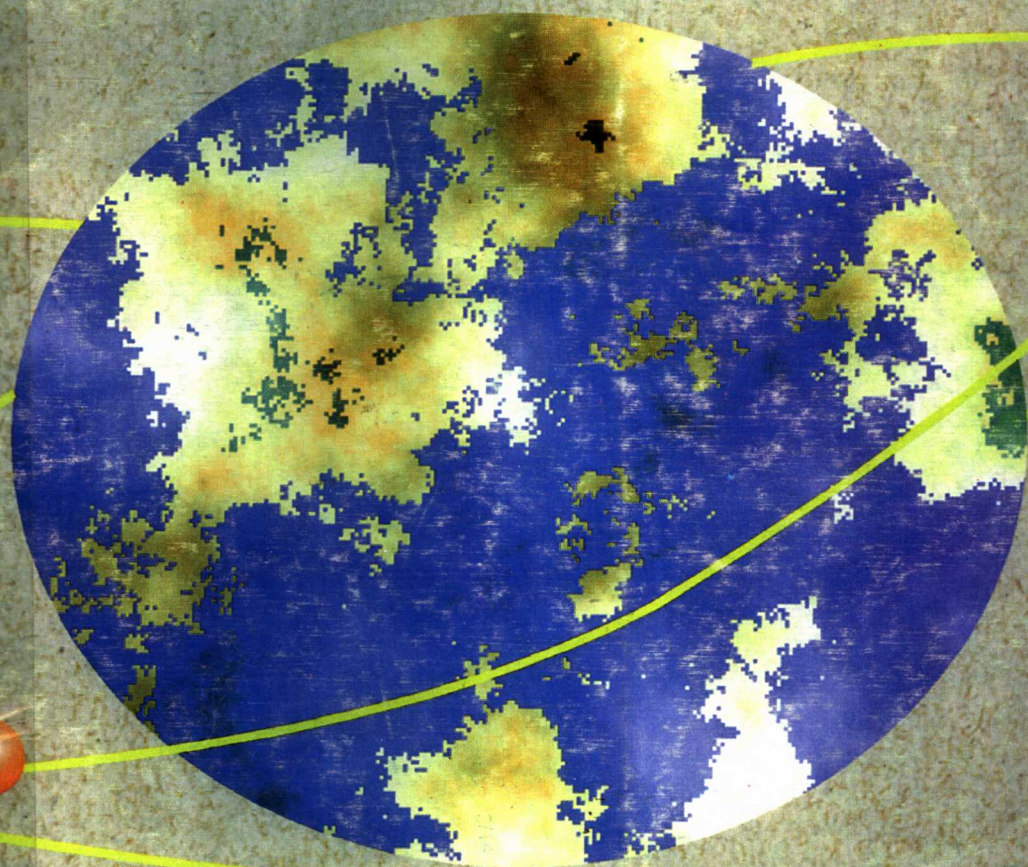


测绘科技丛书

# 空间大地测量 理论基础

李征航 徐德宝 编著  
董挹英 刘彩璋



武汉测绘科技大学出版社

测绘科技丛书

# 空间大地测量理论基础

李征航 徐德宝 董挹英 刘彩璋 编著

武汉测绘科技大学出版社

## (鄂)新登字 14 号

### 内 容 提 要

该书主要介绍了空间大地测量技术的基础知识。包括二体问题,卫星摄动理论,时间,岁差与章动理论,极移原理及参考坐标系概念,大气折射原理和地球自转基础理论。该书为普通高等院校教材,也可供从事地球科学,空间大地测量,测量工程等方面科研、生产、教学人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

空间大地测量理论基础/李征航,徐德宝,董挹英,刘彩璋编著. —武汉:  
武汉测绘科技大学出版社,1998.8(2000.9重印)

(测绘科技丛书)

ISBN 7-81030-617-0

I. 空… II. ①徐… ②董… III. 空间测量-大地测量 IV. P228

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12140 号

责任编辑 何正国 装帧设计 曾 兵

武汉测绘科技大学出版社出版发行

(武汉市珞喻路 129 号,邮编 430079)

核工业中南三〇九印刷厂印刷

\*

开本:787×1092 1/16 印张:13.625 字数:340 千字

1998 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 2 次印刷

印数:1001—2000 册 定价:18.00 元

## 前 言

现代科学技术,特别是空间技术、计算机技术和电子技术的迅速发展和取得的巨大成就,导致大地测量学经历一次跨时代的革命性转变,突破了传统的经典大地测量学的时空局限,迈向了以空间大地测量为主的现代大地测量学发展的新阶段。它一方面将为人类的经济活动、军事活动、环境监测以及灾害预测等提供高精度、高分辨率、实时、动态、定量的各种空间信息,另一方面也将成为推动地球科学发展的前沿学科之一。

空间大地测量技术主要包括:全球定位系统(GPS),卫星激光测距(SLR),卫星测高,射电源甚长基线干涉测量(VLBI),双向无线电卫星定位以及卫星重力梯度测量等。它们所涉及的基础理论包含着经典大地测量学、天文学、地球物理学、地质学、海洋学等基础知识。目前,空间大地测量技术,特别是GPS技术已在我国航空、航天、航海、测地、能源、交通、军事等领域获得广泛应用,而有关高等院校也相继开设了空间大地测量的相关课程。为适应这一发展趋势,我们深感编写一本有关空间大地测量所涉及的基础理论知识的教材是十分必要的。

