北京市中学1964年
数学物理竞赛题解

北京市数学会
北京市物理学会 编

科学普及出版社

內 容 提 要

本书汇集了北京市1964年中学数学竞賽和中学物理竞賽的全部試題，并給出了詳細解答．可供高中学生、中学数学物理教师参考．

北京市中学1964年

数学物理竞賽題解

北京市数学会
北京市物理学会　編

*

科学普及出版社出版

（北京市西直門外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

北京市印刷一厂印刷　新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32　印张：1 5/16　字数：30,000

1965年2月第1版　1965年2月第1次印刷

印数：300,200

总号：118　統一书号：13051·073

定价：（1）0.14 元

北京市中学1964年

数学物理竞赛题解

北京市数学会
北京市物理学会 编

科学普及出版社
一九六五年·北京

目　次

前　言

中国数学会和北京市数学会在 1964 年为高二高三学生联合举办了第五次数学竞賽．竞賽分为两試．第一試考查学生的基本訓练和演算速度，試題相当于中学課本中較难的題目，但形式不完全相同；第二試考查思考能力和灵活运用数学知識的能力，試題的灵活性較大．

北京市物理学会在 1964 年也首次举办了物理竞賽的試点活动，由北京市第 101 中学、北京大学附中、清华大学附中、北京师大一附中、北京师大女附中各推荐一部分高三学生参加．竞賽也分为两試．第一試为笔試，考查学生对基本概念、基本原理的掌握程度及运用它們解决問題的能力；笔試成績优良的学生，再参加第二試的实驗考試．通过实驗（在三个实驗中选作一个）和教师的提問，考查学生对实驗原理、实驗方法及基本实驗技能掌握的情况．

大家对竞賽的关怀，給予我們很大的鼓励和鞭策．我們收到了各地的許多来函，不少同志向我們索取試題和解答．为此，我們編印这本小册子以滿足各方面的需要．这些題目一般較难，仅供高中学生課外活动参考用．我們誠恳地希望大家多提宝貴意見，以改进我們今后的工作．

应該說明的是，本书中的試題的解答基本上都是竞賽中匆

忙編写的，不能說是最好的解答.

最后，我們对青年讀者提出一个建議：請你們先独立地演算試題，先得出自己的解答，然后用本书中的解答来比較. 这样作才是善于利用本书，才能更好地提高自己的解題能力.

北京市数学会
北京市物理学会
1964.8.

数学竞賽题解

北京市中学生数学竞赛曾在1956年和1957年接連举行了两次,停頓四年之后到1962年又恢复举行. 今年的数学竞賽是恢复后的第三次. 历年以来,参加竞赛的学校数目逐漸增加,中学同学对竞赛的热情也不断提高, 这都說明数学竞赛对于中学数学教学起了促进的作用. 今年竞賽的成績很好, 不仅每題都有人作对, 并且发現了一些新穎巧妙的解法, 表明年輕一代具有足够的数学才能和远大的培养前途. 这是十分可喜的事情. 正因为这样,同学們应当更严格地要求自己,克服种种缺点, 使得自己能得到更充分更健全的发展.

在解題的时候, 有三件事情是不可缺少的, 就是想得清楚、說得明白、写得干凈.所謂想得清楚,就是一方面要会分析問題,找到解題的窍門,同时还能正确地运用邏輯推理.光想清楚了还不够,还要能够明明白白的把想到的叙述出来,使人家看了能够理解.在这次閱卷时,发現同学有不少好的想法,可是說不明白,要閱卷人替他設想、解释、推敲,才不致埋沒他的想法.这就是在表达思想方面缺乏基本訓练.最后,除想清楚、說明白之外,还要整齐清洁地写出来,使人一目了然. 有的試卷字迹潦草,甚至一字一句都要猜測許久,这就是在写字方面缺乏基本訓练.

前面說过, 我們年輕一代是有足够的数学才能和远大的培

养前途的，以上这些缺点，只要不断注意，就不难克服．让我們在这里預祝同学們今后取得更大的成績．

高 二 第 一 試

1．求証

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\ \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=2\operatorname{cosec}\theta.$$

【証 1】 $\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\theta\ \cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\theta\ \cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$$

【証 2】 $\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\theta\ \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sec^2\dfrac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}=\frac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$$

2. 化简

$$\log_a\left[\left(\frac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\frac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right],$$

这里 m、n 和 a 都是正数，$a\neq1$.

