

考研数学

全程复习指导

(理工类) 修订版



新起点工作室 编著

一堂课
一章详
临华周
身智慧
铸系统
似智考
在手写
一书解
名师难
一释疑
胸有成



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

考研数学全程复习指导

(理工类) 修订版

、 新起点工作室 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书依据教育部考试中心颁布的全国硕士研究生入学统一考试大纲(数学一、数学二),将《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三门课的内容分成基础篇、提高篇、综合篇、冲刺篇等四个部分编写,全程引导考生由浅入深地进行全面的复习。在基础篇中,指导考生通读教材,并作一些相应的基本练习。在提高篇中,通过典型例题指出考点所在,讲解解题思路 and 技巧,然后给出自测题供读者练习。综合篇则为考生提供一定数量的分科的综合练习题。冲刺篇为考生在考前作模拟测试,并指导考生如何根据模拟测试的情况拾遗补漏,以及如何在心理上应对真正的考试。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学全程复习指导.理工类/新起点工作室编著.一修订本.一北京:电子工业出版社,2007.3

ISBN 978-7-121-03790-0

I. 考... II. 新... III. 数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV.O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 006714 号

责任编辑:周 筠 陈元玉

印 刷: 北京牛山世兴印刷厂

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 35.25 字数: 1 000 千字

印 次: 2007 年 3 月第 1 次印刷

印 数: 6 000 册 定价: 49.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系电话:(010) 68279077;邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

第2版前言

《考研数学全程复习指导》(理工类)一书问世以来,受到广大读者的欢迎和关注。为了更进一步适应读者的需要,编者将对本书进行修订改版。

这次修订的主要部分是第1篇基础篇。修订后的基础篇将增加“内容概要”部分,其中包括主要的概念、定理、结论和公式,并给出相应的例题,这些例题将替代原有的基本练习题。这样,当读者已经复习了一遍教材之后,一般情况下,可以只带本书进行复习。在做题的过程中,遇有不熟悉的内容、公式,可以随时很方便地在基础篇里查到。

在第2篇提高篇中,每节或每段的开头,将简要地给出重点和难点,以及考试中的常见问题,指导读者有目的地复习,以提高复习的效率,巩固复习的效果。

另外,2005年和2006年的某些典型试题将被收录进来。

欢迎广大读者对本书的修订提出意见和建议。

新起点工作室

2006.11.16

第1版前言

●本书简介

考研数学辅导书种类非常之多,各有特色.本书像是给广大考生开设一个辅导复习的课堂,全程引导考生由浅入深地进行全面的复习,最后达到应考的最佳状态.

本书依据教育部考试中心颁布的2007数学一、数学二的考试大纲,把《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三门课的内容分成四个部分编写.第1篇:基础篇.指导考生通读教材,给出各章节的考试内容、考试要求,并提纲挈领地列出内容概要,其中包括主要的概念、定理、结论和公式,以及相应的例题.第2篇:提高篇.分典型例题和自测题两部分,其程度相当于考研真题中具有中等难度的题目.典型例题的写法就像是教师在讲课,分析题型及其变形,指出其考点所在;讲解解题思路、技巧,举一反三.这部分是本书的重点,考生通过这个阶段的复习,将基本上熟悉所有的考试内容,掌握基本的解题方法和技巧.第3篇:综合篇.这部分为考生提供一定数量的分科的综合练习题,其难度和类型与考研真题中的难题水平相当.第4篇:冲刺篇.这部分包含数学一及数学二各4套模拟试题,为考生在考前作模拟测试,并指导考生如何根据模拟测试的情况拾遗补漏,以及如何在心理上应对真正的考试.本书精选历届试题,类型全面,覆盖面广,信息量大.每道题均给出详细解答,学习起来十分方便.

书中引用的考研真题均有标注,例如,(98103)表示该题为1998年数学一的3分题,(04310)表示该题为2004年数学三的10分题,等等.

本书的对象是所有准备报考理工类硕士研究生的人员及大学理工科专业的本科生.