本教材以空间大地测量所必需的基础知识为基本内容,主要包括:轨道理论,时间,岁差与章动,极移,参考坐标系,大气折射和地球自转基础理论等。可供大地测量专业本科生使用,也可作为其它专业和工程技术人员学习空间大地测量技术的参考教材。

教材第一、二、三章和第八章由李征航编写,第四、九章由徐德宝编写,第五、六章由董挹英编写,第七章由刘彩璋编写。

由于水平所限,缺点和不足之处敬请批评指正。

编 者

1997年12月

# 目 录

<b>第一章 绪论</b>	
<b>第二章 二体问题</b>	
§ 2.1 引言 .....	(6)
§ 2.2 开普勒行星运动三定律 .....	(8)
§ 2.3 二体问题基本运动方程 .....	(8)
§ 2.4 基本运动方程的解 .....	(11)
§ 2.5 卫星运动的角速度、面积速度及周期 .....	(15)
§ 2.6 卫星运动的线速度及引力常数 .....	(17)
§ 2.7 真近点角平近点角偏近点角及其转换关系式 .....	(20)
§ 2.8 轨道根数 .....	(24)
§ 2.9 根据轨道根数来计算卫星位置 .....	(26)
§ 2.10 计算轨道根数的方法 .....	(31)
<b>第三章 人卫摄动理论简介</b>	
§ 3.1 n 体问题的运动方程 .....	(40)
§ 3.2 摄动运动方程 .....	(41)
§ 3.3 拉格朗日行星运动方程 .....	(43)
§ 3.4 其它形式的摄动运动方程 .....	(50)
§ 3.5 小偏心率卫星的摄动方程 .....	(54)
§ 3.6 人卫轨道摄动因素简介 .....	(56)
§ 3.7 摄动运动方程的分析解法 .....	(72)
§ 3.8 摄动运动方程的数值解法 .....	(77)
<b>第四章 时间</b>	
§ 4.1 概论 .....	(80)
§ 4.2 时间基准与时间系统 .....	(81)
§ 4.3 原子频标和高精度时间测量 .....	(91)
§ 4.4 时间比对 .....	(101)
<b>第五章 岁差与章动</b>	
§ 5.1 岁差与章动的发现 .....	(112)
§ 5.2 日-月岁差 .....	(113)
§ 5.3 行星岁差 .....	(115)
§ 5.4 总岁差 .....	(116)
§ 5.5 岁差对天体赤道坐标的影响 .....	(117)
§ 5.6 章动的基本概念 .....	(121)
§ 5.7 黄经章动和交角章动 .....	(122)
§ 5.8 章动对天体赤道坐标的影响 .....	(123)
<b>第六章 极移</b>	

§ 6.1	极移的基本概念 .....	(131)
§ 6.2	极移和地理坐标的变化 .....	(134)
§ 6.3	地极坐标及其推算 .....	(136)
§ 6.4	极移的成分 .....	(139)
§ 6.5	测定极移的技术 .....	(140)
§ 6.6	国际极移服务 .....	(143)
<b>第七章 天球坐标系、地球坐标系和轨道坐标系</b>		
§ 7.1	天球坐标系 .....	(145)
§ 7.2	地球坐标系 .....	(154)
§ 7.3	轨道坐标系 .....	(177)
<b>第八章 大气延迟</b>		
§ 8.1	电离层延迟 .....	(179)
§ 8.2	对流层延迟 .....	(186)
<b>第九章 地球自转基础理论</b>		
§ 9.1	地球转动的三轴 .....	(196)
§ 9.2	刚体地球自转运动 .....	(197)
§ 9.3	弹性地球与洛夫数 .....	(201)
§ 9.4	非刚体地球自转与刘维方程 .....	(205)

# 第一章 绪论

20世纪中叶,随着生产力和科学技术的迅速发展,不少部门和相关学科对大地测量提出了新的要求。例如空间技术和远程武器的发射要求大地测量为其提供准确的全球坐标系中的地心坐标以及地球的外部重力场;大规模的海洋开发需要大地测量为其提供整个海洋地区的精确的大地水准面和海面地形;灾害预报和监测(如地震监测和预报,海平面上升的监测预报等)以及各种地学研究则需要能直接进行长距离的(数百千米至数千千米)、高精度的( $10^{-8}\sim 10^{-9}$ 级的相对定位精度)、快速的(数小时至数天)测量技术;而大地测量部门本身也迫切需要快速、方便、高精度、低成本、高度自动化的新的大地定位技术,以促进整个行业的技术进步。上述种种需求都成为空间大地测量产生和发展的强大推动力。

另一方面,空间技术、计算机技术及电子技术等现代科学技术的发展又为空间大地测量的产生和发展创造了条件,使这一新兴技术得以应运而生。

利用自然天体或人造天体来精确确定点的位置,测定地球的形状、大小和外部重力场及其随时间的变化状况的理论、方法和技术称为空间大地测量。在这里自然天体和人造天体既可作为观测目标(如甚长基线干涉测量中的河外类星体以及卫星激光测距中的激光卫星等),也可作为观测平台在上面设置仪器进行对地观测(如卫星测高及卫星梯度测量中的专用卫星)。空间大地测量主要包括甚长基线干涉测量、激光测月和卫星大地测量等技术。下面作一简要介绍。

## (一)甚长基线干涉测量

两台使用独立的本振信号的射电望远镜 A 和 B 同时对某一射电源进行观测,利用射电干涉测量原理测定射电信号到达 A, B 两站的时间延迟  $\tau$  以及延迟率  $d\tau/dt$ , 从而精确测定基线向量  $\vec{AB}$  以及从射电望远镜至射电源的方向的理论、方法和技术称为甚长基线干涉测量。天文学家们则利用这一方法以毫角秒的尺度来研究射电源内部的精细结构。