【解】
$$\log_a\left[\left(\frac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\frac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]$$
$$=\log_a[(m^5n^{-5})^{-3}\div(m^{-3}n^3)^5]$$
$$=\log_a(m^{-15}n^{15}\div m^{-15}n^{15})=\log 1=0.$$

3. 已知 E 为圆内两弦 AB 和 CD 的交点(图1). 直线 $EF\parallel CB$，交 AD 的延长线于 F，FG 切圆于 G. 求証

$$EF=FG.$$

【証】 在 $\triangle DFE$ 与 $\triangle EFA$ 中

$$\angle DFE=\angle EFA,$$
$$\angle FED=\angle C=\angle A,$$

所以

$$\triangle DFE\backsim\triangle EFA.$$

由此

$$\frac{FE}{FA}=\frac{FD}{FE}.$$

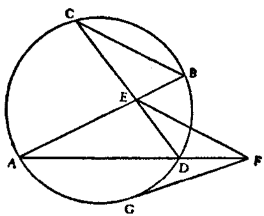

图 1

进而

$$FE^2=FD\cdot FA. \tag{1}$$

因为 FG 为圆的切綫，FDA 为圆的割綫，所以

$$FG^2=FD\cdot FA. \tag{2}$$

比較(1)和(2)，得

$$FE^2=FG^2.$$

因而

$$FE=FG.$$

4. 已知某二次三項式当 $x=\frac{1}{2}$ 时取得极值25；这个二次三項式的两根的立方和等于 19. 求这个二次三項式.

【解 1】 由第一个已知条件得知，这个二次三項式的首項系数不等于 0，而且可以写作

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25 \tag{1}$$

令它等于 0，解得

$$x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{25}{-a}}, \qquad x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{25}{-a}}.$$

于是

$$x_1+x_2=1, \quad x_1x_2=\frac{1}{4}+\frac{25}{a}.$$

所以

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]\\&=1-3\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{a}\right)=\frac{1}{4}-\frac{75}{a}.\end{aligned}$$

由第二个已知条件，得

$$\frac{1}{4}-\frac{75}{a}=19.$$

所以

$$a=-4.$$

代入(1)化簡，得

$$-4x^2+4x+24.$$

因为二次項系数是負的，所以 25 是极大值.

【解 2】 假設二次三項式是 ax^2+bx+c. 因为它有极值，

所以 $a\neq 0$.因为,我們知道,$x=\frac{-b}{2a}$ 时它出現极值,所以

$$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}.$$

即

$$b=-a. \tag{1}$$

旣然 $b=-a$,这二次三項式便可以写作

$$ax^2-ax+c. \tag{2}$$

因为 $x=\frac{1}{2}$ 时,它等于25,所以

$$\frac{a}{4}-\frac{a}{2}+c=25,$$

即

$$-a+4c=100. \tag{3}$$

从(2)来看,假設它的两根是 x_1、x_2,那么

$$x_1+x_2=1, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

由此

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=1-\frac{3c}{a}.$$

由第二个已知条件,得

$$1-\frac{3c}{a}=19.$$

由此解得

$$c=-6a. \tag{4}$$

代入(3),求得

$$a=-4.$$

从(1)和(4)求得

$$b=4,\ c=24.$$

所以，所求的二次三项式是 $-4x^2+4x+24$，而且25是极大値．

高二第二試

1．假設 $\triangle ABC$ 的 $\angle A\geqslant 90°$，靠着 $\triangle ABC$ 的边 BC 作內接正方形 B_1DEC_1（如图2）．在 $\triangle AB_1C_1$ 內靠着 B_1C_1 再作內接正方形 $B_2D_1E_1C_2$．这样继續作任意有限个正方形．証明所有这些正方形的面积的和小于 $\triangle ABC$ 的面积的一半．

【証1】 先証正方形 B_1DEC_1，$B_2D_1E_1C_2$，…的面积各不大于梯形 B_1BCC_1，$B_2B_1C_1C_2$，…的面积的一半．例如，在梯形 B_1BCC_1 中作 $B_1C'\parallel AC$ 交 BC 于 C'（图2），这时