本书由李大华任策划、主编,林益、汤燕斌任副主编,其中“函数、极限、连续和一元函数微分学”部分由李大华编写,“一元函数积分学、无穷级数和常微分方程”部分由汤燕斌编写,“向量代数和空间解析几何”及“多元函数微分学”部分由王德荣编写,“多元函数积分学”部分由林益编写,“线性代数”部分由林升旭编写,“概率论与数理统计”部分由李开丁编写.

●怎样使用本书

1. 准备好复习用的教材

读者手中要有《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三门课程的教材.在这里我们向读者推荐以下几种.

高等数学(上、下册),第5版(或第4版),同济大学应用数学系,北京:高等教育出版社.

工科数学分析(上、下册),第2版,李大华等,武汉:华中科技大学出版社.(普通高等教育“十一五”国家级规划教材)

线性代数,第3版,上海交通大学线性代数编写组,北京:高等教育出版社.

线性代数,第4版,同济大学应用数学系,北京:高等教育出版社.

概率论与数理统计,第3版,盛骤等(浙江大学),北京:高等教育出版社.

2. 关于“基础篇”

建议读者先将三门课的教材通读一遍,特别要认真仔细地复习其中的定义和概念,书上的例子要彻底看懂,最好能自己动手做一下.然后再开始做基础篇的练习题.做题过程中,遇到不会做的题目时,坚持不马上看解答,而是先把教材中的有关部分复习、思考一下,再回头去解题.实在不会解时,才看解答.这时一定要反思:自己不会解的症结是什么.只有这样认真、深入地复习、做题,才能取得良好的效果,为下一步的复习打下坚实的基础.

3. 关于“提高篇”

本篇分为典型例题和自测题两部分,其中包含有相当数量的历届考研真题.

读者在阅读典型例题部分时,好比在听辅导课.这部分解答的写法不拘泥于形式,有分析,有对比,有评注.读者在阅读时可注意下面几个问题:

- ①这道题的考点(或知识点)是什么?
- ②为什么从这里入手解决?如果是我自己解题,会怎样做?差别在哪里?哪种思路更合理?
- ③如果书上给出了该问题的几种变式,那么核心的问题是什么?
- ④如果书上给出了几种解法,则可加以比较,看看哪种解法最适合自己的,最容易举一反三.把经验总结出来.

自测题一定要坚持独立完成,即使做错了也不要紧.一般来说,完全不能动手的情况是很少有的.但思路不够清晰,把握不大的事情时有发生.这时,我们建议读者把做这道题当作是考试,无论如何,总要尽自己所能给出一个解答来,不能交白卷.做完之后,可对照解答,检查自己的问题究竟出在哪里,把道理想透彻,真正弄懂.每做一道题都要有所收获,这样的复习才有效率.有些同学一时不会做,就马上看解答,觉得这样复习会快一些.殊不知当时他可能看懂了,但并未真正成为自己的东西.日后在考试中遇到类似的问题时,总有“似曾相识”的感觉,可就是想不起来该怎样下手.这种以“看解答”为主,忽视自己“做解答”的复习方法是不可取的.

4. 关于“综合篇”

考研数学试题的难度往往体现在内容的综合性上.一道题目有好几个考点,分开看,每个考点都不难,但综合起来就不那么容易了.做好综合题的前提是对各部分的基本概念、基本定理和基本方法都比较熟悉.读者在经过“基础篇”及“提高篇”的扎实训练之后,解答“综合篇”里的习题就有了坚实的基础.做题的要求和前面提到的一样,这里不再赘述.

5. 关于“冲刺篇”

做模拟试题时,各个环节都应模拟.换句话说,一切都应像是真正的考试那样:有一个安静的环境,规定在3个小时内做完,其他要求和正式的考试完全相同.

打开试卷后,首先迅速地浏览一遍试题,看到内容都是自己复习过的(实际上试题内容都是考试大纲范围内的),心里就会踏实下来.一般来说,试题的难度、工作量与试题的分值是成正比的,读者可顺着试卷上的次序解题.

做填空题和选择题时,不要一味图快,切忌凭“一闪念”给答案.该算的地方要仔细算,涉及概念的地方要认真思考,力争一次成功,因为在考试中一般不会有多余的时间让你回头来检查.但是,也不能在每道4分题上花过多的时间.要想在填空题和选择题部分做到“快”、“准”,只有靠平时扎实的复习和反复的训练.