在甚长基线干涉测量中通常选择位于银河系以外的类星体来作为观测对象。在宇宙中普通的星系也能发生射电信号,但这些无线电信号的功率仅为可见光输出功率的百万分之一左右。类星体是 20 世纪 60 年代发现的一种新型天体,目前认为它是属于星系一级的天体。其直径只有 1 光年左右,约为普通星系直径的十万分之一至百万分之一,然而它所发出的射电信号的功率却要比正常星系强百万倍。由于类星体距离地球在几十亿光年以上,从地球至类星体的方向可以视为是固定不变的,所以利用类星体作为信号源来进行甚长基线干涉测量可以建立稳定的惯性坐标系。类星体不但具有很强的射电信号,而且在照相底片上具有类似于恒星的点状成像,其角直径小于  $1''$ 。利用它们可以很方便地把光学观测的成果和射电干涉测量的成果相互联系起来。

目前,甚长基线干涉测量仍然是测定长基线监测全球板块运动最精密可靠的技术,也是测定极移和地球自转不均匀以高准确度提供连结天球参考框架的主要手段之一。目前将甚

长基线干涉测量用于大地测量领域的全球性计划主要有：美国航空航天局(NASA)的地壳动力学计划(Crustal Dynamics Project),全球有23个固定台站和2个流动站参加了该项工作；以及国际地球自转服务(IERS),其观测资料主要来自国际射电干涉测量网(IRIS)。测定长基线的相对精度为 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ ,测定极移的精度为 $0.001''$ ,测定地球自转速度变化的精度为 $0.05\text{ms}$ 。预计在今后一段时间内甚长基线干涉测量技术将继续成为监测板块运动、建立和维持全球参考框架的主要手段。但在基本技术性能方面则不大可能出现新的重大突破。我国已在上海天文台建立了甚长基线干涉测量站,乌鲁木齐站和昆明站正在组建过程中。

## (二)卫星大地测量

利用人造地球卫星来精确确定点的位置；测定地球的形状、大小及外部重力场；以及它们的变化状况的理论、方法和技术称为卫星大地测量。卫星大地测量在空间大地测量中占有极其重要的作用。它主要包括：卫星摄影测量,卫星激光测距,卫星导航定位,卫星测高,卫星跟踪卫星,卫星梯度测量等技术。

### 1. 卫星摄影观测

在晴朗的夜晚以恒星为背景用人卫摄影仪对卫星进行摄影观测,根据已知的恒星坐标 $\alpha, \delta$ 以及相片上恒星与卫星间的相对位置来确定从人卫摄影仪至该卫星的方向的方法和技术称为卫星摄影观测。在良好的条件下,用这种方法所测定的方向精度可达 $0.3''$ 。两站对多个卫星进行同步摄影观测后就可求出连结两站的弦线的方向。60年代不少国家曾用此方法进行过洲际大地联测并建立了一些全球性的或区域性的卫星大地网。从多个卫星跟踪站上对卫星进行摄影观测后还可确定卫星轨道,并从轨道摄动中反求出地球重力场中的长波项。由于这种方法的精度较低,观测受气候条件限制,资料处理又相当繁杂,故目前在大地定位及测定重力场等领域已很少使用。

### 2. 卫星激光测距

用安置在地面测站上的激光测距仪向专用的激光卫星发射激光脉冲信号,该信号经安置在卫星表面的反射棱镜反射后返回测站,精确测定信号往返传播的时间并进而求出从仪器至卫星的距离的方法和技术称为卫星激光测距。测距精度已达 $1\text{cm}$ 左右。卫星激光测距是目前精度最高的绝对(地心)定位技术,在定义全球地心参考系中起决定作用;也可精确测定极移和地球自转不均匀;又是用卫星重力技术确定地球重力场中的低价系数( $n < 50$ )的主要手段;是建立地球参考系(CTS)并转换天球参考系(CIS)以及研究地球动力学的基本手段。预计今后 $10 \sim 15$ 年内还会有突破性进展:由于硬件技术的发展精度将提高到 $1\text{mm}$ 级水平;在卫星上安装激光测距仪,地面上只需要装廉价的反射棱镜以组成“空基系统”;实现卫星激光测高系统,进行激光全球(包括海洋和陆地)测高,以低廉的代价获得全球高精度高分辨率的DTM。

### 3. 卫星导航定位系统

用户用接收机测定至导航卫星的距离或距离变率并依据观测瞬间卫星在空间的位置采用距离交会法或距离差交会法来确定自己的位置及运动速度等要素的无线电导航定位系统称为卫星导航定位系统。其中卫星在空间的位置是由地面跟踪网通过跟踪观测来确定(并外推)的,并通过导航卫星或其它渠道播发给用户。已建成或正在组建的卫星导航定位系统有美国的子午卫星系统(Transit)和全球定位系统(GPS),前苏联的CICADA和GLONASS,



欧洲空间局的 NAVSAT 及法国的 DORIS 等。其中全球定位系统的应用最为广泛,影响也最大。其长边相对定位精度已接近甚长基线干涉测量的水平,小于 100km 的距离内的定位精度可达厘米级。IGS 的观测结果表明由两天的全球跟踪观测资料所求得的 GPS 卫星星历的精度可优于 1dm,所求得的站坐标的精度可优于 1~2cm。估计今后由全球 GPS 跟踪观测所建立的参考框架的精度可达  $10^{-9}$ 。