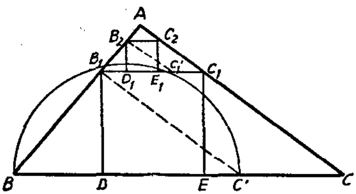

图 2

$$\angle BB_1C'=\angle A\geqslant 90°.$$

若以 BC' 为直径作圓，点 B_1 应在圓周內或在圓周上，所以

$$B_1D\leqslant\frac{1}{2}BC'.$$

用 B_1D 乘这不等式的两端，得

$$B_1DEC_1\text{的面积}\leqslant\triangle B_1BC'\text{的面积},$$

或者說，

$$\square B_1C'CC_1\text{ 的面积}\leqslant\triangle B_1BC'\text{ 的面积}.$$

两端同加 $\square B_1C'CC_1$ 的面积，然后除以2，得

$$\square B_1C'CC_1\text{ 的面积}\leqslant\frac{1}{2}(B_1BCC_1\text{的面积}).$$

所以

$$B_1DEC_1\text{ 的面积}\leqslant\frac{1}{2}(B_1BCC_1\text{的面积})；$$

同理

$$B_2D_1E_1C_2\text{ 的面积}\leqslant\frac{1}{2}(B_2B_1C_1C_2\text{ 的面积}).$$

如果一連作 n 个正方形，便有 n 个这样的不等式，最后一个是

$$B_nD_{n-1}E_{n-1}C_n\text{ 的面积}\leqslant\frac{1}{2}(B_nB_{n-1}C_{n-1}C_n\text{ 的面积}).$$

把这 n 个不等式的左右两端各相加，便得到

$$\begin{aligned}\text{一連 } n \text{ 个正方形面积的和} &\leqslant \text{一連 } n \text{ 个梯形面积的和}\\ &=\frac{1}{2}(B_nBCC_n\text{ 的面积})\\ &<\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{ 的面积}).\end{aligned}$$

【証 2】 首先我們証明

$$\text{正方形 } DEC_1B_1\text{ 的面积}\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形 } BB_1C_1C\text{ 的面积}). \quad (1)$$

为此需要先証明

$$\begin{aligned}&\triangle BB_1D\text{ 的面积}+\triangle CC_1E\text{的面积}\\ &\quad\geqslant\text{正方形 } DEC_1B_1\text{ 的面积}. \quad (2)\end{aligned}$$

作 $AF\perp BC$ 于 F（图 3），則

$$\begin{aligned}&\triangle BB_1D\text{ 的面积}+\triangle CC_1E\text{ 的面积}\\ &=\frac{1}{2}B_1D\cdot BD+\frac{1}{2}C_1E\cdot EC\\ &=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BD}{B_1D}+\frac{EC}{C_1E}\right)\\ &=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BF}{AF}+\frac{FC}{AF}\right)\end{aligned}$$

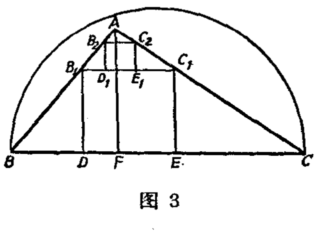

图 3

$$=\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BC}{AF}\right). \qquad (3)$$

由于$\angle A\geqslant 90^\circ$，$A$点应在以$BC$为直径的圆周内或圆周上，因此

$$AF\leqslant\frac{1}{2}BC \text{ 或 } \frac{BC}{AF}\geqslant 2.$$

这就証明了

$$\frac{1}{2}B_1D^2\left(\frac{BC}{AF}\right)\geqslant B_1D^2=\text{正方形 }DEC_1B_1\text{的面积}. \qquad (4)$$

总結(3)和(4)便得到不等式(2)．在这个不等式的两端都加正方形DEC_1B_1的面积再除以2，便得不等式(1)．同理

$$\text{正方形 }D_1E_1C_2B_2\text{的面积}\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形 }B_1B_2C_2C_1\text{ 的面积}).$$

假設我們按題意作了n个正方形，那么

所作n个正方形面积之和

$$\leqslant\frac{1}{2}(\text{梯形 }BB_1C_1C\text{ 的面积}+\text{梯形 }B_1B_2C_2C_1\text{ 的面积}$$

$$+\cdots+\text{梯形 }B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}\text{ 的面积})$$

$$=\frac{1}{2}(\text{梯形 }BB_nC_nC\text{ 的面积})<\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{ 的面积}).$$

【証3】 首先我們来証明正方形DEC_1B_1的面积不大于梯形BB_1C_1C的面积的一半，即

$$B_1C_1^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{BC+B_1C_1}{2}\cdot B_1D.$$

为此，只須証明

$$3B_1C_1\leqslant BC,$$

即

$$\frac{B_1C_1}{BC}\leqslant\frac{1}{3}.$$

作 $AF\perp BC$ 于 F（图3），则

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AF-B_1C_1}{AF},$$

因而

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AF}{AF+BC}.$$

由于$\angle A\geqslant 90^\circ$，$A$ 点应在以 BC 为直径的圆周内或圆周上，因此

$$BC\geqslant 2\,AF.$$

从而

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AF}{AF+BC}\leqslant\frac{AF}{AF+2\,AF}=\frac{1}{3}.$$

这样我們就証明了

正方形 DEC_1B_1 的面积$\leqslant\frac{1}{2}$(梯形 BB_1C_1C 的面积)；

同理

正方形 $D_1E_1C_2B_2$ 的面积$\leqslant\frac{1}{2}$(梯形 $B_1B_2C_2C_1$ 的面积).

假設我們按照題意作了 n 个正方形，那么

所作 n 个正方形面积之和

$\leqslant\frac{1}{2}$(梯形 BB_1C_1C 的面积＋梯形 $B_1B_2C_2C_1$ 的面积

＋…＋梯形 $B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}$ 的面积)

$=\frac{1}{2}$(梯形 BB_nC_nC 的面积)$<\frac{1}{2}$($\triangle ABC$的面积).

【証 4】 假定按題意作了 n 个正方形，設它們的边长依次为 $a_1,\cdots,a_n$，又設 $BC=a$. 作 $AF\perp BC$ 于 F（图3）. 設 $AF=h$，由于 $BC\parallel B_1C_1\parallel B_2C_2$，可知

$$\frac{a_1}{a}=\frac{h-a_1}{h}=\frac{h}{a+h},$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{h-a_1-a_2}{h-a_1}=\frac{h-a_1}{h},$$

因此

$$\frac{a_1}{a}=\frac{a_2}{a_1}.$$

依此类推，可知

$$\frac{a_1}{a}=\frac{a_2}{a_1}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=k,\quad k=\frac{h}{a+h}.$$

于是

$$\begin{aligned}a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2&=a^2k^2+a^2k^4+\cdots+a^2k^{2n}\\&=\frac{a^2k^2-a^2k^{2n+2}}{1-k^2}<\frac{a^2k^2}{1-k^2}\\&=\frac{a^2h^2}{(a+h)^2-h^2}=\frac{ah^2}{a+2h}.\end{aligned}$$

由于$\angle A\geqslant 90^\circ$，$A$ 点应在以 BC 为直径的圆周内或圆周上，因而$2h\leqslant a$；所以,所作n个正方形面积之和

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2<\frac{ah^2}{a+2h}\leqslant\frac{ah^2}{2h+2h}$$

$$=\frac{1}{4}ah=\frac{1}{2}(\triangle ABC\text{ 的面积}).$$

2. 四边形 $PQRS$ 的四边 PQ, QR, RS, SP 上各有一点为 A,B,C,D. 已知 $ABCD$ 是平行四边形，而且它的对角綫和 $PQRS$ 的对角綫(共四綫)都交于一点O,証明 $PQRS$ 也是平行四边形.

【証】用反証法. 假若 $PQRS$ 不是平行四边形，它的对角綫便不能互相平分，即 OP, OR 与 OQ, OS 两对綫段之中至少有一对不相等. 因为P、R 两点，Q、S 两点，P、R 与 Q、S两对点对

于 O 的关系都是对等的，那么不妨假設 $OP<OR$, $OQ\leqslant OS$. 在綫段 OR、OS 上分别取 $OR'=OP$, $OS'=OQ$(图 4).这时 $R'S'$ 与 OC 的交点 C' 将要落在 $\triangle ORS$ 的內部，所以 $OC'<OC$. 不难証明 $OC'=OA$, 因此

$$OA<OC. \qquad (1)$$

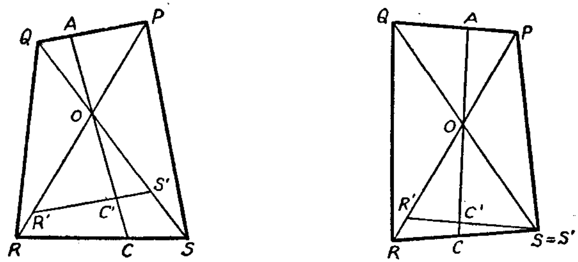

图 4

然而 $ABCD$ 是平行四边形，对角綫应当互相平分，所以

$$OA=OC. \qquad (2)$$

(1),(2)两关系矛盾，説明 PR, QS 不能不互相平分，因而 $PQRS$ 是平行四边形.

3. 試証：对于任意給定的正整数 n, 必有唯一的一对整数 k 和 l, $0\leqslant l<k$, 使得

$$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l.$$

【証】当 $k=2,3,4,\cdots$ 时，$\frac{1}{2}k(k-1)$ 都是正整数，而且組成一个无界递增数列. 对于任意正整数 n, 这数列中只有有限个数不大于 n. 把这有限个（不大于 n 的）数中之最大者記作 $\frac{1}{2}k(k-1)$, 那么