（順証法）。先假定新命題的結論不成立，推証出与新命題的假設或已知命題相矛盾的結論来說明新命題的成立就是用証新命題的逆否命題来代替証新命題，这種証明方法叫間接証法（反証法）。

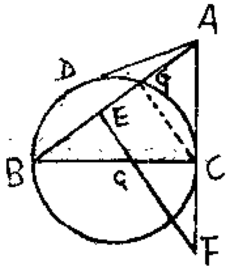
（3）**綜合法和解析法**：

从已知条件入手，根据定义、公理、定理或推論逐步推到終結的証明方法叫綜合法。

先从終結着想，推測它可以成立的条件，再就这些条件分別研究，看它們的成立又需要具备什么条件，这样逐步逆推，直到所需的条件同已知条件符合而止，这種

方法叫解析法。

解析法是从結果回溯原因，叙述比較繁冗，但較易发現有关的事理，便于思考。綜合法是从原因去推結果，叙述非常簡明，但在繁多的事理中欲选得适当而必要的証明方法每不易成功。所以通常在着手証題时，都是先用解析法去探索証明的方法，然后再用綜合法把証明写出来。在研究某一問題的証法时不必單独使用綜合法或單独使用解析法。这两種方法可配合使用如下列。



例：設△ABC为銳角三角形，以BC边为直徑作圓，并从A作此圓的切綫AD，与圓切于D，又在AB边上取AE等于AD，并过E作AB的垂綫，与AC的延长綫交于F，

求証$\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$（1957年統一考試題）

分析：

（1）解析法：要想証“$\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$”必須証“$\triangle AEC\sim\triangle ABF$”或者“$EC\parallel BF$”，或者……，无法进行，轉用綜合法；

（2）綜合法：根据已知条件，可以知道AD是切綫，AB是割綫，

故　$AD^2=AG\cdot AB$，即 $AE^2=AG\cdot AB$，

又即$\frac{AG}{AE}=\frac{AE}{AB}$，那么，$\frac{AG}{AE}$是否和$\frac{AC}{AF}$相等呢？于是又轉用解析法：

（3）解析法：要想証“$\frac{AG}{AE}=\frac{AC}{AF}$”，必須証“△AGC

$\sim\triangle AEF$”或者“$CG\parallel FE$”或者……；

（4）細察CG和FE都和AB垂直，那么$CG\parallel FE$，因而

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}.$$

証明：設AB和圓的另一交点是G，連結CG，則$CG\parallel FE$，

$$\frac{AG}{AE}=\frac{AC}{AF},$$

又 $AD^2=AG\cdot AB$. 而$AE=AD$，

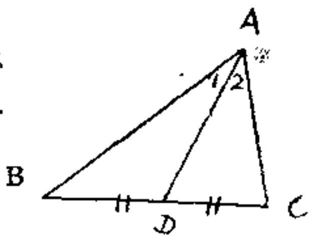
故 $AE^2=AG\cdot AB$，$\frac{AG}{AE}=\frac{AE}{AB}$，

$$\therefore\ \frac{AE}{AB}=\frac{AC}{FA}。$$

（4）归謬法和穷举法：

归謬法是用証明原命題的逆否命題来代替証原命題的証明方法，是間接証法的基本形式。如果原命題的終結的反面不止一種情形，我們用归謬法分别証明，終結反面的各種情况都不成立，来說明原定理的成立，这種証法叫穷举法。

例1．三角形中，对銳角的边必小于这边上的中線的二倍。



已知：$\angle A<d$，$BD=DC$.

求証：$BC<2\cdot AD$.

証明：（穷举法）1）假定$AD=BD=DC$，

則 $\angle A=d$和題設矛盾

故 $AD\neq BD=CD$ 即 $BC\neq 2AD$

2）假定$AD<BD=DC$，則$\angle 1>\angle B$，

$\angle 2>\angle C$，

$\therefore\ \angle 1+\angle 2>\angle B+\angle C$，

即 $\angle A>\angle B+\angle C$，

于是$2\angle A>\angle A+\angle B+\angle C=2d$

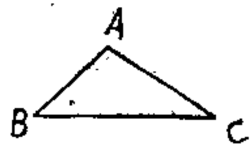
因而$\angle A>d$，与題設矛盾，

故 $AD\not<BD=CD$ 即 $BC\not>2AD$

3）所以$AD>BD=DC$ 即 $BC<2AD$.