为了达到熟练技巧,读者不妨把每套题都做上两遍甚至三遍.

每做完一套模拟试题,就要检查自己做错或做得不完整的地方,找出薄弱环节,并有针对性地进行拾遗补漏,强化训练.

● 考前的准备工作

(1)在平时复习时就制作好一个“公式一览表”,要求分类清晰,简明易查.平时做题时,遇有不熟悉的地方,可经常查看,久而久之,自然会熟记于心.正式考试的前夕,可以拿出来再浏览一遍,以加强记忆.

(2)考前的心理准备至关重要.自信心和平稳的心态是考试时能正常发挥的保证.

(3)考前的一个星期不要熬夜,保证充足的睡眠,正常作息.身体状况要尽量调整到最佳状态.

● 结束语

我们衷心希望本书能给读者带来信心与希望.本书有不足和错误之处,恳请读者和同行批评指正.

新起点工作室

2006.11.16

于华中科技大学

目 录

第1篇 基础篇

第1章 高等数学	(2)
第1节 函数、极限、连续	(2)
1.1 函数	(2)
1.2 极限	(4)
1.3 连续性与可微性	(8)
第2节 一元函数微分学	(10)
2.1 复合函数微分法及反函数的导数	(11)
2.2 隐函数和参数方程所确定的函数的微分法	(12)
2.3 高阶导数	(13)
2.4 导数的几何意义和物理意义	(15)
2.5 函数性态的研究	(17)
2.6 一元函数的极值	(19)
2.7 微分中值定理与泰勒定理	(21)
2.8 不等式	(24)
第3节 一元函数积分学	(25)
3.1 不定积分	(25)
3.2 定积分	(29)
3.3 反常积分	(32)
3.4 定积分的应用	(34)
第4节 向量代数和空间解析几何	(36)
4.1 向量代数	(37)
4.2 空间中的直线与平面	(38)
4.3 曲面与空间曲线	(40)
第5节 多元函数微分学	(42)
5.1 二元函数的极限与连续	(42)
5.2 偏导数与全微分	(43)
5.3 多元隐函数的微分法	(45)
5.4 高阶偏导数的计算	(47)
5.5 方向导数和梯度	(48)
5.6 多元函数的极值	(49)
5.7 切线切平面问题	(50)

第6节 多元函数积分学	(51)
6.1 二重积分	(52)
6.2 三重积分	(56)
6.3 曲线积分	(60)
6.4 曲面积分	(64)
第7节 无穷级数	(67)
7.1 数项级数	(68)
7.2 幂级数	(70)
7.3 傅里叶级数	(73)
第8节 常微分方程	(76)
8.1 一阶微分方程	(76)
8.2 可降阶的高阶微分方程	(78)
8.3 高阶线性微分方程	(79)
8.4 微分方程的应用	(83)
第2章 线性代数	(84)
第1节 行列式	(84)
1.1 n 阶行列式定义	(84)
1.2 行列式的性质	(84)
1.3 行列式展开定理	(85)
1.4 行列式的一些主要计算方法	(85)
第2节 矩阵	(89)
2.1 矩阵运算律与数的运算律相异处	(89)
2.2 求逆的方法	(89)
2.3 矩阵运算式	(90)
2.4 矩阵可逆的差别法(等价命题)	(90)
2.5 初等变换与初等矩阵的结论	(90)
2.6 矩阵的秩	(90)
第3节 向量	(94)
3.1 向量的线性表示(线性组合)	(94)
3.2 向量组的线性相关性	(94)
3.3 向量组的一个极大线性无关组	(95)
3.4 向量空间	(95)
3.5 一些主要结论	(95)
第4节 线性方程组	(99)
4.1 齐次线性方程组	(99)
4.2 非齐次线性方程组	(99)
4.3 线性方程组解的结构	(99)
第5节 矩阵的特征值和特征向量	(103)