由于 GPS 定位技术能为静态或动态用户提供快速、廉价、高精度、连续的服务,因而有着广泛的应用潜力:(1)建立各种等级的平面大地控制网并广泛用于工程测量及海洋大地测量。(2)监测各种尺度的地壳运动,测定极移和地球自转不均匀,用大量 GPS 卫星的轨道摄动来改善由少数激光测卫站所求得的地球重力场的低价模型,用 GPS 来精化局部地区的大地水准面等。(3)用于国土规划、工程建设、资源勘探、环境监测、防灾救灾、交通运输及国防建设等。

#### 4. 卫星测高

利用安置在卫星上的雷达测高仪测定卫星至海平面的垂直距离,并用激光测卫、多普勒测量和 GPS 测量等方法精确确定该卫星的运行轨道以测定海面形状的方法和技术称为卫星测高。目前的测高精度约为 5cm。利用卫星测高技术可测定海洋大地水准面,进而用斯托克司反解公式反推出海洋部分的重力异常,以弥补海洋地区重力测量资料的空白。因而这种技术对于建立高精度的高分辨率的地球重力场模型具有重要作用。美国大地测量委员会指出:海洋测高卫星 Seasat 在三个月内所做的工作如果要用海洋重力测量来完成的话,需花费 200 年时间和 20 亿美元的费用[Committee on Geodesy, 1986]。此外卫星测高资料也可用于海洋学研究,如测定洋流的宽度、边界及运动速度、测定潮汐起伏及海面地形等。用于进行卫星测高的卫星有 SKYLAB, GEOS-3, SEASAT, GEOSAT, NROSS, ERS-1, 以及 TOPEX/POSEIDON 等。

#### 5. 卫星跟踪卫星

从某一卫星上用激光测距, GPS 测量或多普勒测量等方法连续测定至另一卫星的距离或距离变率的方法和技术称为卫星跟踪卫星。通常可采用两种方式:用高轨道卫星跟踪低轨道卫星以及用低轨道卫星跟踪低轨道卫星。我们知道根据卫星的轨道摄动来测定地球重力场时,卫星的轨道越低所测定的重力场的分辨率就越高。但对低轨卫星的连续跟踪极为困难,需在全球均匀布设大量的卫星跟踪站才能实现。然而由于地形条件,经费及政治因素的限制通常难以做到这一点。通过高轨卫星来跟踪低轨卫星就能较好地解决这一问题。因为从地面跟踪站跟踪高轨卫星以及从高轨卫星跟踪低轨卫星都较容易实现。两个低轨卫星在轨道上运行时由于所受到的地球重力加速度不同,因此其运动速度也不相同。根据这两个卫星间的距离和距离变率观测值中可求出地球重力场。采用这种方法时不但可求出海洋上空的重力场,也可求出陆地上面的重力场。

#### 6. 卫星梯度测量

利用安置在低轨卫星上的重力梯度计测定地球引力位在三个坐标轴上的二阶偏导数,进而测定全球重力场的方法和技术称为卫星梯度测量。美国计划在 90 年代末将灵敏度为  $10^{-4} E/\sqrt{\text{Hz}}$  的超导重力梯度仪安置在高度为 160~200km 沿圆形极轨道飞行的卫星上以获得分辨率为 50km,精度为 2~3mgal 的全球重力场。与卫星跟踪卫星技术相比,本方法只需用一个卫星而且具有更高的精度潜力(美国航空航天局的最终目标是获得分辨率为

25km、精度为 1mgal 的全球重力场),是一种很有前途的方法。

### (三)激光测月

用大功率激光测距仪向安置在月球表面上的反射棱镜发射激光脉冲信号,测定信号往返传播的时间以确定从测距仪至反射镜之间的距离的方法和技术称为激光测月。显然这种技术与激光测卫十分相似,只不过现在的反射镜是设置在月球表面而不是人造地球卫星上,故不应归入卫星大地测量的范畴。自 1968 年人类首次登月以来,美国已在月球表面的不同地方设置了三块反射棱镜:阿波罗 11 号,阿波罗 14 号和阿波罗 15 号。前苏联也用无人驾驶飞船在月球表面安置了  $L_1$  和  $L_2$  两块反射棱镜。这些反射棱镜在月球表面构成一个大控制网,平均边长约为 800km 左右。1969 年麦克唐纳天文台和其它一些天文台开始进行激光测月工作,目前的测距精度为 5cm 左右。激光测月的主要用途为测定极移与地球自转不均匀,确定激光测月站的站坐标以及站间矢量。同时还能测定反射镜的月面坐标,为月球测量提供控制点,测定月球的潮汐位系数;研究月球的自由天平动等。然而由于技术难度大,费用昂贵等原因,全世界仅有少数几个台站在开展这项工作。

