

高等学校数学学习辅导教材

线性代数 复变函数 概率统计 习题全解

陈小柱 张立卫/编著

(中册)

3-44
9/2:2



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

013-44
139/232

陈小柱高等学校数学学习辅导系列

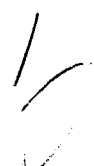
线性代数 · 复变函数

· 概率统计习题全解

中 册

(同济二版、三版、四版 · 西安交大四版 · 浙大二版、三版)

陈小柱 张立卫 编著
冯士英 聂续昀 主审



大连理工大学出版社

© 陈小柱 张立卫 2004

图书在版编目(CIP)数据

线性代数·复变函数·概率统计习题全解(中册) / 陈小柱, 张立卫
编著. —2版. —大连: 大连理工大学出版社, 2004.6(2004.11重印)
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2569-0

I. 线… II. ①陈… ②张… III. ①线性代数—高等学校—解题 ②复变函数—高等学校—解题 ③概率论—高等学校—解题 ④数理统计—高等学校—解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054127 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-84708842 传真: 0411-84701466 邮购: 0411-84707961

E-mail: dulp@dulp.cn URL: <http://www.dulp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm × 203mm 印张: 5.25 字数: 164 千字

印数: 110 001 ~ 116 000

1999 年 8 月第 1 版 2004 年 6 月第 2 版

2004 年 11 月第 18 次印刷

责任编辑: 范业婷

责任校对: 李西娜

封面设计: 宋 蕾

定 价: 6.00 元

卷首赠言

知识是引导人生到达
光明与真实境界的光烛。

——李大钊(1889—1927)

(在燕园李大钊教授铜像前,仿佛能听到他穿越时光的声音)

高年级大学生、研究生以及青
年教师,经过努力可以胜过老师,
而且应该鼓励他们尽早胜过老师。

——江泽民(1902—1994)

(摘自《中国科学院院士自述》)

最新版前言

本书第一版(合订本)成书于上一个千年。近年来,在国与国之间相互作用的牵引下,身边发生的变化深刻、迅猛且不可逆转。

“人才标准”进化成了“三不惟一不拘”;千辛万苦学成归来,“海归(龟)”变成“海待(带)”;人才市场对各种证书已显得格外冷静。

扩招如同钱塘江的大潮,高校似乎对此准备不足。在校园,教师常常在同一知识点上,要被不同的学生,在不同的时间问到十几次,甚至几十次;有改不完的作业在桌上候着,分身乏术。现在的学生受到的诱惑太多,而他们学习的总量却丝毫没有减少。在学生中,听不懂课,看不懂书,不会解题,已不再是个别现象。假使大学一年级“倒下了”,后面的日子就难了。师呼一何累,生啼一何苦。

向初学者进言:

一、把培养推导能力放在首位。对核心内容及典型题目,本着“一步不省,以我为主”的原则,自己推算,长期坚持,养成习惯。一旦拥有无与伦比的推导能力,扩大解题量将易如反掌。



二、不宜超越阶段。在时间总量有限的前提下,贪多会嚼不烂。抠会了几道考研题,挤占了时间和精力,反而在核心内容,基本题型上留下“死角”,本末倒置,留下了“豆腐渣工程”,得不偿失!

以上两点是在实践中反复摸索而得到的。本次修订,酝酿了四年。排除了扩充成“大部头”的设想,将第一版的内容进行了较大的增删,新版上册、中册、下册分别与下列教材相配套:同济二、三、四版《线性代数》,西安交大四版《复变函数》及浙大二、三版《概率论与数理统计》,全部习题均有详细的解答,增加了教学过程中的启承转合、弦外之音,让教学实践的源头活水流入了新版书中。

修订工作的根本出发点是:帮助初学者悟透基本原理,培养推导能力,从而能举一反三,触类旁通,进而从根本上解决多门大学数学课程的学习能力问题。拥有了能力,就会一顺百顺。欢迎读者朋友多提意见和建议。

联系方式:

xzchen100@hotmail.com

jcjf@dutp.cn

陈小柱

2004年6月

大连海事大学郑和园

(2005-1405=600 $\Rightarrow$ “郑和船队”将重现蓝色星球)

第一版前言

当人类即将迈入 21 世纪之际,世界对各类人才的需求正在发生着深刻的变化。作为人才培养基地的高校,正在探索着培育人才的新模式,以适应客观世界的需求。

相比于十多年前的学生,当今及未来的学生需投入更多的时间、精力来学习外语及计算机。而这对大学数学课的教与学均提出了前所未有的挑战。

当大学数学的课时被迫削减之后,教师有了“教材内容无法完全展开讲授”之苦;而学生在有限的精力被分割后,学习大学数学常常会发生“食而不化”的现象。考研及后续专业课,对大学数学的学习又有较高的要求。