5.1 矩阵的特征值与特征向量	(103)
5.2 两矩阵相似及性质	(104)
5.3 A 相似于对角矩阵的差别及结论	(104)
第6节 二次型	(107)
6.1 二次型 $f = X^T A X$ 化为标准形	(108)
6.2 二次型 $f = X^T A X$ 正定及判别方法	(108)
6.3 向量的内积、长度、正交性	(108)
6.4 矩阵等价、合同、相似、正交相似的主要性质	(109)
第3章 概率论与数理统计	(112)
第1节 随机事件和概率	(112)
1.1 事件的关系与运算	(112)
1.2 事件的概率及其性质	(113)
1.3 条件概率与事件的独立性	(114)
1.4 三大公式	(116)
第2节 随机变量及其分布	(117)
2.1 随机变量的分布函数	(118)
2.2 离散型随机变量	(118)
2.3 连续型随机变量	(118)
2.4 随机变量函数的分布	(119)
第3节 多维随机变量及其分布	(123)
3.1 二维随机变量的分布函数及其性质	(123)
3.2 二维离散型随机变量	(123)
3.3 二维连续型随机变量	(124)
3.4 重要的二维分布	(125)
3.5 两个随机变量的函数的分布	(125)
第4节 随机变量的数字特征	(130)
4.1 一维随机变量的数字特征	(130)
4.2 二维随机变量的数字特征	(133)
4.3 一些常用分布的数学期望和方差	(135)
第5节 大数定律和中心极限定理	(138)
5.1 大数定理	(139)
5.2 中心极限定理	(139)
第6节 数理统计的基本概念	(141)
6.1 基本概念	(141)
6.2 三个抽样分布	(142)
6.3 正态总体的样本均值与样本方差的分布	(142)
第7节 参数估计	(144)
7.1 矩估计与最大似然估计	(144)

7.2 估计量的评选原则	(148)
7.3 区间估计	(150)
第8节 假设检验	(152)
8.1 显著性检验的基本思想	(152)
8.2 假设检验的基本步骤	(152)
8.3 两类错误	(153)
8.4 单个正态总体的均值和方差的假设检验	(153)
8.5 两个正态总体的均值和方差的假设检验	(153)
第2篇 提 高 篇	
第1章 高等数学	(156)
第1节 函数、极限、连续	(156)
1.1 函数	(156)
典型例题	(156)
自测题	(158)
1.2 极限	(160)
典型例题	(160)
自测题	(167)
1.3 连续性与可微性	(172)
典型例题	(172)
自测题	(174)
第2节 一元函数微分学	(177)
2.1 复合函数微分法	(177)
典型例题	(177)
自测题	(179)
2.2 隐函数和参数方程所确定的函数的微分法	(179)
典型例题	(179)
自测题	(181)
2.3 高阶导数	(183)
典型例题	(183)
自测题	(185)
2.4 导数的应用	(186)
典型例题	(186)
自测题	(190)
2.5 零点问题	(193)
典型例题	(193)
自测题	(195)
2.6 中值命题	(196)
典型例题	(196)

自测题	(199)
2.7 泰勒公式	(200)
典型例题	(200)
自测题	(202)
2.8 不等式	(204)
典型例题	(204)
自测题	(206)
第3节 一元函数积分学	(209)
3.1 积分的性质和计算	(209)
典型例题	(209)
自测题	(217)
3.2 反常积分	(220)
典型例题	(220)
自测题	(222)
3.3 积分等式和不等式的证明	(223)
典型例题	(223)
自测题	(228)
3.4 定积分的应用	(231)
典型例题	(231)
自测题	(235)
第4节 向量代数和空间解析几何	(237)
典型例题	(237)
自测题	(240)
第5节 多元函数微分学	(242)
5.1 偏导数与全微分	(242)
典型例题	(242)
自测题	(247)
5.2 多元隐函数微分法	(249)
典型例题	(249)
自测题	(252)
5.3 方向导数与梯度	(255)
典型例题	(255)
自测题	(256)
5.4 偏导数在几何上的应用	(257)
典型例题	(257)
自测题	(258)
5.5 多元函数的极值	(260)
典型例题	(260)

自测题	(264)
第6节 多元函数积分学	(267)
6.1 二重积分	(267)
典型例题	(267)
自测题	(272)
6.2 三重积分	(276)
典型例题	(276)
自测题	(279)
6.3 曲线积分	(280)
典型例题	(280)
自测题	(287)
6.4 曲面积分	(290)
典型例题	(290)
自测题	(293)
第7节 无穷级数	(296)
7.1 数项级数	(296)
典型例题	(296)
自测题	(302)
7.2 幂级数	(305)
典型例题	(305)
自测题	(312)
7.3 傅里叶级数	(314)
典型例题	(314)
自测题	(316)
第8节 常微分方程	(318)
8.1 一阶微分方程	(318)
典型例题	(318)
自测题	(322)
8.2 高阶可降阶微分方程	(323)
典型例题	(323)
自测题	(325)
8.3 高阶线性微分方程	(325)
典型例题	(325)
自测题	(328)
8.4 积分方程	(329)
典型例题	(329)
自测题	(331)
8.5 微分方程的应用	(332)

典型例题	(332)
自测题	(336)
第2章 线性代数	(340)
第1节 方阵的行列式	(340)
典型例题	(340)
自测题	(342)
第2节 矩阵运算及矩阵的秩	(342)
典型例题	(343)
自测题	(347)
第3节 向量组的线性关系	(349)
典型例题	(349)
自测题	(352)
第4节 线性方程组	(354)
典型例题	(354)
自测题	(358)
第5节 矩阵的特征值和特征向量	(360)
典型例题	(360)
自测题	(366)
第6节 二次型	(369)
典型例题	(369)
自测题	(372)
第3章 概率论与数理统计	(375)
第1节 随机事件和概率	(375)
典型例题	(375)
自测题	(383)
第2节 随机变量及其分布	(384)
典型例题	(384)
自测题	(393)
第3节 多维随机变量及其分布	(395)
典型例题	(395)
自测题	(405)
第4节 随机变量的数字特征	(408)
典型例题	(409)
自测题	(430)
第5节 大数定律和中心极限定理	(433)
典型例题	(433)
自测题	(436)
第6节 数理统计的基本概念	(437)

典型例题	(437)
自测题	(441)
第7节 参数估计	(442)
典型例题	(442)
自测题	(446)
第8节 假设检验	(447)
典型例题	(447)
自测题	(448)

第3篇 综 合 篇

第1章 高等数学	(450)
综合练习一	(450)
综合练习二	(455)
综合练习三	(459)
综合练习四	(464)
综合练习五	(467)
综合练习六	(470)
综合练习七	(474)
综合练习八	(478)
第2章 线性代数	(481)
综合练习九	(481)
综合练习十	(484)
第3章 概率论与数理统计	(489)
综合练习十一	(489)

第4篇 冲 刺 篇

数学一模拟试题(1)(附参考解答)	(496)
数学一模拟试题(2)(附参考解答)	(502)
数学一模拟试题(3)(附参考解答)	(510)
数学一模拟试题(4)(附参考解答)	(517)
数学二模拟试题(1)(附参考解答)	(524)
数学二模拟试题(2)(附参考解答)	(530)
数学二模拟试题(3)(附参考解答)	(537)
数学二模拟试题(4)(附参考解答)	(543)

1

第1篇 基础篇

本篇根据教育部考试中心制订的考试大纲(数学一、数学二),在每节的开头给出考试内容和考试要求.接着,为方便读者复习,列出每节的内容概要,其中包括主要的概念、定理、结论和公式,并给出相应的例题.这样,当读者已经复习了一遍教材之后,一般情况下,可以只带本书进行复习.在做题的过程中,遇有不熟悉的内容、公式,可以随时很方便地在这里查到.

我们建议读者在本阶段的复习过程中,将重要的公式摘抄出来,制成一个简明的**公式一览表**.在解题过程中,遇有不熟悉之处,可参看这个公式表,免去翻书查找之烦.反复使用即可达到熟练的程度.自己亲手制作的公式表,查找起来更方便,还可针对个人的具体情况有所侧重,有所简略.在正式考试前夕,还可用来浏览以加强记忆.

本篇复习的重点是基本概念、基本运算和基本定理.若发现自己有概念模糊、理解不透的地方,一定不要放过,要反复看书、思考,直到弄明白为止.俗话说,“磨刀不误砍柴工”.狠抓基本训练,将为全程的复习打下牢固的基础.

第1章

高等数学

第1节 函数、极限、连续

[考试内容]

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数
基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系
无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则
两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

[考试要求]

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

[内容概要]

1.1 函数

1. 定义

设 A, B 为两个非空实数集,若存在一个规则 f ,使得 $\forall x \in A$,都有唯一的一个数 $y \in B$ 与它对应,则称 $f: A \rightarrow B$ 是一个一元函数,简称为函数,常记作 $y = f(x)$, $x \in A$,称其中的 x 为自变量, y 为因变量.数集 $A =$

$D(f)$ 称为函数 f 的定义域,相应的函数值全体 $R(f) \subset B$ 称为函数 f 的值域.对应规则和定义域是函数的两个要素.

2. 复合函数、反函数和隐函数

① 复合函数:设 f 和 g 为两个函数,用 $f \circ g(x) = f[g(x)]$ 定义一个新函数 $f \circ g$,称为 f 和 g 的复合函数,其定义域为 $D(f \circ g) = \{x | x \in D(g), g(x) \in D(f)\}$.

② 反函数:设函数 $f: A \rightarrow B = R(f)$,如果 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 是可逆的或一对一的.对于一个可逆函数 f ,定义一个函数 g 如下:

$$g: R(f) \rightarrow A, \quad g: y \mapsto x, \quad \text{其中 } x \text{ 由 } y = f(x) \text{ 确定.}$$

显然, $\forall y \in R(f)$,如上给出的 $x \in A$ 是唯一确定的,这样定义的函数称为函数 f 的反函数,记为 $g = f^{-1}$.

③ 隐函数:设变量 x 和 y 满足方程 $F(x, y) = 0$,如果当 x 取某区间内的任一确定值时,相应地总有满足这个方程的 y 存在,则称方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间上确定了一个隐函数 $y = y(x)$.

3. 分段函数与积分上限的函数

① 分段函数:若一个函数其自变量和因变量的对应规则需用不同的解析式来表示,则称此函数为分段函数.

② 积分上限的函数:设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积,则 f 在子区间 $[a, x]$ 上的定积分在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$,称为积分上限的函数或变上限定积分所定义的函数.

注 在考研试题中经常出现这两类函数,应给予足够的重视.

4. 函数的四个基本特性

① 有界性:设 $f(x)$ 在区间 I 上定义,若 $\exists$ 常数 $M > 0$,使得 $\forall x \in I$,都有 $|f(x)| \leq M$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.否则,称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.称句话说,如果对任意给定的常数 $G > 0$,都存在一点 $x_0 \in I$,使得 $|f(x_0)| > G$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

② 单调性:设 $f(x)$ 在区间 I 上定义,如果 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 为区间 I 上的严格单调递增(或严格单调递减)函数.如果当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$),则称 $f(x)$ 为区间 I 上的单调递增(或单调递减)函数.

③ 奇偶性:设 $f(x)$ 在区间 I 上定义, I 关于原点对称.如果 $\forall x \in I$ 有 $f(x) = f(-x)$ (或 $f(x) = -f(-x)$),则称 $f(x)$ 是偶函数(或奇函数).

④ 周期性:设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义,若 $\exists$ 常数 $T > 0$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

例1 求函数 $y = \sqrt{2+x-x^2}$ 的定义域和值域.

解 定义域: $-1 \leq x \leq 2$,因为 $y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2}$,故函数的值域为 $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$.

例2 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,求 $f(-x)$, $f(x+1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f(x+1) = \frac{-x}{x+2}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}$.

例3 判定下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数:

$$(1) y = 3x - x^3 \quad (2) f(x) = a^x + a^{-x} \quad (3) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

解 (1) 奇函数. (2) 偶函数. (3) 奇函数.

例4 判定下列函数中哪些是周期函数,并对周期函数求出其周期.

$$(1) y = \sin^2 x \quad (2) y = \sin x^2 \quad (3) y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

解 (1) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ 是周期函数,周期 $T = \pi$. (2) 不是周期函数. (3) 由于 $y\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) =$