### (四)学习空间大地测量应具备的基础知识

#### 1. 人卫轨道理论

如前所述,卫星大地测量在空间大地测量中占有极其重要地位。而提到卫星就离不开它的运行轨道。人卫轨道理论是研究人造地球卫星运动规律的一门学科,是卫星大地测量的重要理论基础。例如在确定卫星轨道时,由于地理因素,政治因素及经费设备等方面的原因,所布设的地面跟踪站一般难以观测到整个轨道弧段,如何依据这些间段的观测值把整个卫星轨道计算出来就离不开人卫轨道理论。在卫星导航定位系统中实时定位用户需要立即知道观测瞬间卫星在空间的位置,而地面跟踪网的观测,数据传输,轨道计算及将结果注入卫星都需要时间,也就是说必然会有一段时间滞后,所以必须进行轨道预报。即根据某段时间的卫星跟踪观测资料计算出该段时间内的卫星实际轨道,然后根据卫星的受力情况预先估计出下一个时段(例如预估 16 小时或 24 小时)卫星的运动轨道并注入卫星供用户使用。这种预报或者说外推工作同样离不开人卫轨道理论。又例如根据卫星轨道摄动来确定地球重力场时我们首先需精确测定在某段时间内卫星轨道的变化量。这些变化是地球重力场和其它摄动因素(如大气阻力,光压力,潮汐等)共同作用的结果。然后需精确计算出其它摄动因素会使轨道产生什么样的变化,并将其从总的轨道变化中扣除掉,留下的部分就是由地球重力场而引起的。最后再从这些轨道变化中反求出地球重力场模型。显然为了完成上述工作也必须掌握人卫轨道理论。此外在进行卫星定位时也经常会涉及一些有关人卫轨道的知识,例如采用轨道松弛法进行定位,根据卫星广播星历中给出的参数计算卫星的瞬时位置等。本书在第二、三两章中对人卫轨道理论作了简要的介绍。

#### 2. 有关岁差、章动、极移及地球自转的知识

由于太阳,月球和其它天体对地球赤道隆起部分的引力作用,使地球自转轴在空间缓慢地旋转,产生岁差和章动。从而使天球赤道坐标系中的基圈天球赤道和主点春分点随时间而变化。因此在天球赤道坐标系中处理不同时间的资料时就必须正确地顾及岁差和章动的影响。空间大地测量的最终目的是求得点在某一协议地球坐标系中的位置,而将天球赤道坐标

系中的位置化算至协议地球坐标系中的位置时必须顾及地球自转以及极移的影响。可以这么说,空间大地测量中经常采用的各种坐标实际上是通过岁差、章动、极移和地球自转而相互联系起来的。因此掌握岁差、章动、极移和地球自转的知识就成为正确进行各种坐标系转换的基础。本书在第五章、第六章和第九章中分别对上述内容作了介绍。

### 3. 时间系统和坐标系

在空间大地测量中经常要涉及各种时间坐标(如世界时,原子时,协调世界时,动力学时及GPS时等)和各种坐标系(如天球坐标系,地球坐标系及轨道坐标系等)。本书在第四、七两章中分别作了系统的介绍。

### 4. 大气延迟

在空间大地测量中各种信号都要穿过大气层后才能到达地面测站。信号在大气层中传播时的延迟误差已成为限制空间大地测量的精度进一步提高的主要原因。本书在第八章中对产生大气延迟的原因,改正方法及模型,影响改正精度的因素以及应采取的措施等问题作了介绍。

## 第二章 二体问题

### § 2.1 引言

#### 2.1.1 人卫轨道理论

人卫轨道理论是研究人造卫星运动规律的一门学科,是卫星大地测量的重要理论基础。人造卫星入轨进入自动飞行阶段后,也和自然天体一样在万有引力(及其它力)的作用下遵循牛顿运动定律在轨道上运动。因而同样可以用研究天体运动的一般理论——天体力学来研究其运动规律。但是和自然天体相比,人造卫星的运动又有其特殊性,主要表现为:

1. 人造卫星离地球较近,因而不能像研究行星运动时那样把地球当作一个质点,而必须考虑复杂的地球引力(通常用高阶次的球谐函数来表示)对卫星运动的影响。

2. 人造卫星所受到的作用力远较自然天体复杂。除了受到其它天体的万有引力外还会受到大气阻力,太阳光压力等多种力的作用。这些力中不但有保守力还有耗散力。

3. 人造卫星的运动周期较一般自然天体的运动周期要短得多,因而天体力学中的一些公式,由于公式的收敛性及精度等原因,在研究人造卫星的运动时就不再适用了。

4. 自然天体只存在定轨问题,而人造卫星则还存在着轨道设计,卫星回收等问题。

由于上述原因,随着空间技术的发展便逐步形成了一门既与天体力学有密切联系又有许多区别的新兴学科——人卫轨道理论。

#### 2.1.2 人卫轨道及轨道理论的分类

对于在我们所研究的系统中的每一个作用力  $\vec{F}_i$  都可以根据牛顿第二运动定律列出一个二阶微分方程:

$$\vec{F}_i = m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, n_1) \\ (j = 1, 2, \dots, n_2) \end{array}$$

式中  $n_1$  为整个系统中作用力的个数,  $n_2$  为系统中的天体个数。但遗憾的是到目前为止除了最简单的二体问题以外其它微分方程组皆无法从数学上严格求解。因而我们也不得不沿用天体力学中所惯用的方法将人造卫星的轨道运动人为地分成两个部分分别进行处理。在介绍人卫轨道的分类和人卫轨道理论的分类方法之前让我们首先来看一下作用在卫星上的外力。

##### (一)作用在卫星上的外力

从表 2-1 可以看出,作用在卫星上的力很复杂,除了地球的万有引力外还有太阳,月球(以及其它天体)的万有引力、大气阻力,太阳的光压力和一些其它作用力(如地球的潮汐摄动力及地磁场力等)。而其中的地球万有引力又可分为两个部分:地球引力<sub>(1)</sub>和地球引力<sub>(2)</sub>。

划分的方法如下：首先把地球当作一个圆球，该圆球的质量等于地球的总质量，密度成球状分布（即圆球的密度仅和高地心的距离有关）。为方便起见我们将这个圆球称为地球正球。从物理大地测量的位理论知地球正球对球外一点的引力就等于将质量全部集中在球心的一个质点所产生的万有引力： $G \frac{Mm}{r^2}$ 。我们将这部分力定义为地球引力 $(1)$ 。当然地球实际上并不是一个正球，而是在赤道上稍稍隆起形状十分不规则质量分布也不均匀的一个扁状的球体。因而真实地球的引力场是十分复杂的，通常需要用一个小阶次的函数才能逼近它。我们将真实地球的万有引力和地球正球的万有引力之差定义为地球引力 $(2)$ ，也称为地球的形状摄动力。显然地球引力 $(2)$ 是空间位置的函数。

虽然作用在卫星上的力很多，但这些力的大小却相差很悬殊。如果把地球引力 $(1)$ 的大小当作1的话，那么地球引力 $(2)$ 就是一个大小约为 $1 \times 10^{-3}$ 的微小作用力，而日、月引力、大气阻力、光压力及其它力则都是小于等于 $10^{-5}$ 级的更微小的作用力。也就是说作用于卫星的各种外力对卫星运动的影响是大不相同的。其中地球引力 $(1)$ 对卫星的运动起决定性作用，而且在地球引力 $(1)$ 的单独作用下卫星的运动轨道又是可以精确计算出来的。我们将这种轨道称为人卫正常轨道。而其余各种力则仅仅使卫星略微偏离正常轨道。我们将这种偏离值称为轨道摄动，把这些小作用力称为摄动力。

表 2-1

作用在卫星上的力		卫星轨道	轨道理论
地球引力 $(1)$ ：地球正球(质点)的引力		人卫正常轨道	人卫正常轨道理论 (二体问题)
摄动力	地球引力 $(2)$ ：形状摄动力 日、月引力 大气阻力 光压力 其它作用力	轨道摄动	人卫轨道摄动理论
总和		人卫真实轨道	人卫轨道理论

## (二)二体问题

研究两个质点在万有引力作用下的运动规律问题称为二体问题，如果我们把地球当作地球正球(地球质点)并且暂时不考虑各种摄动力对卫星运动的影响，那么我们就把问题简化为二体问题了。在二体问题中卫星的运动轨道是一个椭圆，该椭圆的大小形状及其在空间的定向以及卫星在轨道上的位置均可精确算出。我们把二体问题中算得的椭圆轨道称为人造卫星的正常轨道。把确定椭圆轨道的形状、大小与空间的定向以及卫星在轨道上的位置的一整套方法及其有关理论称为人造卫星正常轨道理论。

显然人卫正常轨道只是真实轨道的一种近似。研究人卫正常轨道的意义在于：

1. 人卫真实轨道 = 人卫正常轨道 + 轨道摄动。因而它是研究人卫真实轨道的基础。
2. 由于地球引力 $(1)$ 对卫星的运动起决定性作用，因而正常轨道是真实轨道的很好的近似。当精度要求不高时可用来替代真实轨道，以进行定性讨论和卫星预报等工作。

## (三)轨道摄动

人卫正常轨道虽然可以精确求解。但它毕竟只是在一系列假设下求得的一条近似轨道。

所以我们还必须讨论在地球引力 $(\epsilon_2)$ 和其它各种摄动力的作用下卫星的实际轨道和正常轨道之间会产生多大的偏离的问题,即解决所谓的轨道摄动问题。我们把解决轨道摄动问题的一整套方法和相应的理论称为人卫轨道摄动理论。在人卫轨道摄动理论中将涉及一系列复杂的数学和力学问题,我们将在第三章中加以简要的介绍,人卫正常轨道理论(二体问题)则在第二章中介绍。

## § 2.2 开普勒行星运动三定律

开普勒(Kepler Johannes, 1571—1630)是德国著名的天文学家。他接受了哥白尼(Kopernik, Nikolaus 1473—1543, 波兰)的思想,认为地球和行星是绕太阳运动的。为了进一步论证哥白尼的日心说,他需要大量的行星位置的精确观测资料。开普勒的导师第谷·布拉赫(Tycho Brahe, 1546—1601)是丹麦伟大的天体测量学家。他在丹麦和布拉格进行了大量的天文观测,积累了丰富的观测资料。第谷·布拉赫逝世后开普勒获得了这批资料。由于对火星的观测资料数量既多又较为完整,而且从地球上看来火星的运动又显得十分复杂,因而开普勒首先选用火星的观测资料来验证哥白尼的假说。但是无论怎样拟合,只要把火星轨道当作圆轨道就总是存在着 $8''$ 的残差。花了8年时间后开普勒终于发现火星的轨道是一个椭圆,太阳则位于该椭圆的一个焦点上。著名的开普勒行星运动第一定律就是根据这一发现而导出的。在研究过程中开普勒又发现:无论火星位于何处,火星和太阳之间的向径在相同的时间内所扫过的面积是相同的。这就是后来的开普勒行星运动第二定律。这两条定律最初都是从火星的观测资料中导出的,刊登在1609年开普勒所著的新天文学(The New Astronomy)中,1618年开普勒用大量的观测资料验证后又宣布上述两定律不仅适用于火星而且适用于其它所有行星以及地球的卫星月球和新发现的木星的四个卫星。一年后在一本题为《The Harmony of The World》的书中,开普勒又公布了行星运动第三定律:行星的运动周期的平方和轨道椭圆的半长轴的三次方成正比。

虽然开普勒从大量观测中总结出来的行星运动三定律揭示了行星运动规律,但遗憾的是开普勒本人始终未能从理论上加以证明。直至半个多世纪后英国科学家牛顿(Newton Isaac, 1642—1727)建立了牛顿运动三定律和万有引力定律后,才从力学上对行星运动三定律进行了科学的解释。开普勒和牛顿的杰出工作为现代天体力学的建立奠定了基础。

## § 2.3 二体问题基本运动方程

### 2.3.1 基本运动方程的建立

万有引力定律告诉我们,宇宙中任意两个质点皆相互吸引,吸引力的大小和这两个质点的质量的乘积成正比,与它们之间的距离平方成反比。牛顿第二运动定律则告诉我们:物体受外力作用时所产生的加速度的大小和外力的大小成正比和该物体的质量成反比,加速度的方向与外力方向相同。由于牛顿运动定律只有在惯性坐标系中才成立,所以在讨论二体问题的基本运动方程时首先需建立惯性坐标系 $o-\xi\eta\zeta$ ,现假设空间有两个质点A和P。A点

在惯性坐标系中的坐标为  $(\xi_A, \eta_A, \zeta_A)^T$ , 质量为  $M$ 。  $P$  点在惯性坐标系中的坐标为  $(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$ , 质量为  $m$ 。从  $A$  点到  $P$  点的矢量为  $\vec{r}$ , 即:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \xi_P - \xi_A \\ \eta_P - \eta_A \\ \zeta_P - \zeta_A \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

据万有引力定律  $P$  点受到的万有引力  $\vec{F}_P$  为:

$$\vec{F}_P = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (2-2)$$

式中的负号表示万有引力  $\vec{F}_P$  的方向和单位矢量  $\frac{\vec{r}}{r}$  的方向相反。从牛顿第二运动定律知质点  $P$  在万有引力  $\vec{F}_P$  的作用下将产生加速度  $\vec{a}_P$ :

$$\vec{a}_P = \frac{\vec{F}_P}{m} \quad (2-3)$$

将(2-2)式和(2-1)式代入(2-3)式得:

$$\vec{a}_P = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} = -G \frac{M}{r^3} \begin{pmatrix} \xi_P - \xi_A \\ \eta_P - \eta_A \\ \zeta_P - \zeta_A \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

我们知道加速度矢量  $\vec{a}_P$  是  $P$  点的位置矢量  $\vec{r}_P = (\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T$  对时间  $t$  的二阶导数, 即:

$$\vec{a}_P = \frac{d^2 \vec{r}_P}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 \xi_P}{dt^2} \\ \frac{d^2 \eta_P}{dt^2} \\ \frac{d^2 \zeta_P}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_P \\ \ddot{\eta}_P \\ \ddot{\zeta}_P \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

于是矢量表达式(2-4)也可用下列标量表达式来表示:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_P = -G \frac{M}{r^3} (\xi_P - \xi_A) \\ \ddot{\eta}_P = -G \frac{M}{r^3} (\eta_P - \eta_A) \\ \ddot{\zeta}_P = -G \frac{M}{r^3} (\zeta_P - \zeta_A) \end{cases} \quad (2-6)$$

在人卫轨道理论中为方便起见, 我们总是将变量  $X$  对时间  $t$  的一阶导数  $\frac{dX}{dt}$  记为  $\dot{X}$ , 将变量  $X$  对时间  $t$  的二阶导数  $\frac{d^2 X}{dt^2}$  记为  $\ddot{X}$ 。

同样, 质点  $A$  也要受到质点  $P$  的吸引, 据牛顿第三运动定律有

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_P = G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (2-7)$$

采用同样的方法可求得:

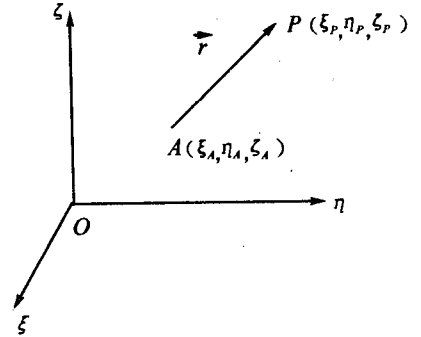


图 2-1 二体问题基本方程导出图

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_A = G \frac{m}{r^3} (\xi_P - \xi_A) \\ \ddot{\eta}_A = G \frac{m}{r^3} (\eta_P - \eta_A) \\ \ddot{\zeta}_A = G \frac{m}{r^3} (\zeta_P - \zeta_A) \end{cases} \quad (2-8)$$

如果我们以质点  $A$  为坐标原点建立一个新的坐标系  $A-XYZ$ , 并使新坐标系的三个坐标轴分别平行于惯性坐标系的三个坐标轴的话, 那么  $P$  点在新坐标系中的坐标  $X, Y, Z$  为:

$$\begin{cases} X = \xi_P - \xi_A \\ Y = \eta_P - \eta_A \\ Z = \zeta_P - \zeta_A \end{cases} \quad (2-9)$$

将(2-9)式两边同时对时间  $t$  求二阶导数后可得:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \ddot{\xi}_P - \ddot{\xi}_A = -G \frac{M+m}{r^3} X = -\frac{\mu}{r^3} X \\ \ddot{Y} = \ddot{\eta}_P - \ddot{\eta}_A = -G \frac{M+m}{r^3} Y = -\frac{\mu}{r^3} Y \\ \ddot{Z} = \ddot{\zeta}_P - \ddot{\zeta}_A = -G \frac{M+m}{r^3} Z = -\frac{\mu}{r^3} Z \end{cases} \quad (2-10)$$

$$\text{式中的} \quad \mu = G(M+m) \quad (2-11)$$

(2-10)式就是用直角坐标表示的二体问题基本运动方程。从上面的讨论可以看出:

1. 我们是在一个特殊的坐标系  $A-XYZ$  中来讨论质点  $P$  的运动的。该坐标系的原点位于质点  $A$  上, 三个坐标轴则分别与惯性坐标系的三个轴平行。由于质点  $A$  有加速度  $\vec{a}_A$ , 因此该坐标系不是一个惯性坐标系。因为牛顿力学告诉我们在互相作变速运动的两个参考系中, 如果有一个是惯性系, 那么另一个就不可能是惯性系。

2. 从(2-9)式和(2-10)式可以看出, 由于质点  $A$  也在运动。所以我们讨论的是质点  $P$  相对于质点  $A$  的运动而不是质点  $P$  在惯性坐标系中的绝对运动。

3. 在讨论坐标系原点  $A$  的加速度  $\vec{a}_A$  时, 我们仅仅顾及了由于质点  $P$  而产生的万有引力  $\vec{F}_A$  这一个因素, 而未顾及其它因素。

### 2.3.2 限制性二体问题

如果质点  $P$  的质量  $m$  与质点  $A$  的质量  $M$  相比是如此之小 ( $m \ll M$ ), 以致略去质量  $m$  后对预定的精度不会产生什么影响(略去  $m$  后所造成的影响远比观测误差和其它误差所造成的影响要小)在这种特殊情况下的二体问题被称为限制性二体问题。

在限制性二体问题中质点  $A$  的加速度  $\vec{a}_A$  可忽略不计而视为零。也就是说  $A-XYZ$  坐标系实际上可视为惯性坐标系, 此时式(2-10)简化为:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \ddot{\xi}_P = -G \frac{M}{r^3} X = -\frac{\mu}{r^3} X \\ \ddot{Y} = \ddot{\eta}_P = -G \frac{M}{r^3} Y = -\frac{\mu}{r^3} Y \\ \ddot{Z} = \ddot{\zeta}_P = -G \frac{M}{r^3} Z = -\frac{\mu}{r^3} Z \end{cases} \quad (2-12)$$



也就是说限制性二体问题的基本运动方程的最后表达式是和二体问题的基本运动方程相同的,只是在限制性二体问题中  $\mu$  变为:

$$\mu = GM \quad (2-13)$$

### 2.3.3 在人卫轨道运动中的应用

如前所述,如果我们将地球当作一个正球(质点),并暂且不考虑地球的形状摄动和其它的摄动力,那么就把复杂的卫星轨道运动简化为二体问题了,而在地球质点的万有引力作用下卫星的运行轨道(正常轨道)是可以精确计算出来的。然后再运用人卫摄动理论求出在各种摄动力的作用下卫星的轨道摄动量。由于摄动力都是一些微小量,因而在摄动计算中可根据所需的精度进行合理的取舍和近似。例如用级数展开后取平方项或三次项等。把各种轨道摄动都加到正常轨道上去就可求得真实的卫星轨道了。在这里需要说明的是:

1. 卫星的质量一般为几百千克至几万千克,而地球的质量则高达  $6 \times 10^{24}$  千克,也就是说卫星的质量和地球的质量一般要相差 20~22 个数量级。因此由于卫星的万有引力而使地球产生的加速度完全可以忽略不计,讨论人造卫星在地球质点的万有引力作用下的运动规律是一个典型的限制性二体问题。

2. 试验结果表明坐标原点位于太阳质心,坐标轴指向空间固定方向的日心坐标系是一个非常好的惯性坐标系。在这个坐标系中观测到的天文现象与用牛顿运动定律和万有引力定律推算的结果相符得很好。但我们关心的是人造卫星相对于地球的运动而不是相对于太阳的运动。也就是说我们希望在一个人造卫星相对于地球的运动。前面已经讲了由卫星的万有引力而引起的地球的加速度是可以忽略不计的,现在的问题是在太阳和其它行星的万有引力作用下地球将产生绕日公转,从而产生一个向心加速度。因此严格地讲即使三个坐标轴是固定地指向空间三个方向的地心坐标系也不是一个惯性坐标系。但好在这个向心加速度也很小,因此在一般情况下仍可被当作惯性坐标系。

3. 卫星轨道理论中所采用的各种地心坐标系的坐标轴一般并不指向空间的三个固定方向,而是与地球上一些重要的轴线重合。例如 Z 轴与地球自转轴重合, X 轴指向春分点等。然而由于太阳、月球和行星对地球赤道附近的隆起部分的吸引力,使得这些轴线在空间的方向产生缓慢的变动(岁差和章动),从而使得这些地心坐标系不成为惯性系。而牛顿力学只有在惯性系中才成立,所以必须对公式加以修正。通常我们将这种修正也当作摄动来处理,这就是所谓的“坐标系的附加摄动”,我们将在第三章中加以介绍。

## § 2.4 基本运动方程的解

在第三节中我们已建立了二体问题的基本运动方程。在第四至第八节中将重点讨论基本运动方程的求解,卫星的运动规律及卫星的轨道根数等问题。为方便起见,在公式推导过程中将大量使用矢量运算。现将本章中涉及的矢量运算公式收集摘录在一起并附于本章末尾,以便读者查阅。

在二体问题基本运动方程(2-10)式中,  $r = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$ , 因此它是一个非线性的常微方程组。该方程组由三个方程组成,每个方程皆为二阶微分方程,所以求解后应有 6 个独立的积分常数。下面我们就来解这个方程组。为方便计,将二体运动基本运动方程(2-10)式