由于大学数学早已渗透到现代科学的各个学科,未来的新兴学科仍需借助数学工具进行表述。未来社会所需要的一大批通才、栋梁之才,非有扎实的数学功底不可。

正是为了化解这一矛盾,我们编写了这本具有工具书性质的《线性代数·复变函数·概率统计习题全解》,



以期学生通过大学期间不间断地反复自学来弥补不足,打牢数学底子。因此,理工科大学一年、二年、三年、四年,必要时,甚至以后的学习阶段,均宜备有此书,以便自学查阅。

全书分为上册、中册、下册,分别与下列教材相配套:同济二版、三版《线性代数》,西安交大四版《复变函数》及浙大二版《概率论与数理统计》,全部习题均有详细的解答。

书中在每章之首,均缀有一篇导学。初学者在看书时,常常“只见树木,不见森林”,而“导学”侧重于帮您透视脉络,从细节的认识升华到全盘的认识。本书是已多次再版的《高等数学习题全解》的姊妹篇,并与《考研数学真题全解及考点分析》系列教材相呼应,形成系统的知识体系。

本书由冯士英教授、聂续昀副教授担任主审,蔡颖同志也提出了宝贵的意见。

限于编者水平,加之时间仓促,不妥之处难免存在,恳请广大读者提出批评和指正!

编 者

2000年9月

特 别 提 示

第二百一十七条 以营利为目的,有下列侵犯著作权情形之一,违法所得数额较大或者有其他严重情节的,处三年以下有期徒刑或者拘役,并处或者单处罚金;违法所得数额巨大或者有其他特别严重情节的,处三年以上七年以下有期徒刑,并处罚金:

(一)未经著作权人许可,复制发行其文字作品、音乐、电影、电视、录像作品、计算机软件及其他作品的;

(二)出版他人享有专有出版权的图书的;

.....

第二百一十八条 以营利为目的,销售明知是本法第二百一十七条规定的侵权复制品,违法所得数额巨大的,处三年以下有期徒刑或者拘役,并处或者单处罚金。

——摘自《中华人民共和国刑法》

盗版举报电话:0411—84708842

目 录

中 册

复变函数习题全解(西安交大四版)

第一章 复数与复变函数

导学 /3 本章知识结构 /4 习题全解 /4

第二章 解析函数

导学 /24 本章知识结构 /25 习题全解 /25

第三章 复变函数的积分

导学 /44 本章知识结构 /45 习题全解 /46

第四章 级 数

导学 /75 本章知识结构 /76 习题全解 /76

第五章 留 数

导学 /101 本章知识结构 /102 习题全解 /103

第六章 共形照射

导学 /127 本章知识结构 /128 习题全解 /129

中 册

复变函数习题全解

(与西安交大四版《复变函数》相配套)

今天所做的事，
勿候明天，
自己所做的事，
勿候别人。

——歌德

第一章 复数与复变函数

生命,那是自然付给人类去雕琢的宝石。

——诺贝尔



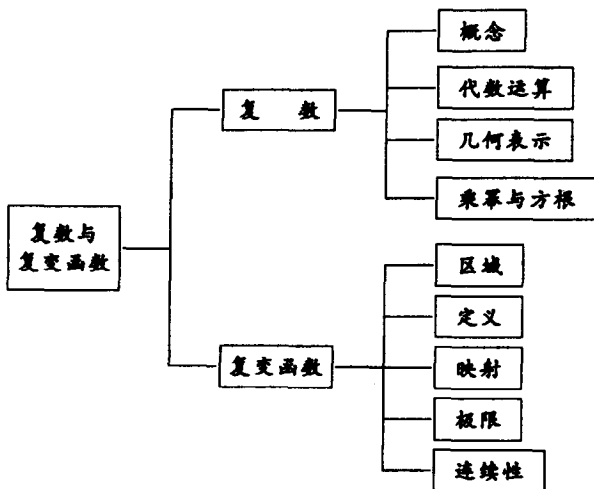
复变函数就是自变量为复数的函数。本课程研究的主要对象是在某种意义之下可导的复变函数,通常称为解析函数。为建立这种解析函数的理论基础,在这一章中,首先引入复数的代数运算及其多种表示法;其次介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念,这些概念及性质与一元或二元微积分中相应概念及性质在形式上几乎完全相同,但本质上却有很大差别,应当特别给以关注。

每学一个概念、定理,均要与高等数学中相应部分进行对照,尤其要记住差别。 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是联系高等数学与复变函数的重要桥梁,全书许多定理的表述或证明均须借助于 $u(x, y), v(x, y)$ 。

复变函数理论体系的构建,以高等数学为参照系,并借用了其中的结论。回过头来,对其中的一些棘手的高等数学问题能轻而易举地加以解决。例如,用留数计算广义积分等。同时,复变函数向应用领域的延伸也是独特的。



本章知识结构



习题全解

1. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模与辐角主值.

$$(1) \frac{1}{3+2i}; \quad (2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

$$(3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; \quad (4) i^3 - 4i^{21} + i$$

解 (1) $\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3}{13} + \left(\frac{-2}{13}\right)i$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{13}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{13}, \bar{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{13}}, \arg z = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(2) \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} + \left(\frac{-5}{2}\right)i$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}, \operatorname{Im}(z) = -\frac{5}{2}, \bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$|z| = \frac{\sqrt{34}}{2}, \arg(z) = -\arctan\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$(3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} = \frac{(-4+3i)}{-2}(2-5i) = -\frac{7}{2} - 13i$$