●例2．試用穷举法証明如果一个三角形两边平方和等于第三边的平方則第三边的对角为直角。

設 $\triangle ABC, AB^2+AC^2=BC^2$.



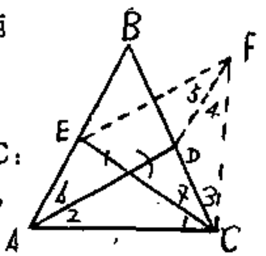
求証：$\angle A=d$.

証明：如果$\angle A>d$，

則 $AB^2+AC^2<BC^2$与題設矛盾，如$\angle A<d$則$AB^2+AC^2>BC^2$，与題設矛盾，故$\angle A=d$。

例3．三角形的二內角之平分綫相等，則此△必等腰。

設$\triangle ABC$，AD, CE为$\angle A, \angle C$两內角的平分綫且$AD=CE$。



求証 $AB=BC$

証明：假設$AB\neq BC$，則$\angle A\neq\angle C$：

若$\angle A>\angle C$，則$\angle 2>\angle 1$，

$\angle 6>\angle 7$

$\therefore$ $CD>AE$，过D, E，分別引AB，AD的平行綫相交于F，联結CF，則$\triangle ADFE$为一个▱。

$\therefore$ $AE=DF$ $\therefore$ $CD>DF$，$\angle 4>\angle 3$。

又 $\angle 5=\angle 6$， ∴ $\angle 5>\angle 7$，

∴ $\angle 5+\angle 4>\angle 3+\angle 7$，

∴ CE>EF，即CE>AD与題設不合，若∠A<∠C

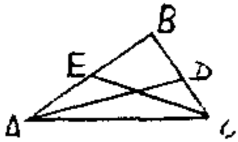
同理可証与題設不合

故 AB=BC。

例4．三角形的两边不等則它們对角的平分綫也不等。

設△ABC，AB≠BC，AD，CE

分別为∠A，∠C的平分綫。



求証 AD≠CE。

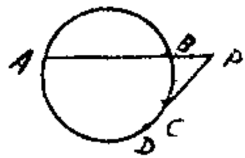
証明 假定AD=CE，

則 AB=BC（上題），与題設不合，

故 AD≠CE。

•例5．从圓外一点引一綫段至圓上，若这綫段的平方等于从这点所引割綫全长与它的圓外部份的乘积，則这綫段是圓的切綫。

如图 $PA\cdot PB=PC^2$，求証，PC为⊙ABC的切綫。



証：假定PC是圓的割綫一定还与圓相交于D。

則 $PA\cdot PB=PC\cdot PD=PC(PC+CD)$

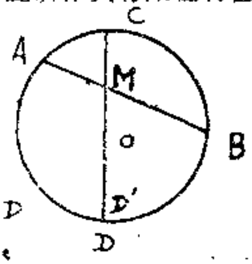
$=PC^2+PC\cdot CD$。

∴ $PA\cdot PB>PC^2$，与題設不合，故PC必为圓的切綫。

（5）**同一法**：

为了証明終結图形具有某種特性，我們可以作一个具有这種特性的图形，再証明所作的同題設的是同一图形，这種証法叫同一法。这也是用証明原命題的逆否命

题来代替証原命題，仅形式改变为証所作具有某種特性的图形与原題終結图形相重合。



四点共圆 例1．两綫段AB和CD相交于M，已知$MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

求証：A,C,B,D 四点在同一个圓上。

証明：过A,B,C三个点作圓O，和CD相交于D′，则$MA \cdot MB = MC \cdot MD'$，

又題設$MA \cdot MB = MC \cdot MD$，

∴ $MD = MD'$，因而D′与D重合。

∴ A，B，C，D四点在同一个圓上。

例2．設⊙O_1，⊙O_2，⊙O_3，两两相交其公弦为AB，CD，EF，

求証 AB，CD，EF三綫共点。

証：設AB，CD，相交于P，連結EP，延长之交⊙O_3于G，交⊙O_1于H，

则 $AP \cdot BP = EP \cdot HP$，$CP \cdot DP = EP \cdot GP$。

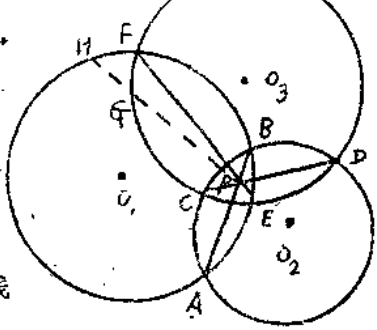
又 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$

∴ $EP \cdot HP = EP \cdot GP$，

∴ $HP = GP$。

∴ G，H两点必相重合，即G，H应重合于⊙O_1，⊙O_3，的交点F。

∴ AB，CD，EF三綫共点。



（三）証明題的具体証法举例

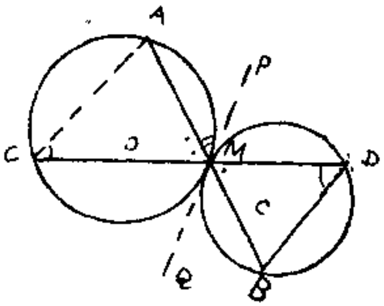
証明題的証明一般都是根据其假設和終結中图形性質的有关定义定理和推論，选取上述各種証題法之一来研究推証，有时还需要添作适当的补助綫或补助圓，兹举出常見的几个类型加以說明，其它类型可仿照类推。

1．証明四条綫段成比例（或者兩条綫段的积等于另兩条綫段的积）的方法：

（1）应用有关比例綫段諸定理、射影定理，及圓幂定理。

例：如果⊙O和⊙O′外切于M，AB和CD都过M并分别交⊙O于A和C，交⊙O′于B和D．

则　MA · MD＝MB · MC．



分析：为了出現MA · MD＝MB·MC

（也可看作$\frac{MA}{MB}=\frac{MC}{MD}$）需要就图观察一下，

究竟符合有关比例綫段的定理中那一个定理的

条件，如果符合某一定理的条件，就可根据它的結論写出比例式，逐次比較結果，唯有和“相似三角形对应边成比例”的条件接近。連結BD和AC可由直观上看，$\triangle ACM$和$\triangle BDM$很象两个相似三角形，因而就着手証明它們相似。很容易看出，$\angle AMC=\angle BMD$，还少一双等角。为了使相切二圓中的角建立关系，常常需要作公切線，用弦切角作媒介作两圓的公切線PMQ后可看出$\angle ACM=\angle AMP=\angle BMQ=\angle BDM$.

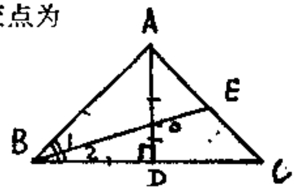
$\therefore\ \triangle ACM\sim\triangle BDM$因而$\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MC}{MD}$.

故 $MA\cdot MD=MB\cdot MC$.

(証明从略)

(2)应用相等的比作媒介.

例：直角三角形ABC中，$\angle A$为直角，从A向对边BC作垂線AD相交于D. 又作$\angle B$的平分線交它的对边AC于E，而AD与BE的交点为O．则$\dfrac{DO}{OA}=\dfrac{AE}{EC}$



分析：将图和有关比例綫段諸定理的条件，逐次比較一下，唯有和三角形內角平分線性质定理最接近。由于$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore\ \dfrac{DO}{OA}=\dfrac{BD}{AB}, \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}$

如能証明$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AB}{BC}$就可得出$\dfrac{DO}{OA}=\dfrac{AE}{EC}$的結論。由射影定理，可直接得出这个結果，因此，得出証明如下，

証：$\because\ \angle 1=\angle 2$. $\therefore\ \dfrac{DO}{OA}=\dfrac{BD}{AB}$. $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AB}{BC}$.

又 $AB^2=BC\cdot BD$.（射影定理）

即 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AB}{BC}$ $\therefore\ \dfrac{DO}{OA}=\dfrac{AE}{EC}$.

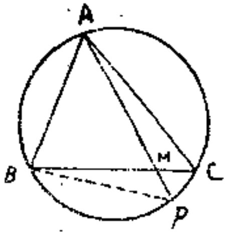
2．証明終結为較复杂的等式的方法：

（1）根据条件，推証出几个簡單的等式，然后相加或相減，得出求証的結果。

例1．設P是等边$\triangle ABC$的外接圓$\overset{\frown}{BC}$上的一点，

求証 $PA^2=AB^2+PB\cdot PC$

（1956年統一考題）



略解：$\triangle ABP\sim\triangle AMB$.

$\therefore$ $PA\cdot MA=AB$……………………（1）

又 $\triangle ACP\sim\triangle BMP$

$\therefore$ $PA\cdot MP=PB^2\cdot PC$ ……………（2）

（1）+（2）即得出所求.

例2．圓内接四边形两組对边的乘积的和等于两对角綫的乘积。

設圓内接四边形ABCD.