$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{7}{2}, \operatorname{Im}(z) = -13, \bar{z} = -\frac{7}{2} + 13i,$$

$$|z| = \frac{5}{2} \sqrt{29}, \arg z = \arctan\left(\frac{26}{7}\right) - \pi$$

$$(4) i^2 - 4i^{21} + i = 1 - 4i + i = 1 - 3i$$

$$\operatorname{Re}(z) = 1, \operatorname{Im}(z) = -3, \bar{z} = 1 + 3i, |z| = \sqrt{10},$$

$$\arg z = -\arctan 3$$

2. 当 x, y 等于什么实数时, 等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 成立?

解 由 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 可得

$$(x+1) + i(y-3) = 2 + 8i$$

因此 $\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$ 时等式成立.

3. 证明虚单位 i 有这样的性质: $-i = i^{-1} = \bar{i}$

证明 $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i = \bar{i}$

因此 $-i = i^{-1} = \bar{i}$

4. 证明:

$$(1) |z|^2 = z\bar{z};$$

$$(2) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$(3) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2;$$

$$(4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$$

$$(5) \bar{\bar{z}} = z$$

$$(6) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

证明 (1) 由 $z = x + yi$, 得

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ 等式成立.}$$

(2) 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 则

$$\text{左式} = \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i)}$$



$$\begin{aligned}
 &= \overline{(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i} \\
 &= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i \\
 \text{右式} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{(x_1 + y_1 i)} \pm \overline{(x_2 + y_2 i)} \\
 &= (x_1 - y_1 i) \pm (x_2 - y_2 i) \\
 &= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i
 \end{aligned}$$

等式成立。

(3) 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 则

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i} \\
 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\
 \bar{z}_1 \bar{z}_2 &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\
 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1)i
 \end{aligned}$$

等式成立。

(4) 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 则

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{z_1}{z_2} \right) &= \left(\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \right) = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\
 &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
 \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{x_1 - y_1 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}
 \end{aligned}$$

等式成立。

(5) 设 $z = x + yi$, 则 $\bar{z} = x - yi$ $\bar{\bar{z}} = x + yi = z$

(6) 设 $z = x + yi$, 则 $\bar{z} = x - yi$

$$\frac{1}{2}(\bar{z} + z) = \frac{1}{2}(x - yi + x + yi) = x = \operatorname{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2i}(x + yi - x + yi) = y = \operatorname{Im}(z)$$

5. 对任何 $z, z^2 = |z|^2$ 是否成立? 如果是, 就给出证明, 如果不是, 对哪些 z 值才成立?

答 不成立, 例如 $z = i, z^2 = i^2 = -1$, 而 $|z|^2 = |i|^2 = 1, z^2 \neq |z|^2$. 只有 z 为实数时, 等式 $z^2 = |z|^2$ 才成立。

6. 当 $|z| \leq 1$ 时, 求 $|z^n + a|$ 的最大值, 其中 n 为正整数, a 为复数。

解 $|z^n + a| \leq |z^n| + |a| \leq 1 + |a|$ 故 $1 + |a|$ 为所求。

7. 判定下列命题的真假:

(1) 若 c 为实常数, 则 $c = \bar{c}$; (2) 若 z 为纯虚数, 则 $z \neq \bar{z}$

(3) $i < 2i$;

(4) 零的辐角是零

(5) 仅存在一个数 z , 使得 $\frac{1}{z} = -z$

(6) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; (7) $\frac{1}{i}\bar{z} = \overline{iz}$

解 (1) 真命题. 因为实数作为复数, 其虚部为零, 所以若 c 为实数, 则必有 $\bar{c} = c$.

(2) 真命题. 若 z 为纯虚数, 不妨设 $z = iy, y \neq 0, \bar{z} = -iy$. 由于 $y \neq 0$, 所以 $iy \neq -iy$, 即 $\bar{z} \neq z$.

(3) 假命题. 因为实数集外的复数不能比较大小.

(4) 假命题. 因为复数 0 的辐角可以是任意的.

(5) 假命题. 若 $\frac{1}{z} = -z$, 设 $z = x + iy$, 则

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad -z = -x - iy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} = -x \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

两个复数 $z_1 = i, z_2 = -i$, 均满足 $\frac{1}{z} = -z$, 不止一个.

(6) 假命题. 举反例, 令 $z_1 = i, z_2 = -i$, 则 $|z_1 + z_2| = 0$, 而 $|z_1| + |z_2| = 2$, 此时 $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$.

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ 不恒成立.

(7) 真命题. 证明: 设 $z = x + iy$, 则

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\frac{1}{i} \cdot \bar{z} = -i\bar{z} = -i(x - yi) = -y - ix$$

$$\overline{iz} = \overline{i(x + iy)} = \overline{-y + ix} = -y - ix$$

$$\Rightarrow \frac{1}{i}\bar{z} = \overline{iz}.$$

8. 将下列复数化为三角表示式和指数表示式: