高等院校信息与通信工程系列教材

信号检测与估计理论学习辅导与习题解答

赵建勋　编著

清华大学出版社

高等院校信息与通信工程系列教材

信号检测与估计理论
学习辅导与习题解答

赵建勋　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书是《信号检测与估计理论》(赵树杰、赵建勋编著，清华大学出版社出版，2005)的学习参考书，包括学习辅导和习题解答两部分内容。学习辅导部分简要归纳了各章的主要内容和结论，指出了学习的重点和应掌握的基本概念、基本的分析方法和运算；习题解答部分对书中的习题在说明题目类型、基本理论和解题思路的基础上，给出了详细的解答，这对进一步深入理解和巩固所学理论、扩大知识面、提高分析解决问题的能力很有帮助。

本书可与《信号检测与估计理论》教材配套使用，也可作为信号与信息处理、通信与信息系统等专业的研究生及高年级本科生的学习参考书，同时可供从事信号与信息处理等技术工作的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计理论学习辅导与习题解答/赵建勋编著. —北京：清华大学出版社，2007.2

(高等院校信息与通信工程系列教材)

ISBN 978-7-302-14049-8

Ⅰ.信… Ⅱ.赵… Ⅲ.①信号检测—高等学校—教学参考资料 ②参数估计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 125560 号

责任编辑：陈国新　李玮琪
责任校对：白　蕾
责任印制：王秀菊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市金元印装有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：22.75　**字　数**：520 千字
版　次：2007 年 2 月第 1 版　　**印　次**：2007 年 2 月第1 次印刷
印　数：1~3000
定　价：29.80 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：022414-01

前　言

随着科学技术的不断进步，特别是计算机及微电子技术的飞速发展，信号与信息处理不仅在理论上取得了很大的进展，而且其技术在许多方面也日趋成熟和完善，并已成功应用于国民经济和国防建设的诸多领域，取得了很好的效果。信号和信息处理受到人们的高度重视，已成为国家的重点学科之一。

信号检测与估计理论是信号处理，特别是随机信号处理的重要理论基础之一，许多院校在相关学科、专业的研究生阶段或本科高年级均开设这类课程。该课程不仅涉及随机信号处理的许多基本概念和理论、分析和处理问题的统计方法等，而且也会遇到较多的数学问题，因而相当多的人反映，该类课程难学、难懂、难掌握，有些习题也较难做。为此，以赵树杰、赵建勋编著的《信号检测与估计理论》(清华大学出版社，2005；简称教材)为参考书，编写了《信号检测与估计理论学习辅导与习题解答》(简称辅导与题解)一书，力图对学习这类课程、参考这类教材的各类人员有所帮助。

本书除第1章仅包含学习辅导内容外，其余各章均包含学习辅导和习题解答两部分内容。为了使本书既与教材有密切的联系，又具有相对的独立性，数学公式以本书的章节为序编号，但教材中已有的公式必要时以括号注明其原编号；插图和表也做类似处理。基于同样的原因，对个别习题进行了改写和修订。补充题及题解分别放在各章习题的后面。

本书学习辅导部分，分章归纳了教材的主要内容和结论，指出了学习重点和应掌握的基本概念、分析问题的基本方法和基本运算技能。

教材习题分成三种类型。第一类是加深基本概念和理论的理解、巩固所学知识的题目；第二类是教材中一些结论的证明或推导的题目；第三类是对教材内容补充的题目。本书习题解答遵循如下几个原则进行编写：(1)给出解题的理论依据和求解的思路；(2)对于较简单、常用的数学推演过程尽可能简明，省略中间过程，而对于较复杂、较难的数学推演过程则一般较详细；(3)题解中具体程序编写和数值计算省略；(4)必要时将讨论题解结果的物理意义。

本书在编写过程中，得到了朱可斌老师等的帮助。赵树杰老师审阅了书稿，提出了修改意见。在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中错漏之处在所难免，敬请读者提出批评指正。

作　者

2006年10月于西安电子科技大学

目　录

第 1 章　信号检测与估计概论

学习辅导

1.1 引言

信号检测与估计理论是信号处理的基础理论。本章重点阐明待处理的信号 $x(t)$ 是随机信号，应采用统计的方法进行处理；简要说明信号检测理论与估计理论的基本含义。

1.2 信号的随机性及其统计处理方法

信号是携带信息的工具。我们用 $s(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 来表示确知信号，而用 $s(t;\boldsymbol{\theta})(0 \leqslant t \leqslant T)$ 来表示随机(未知)参量信号，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示信号中的随机(未知)参量。

信号在产生、传输、接收和处理过程中，不可避免地受到内部和外部的干扰。干扰用 $n(t)$ 表示，它是随机过程。

通常情况下仅考虑加性干扰。这样，接收(观测)到的待处理信号 $x(t)$ 可表示为

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.1}$$

或者

$$x(t) = s(t;\boldsymbol{\theta}) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.2}$$

(教材(1.3.1)式和(1.3.2)式)。由于干扰 $n(t)$ 是随机过程，所以，无论是确知信号 $s(t)$，还是随机(未知)参量信号 $s(t;\boldsymbol{\theta})$，都使得待处理的信号 $x(t)$ 是随机信号。

随机信号 $x(t)$ 应采用统计的方法进行处理，这主要体现在如下三个方面：

(1) 对信号 $x(t)$ 的随机特性进行统计描述，即用概率密度函数、统计平均量、功率谱密度等来描述随机信号的统计特性。

(2) 对随机信号进行的处理在统计意义上是最佳的，如信号状态的最佳判决，信号参量的最佳估计，均方误差最小准则下信号的最佳线性滤波等。

(3) 处理结果的评价，即性能用统计平均量来度量，如判决概率、平均代价、平均错误概率、均值、方差、均方误差等。

在后面的章节中，基本上是按照这三个方面展开讨论的。这就是所谓的统计信号处理。

1.3 信号检测与估计概述

随机信号统计处理的主要理论基础是信号的统计检测理论、统计估计理论和最佳滤波理论。

信号的统计检测理论，研究在噪声干扰背景中，所关心的信号是属于哪种状态的最佳判决问题及检测性能的分析。

信号的统计估计理论，研究在噪声干扰背景中，信号待估计参量的最佳估计量的构造问题及估计量的性质。

信号的最佳滤波理论，研究在噪声干扰背景中，信号波形的最佳恢复问题，或离散状态下，信号在各离散时刻状态的最佳动态估计问题。

第 2 章　信号检测与估计理论的基础知识

学习辅导

2.1 引言

随机信号的基本特点是：虽然它是以不可预见的方式实时产生的，但其统计特性通常是有规律的，用数学的方法来描述这些特性时，就把随机过程作为随机信号的数学模型。

本章简要论述了随机变量、随机矢量及其函数的统计描述；重点讨论了随机过程的统计描述和统计特性；还讨论了线性系统对随机过程的响应，高斯噪声、白噪声和有色噪声的概念和特性，以及复随机过程的统计描述和统计特性；最后讨论了随机参量信号及其统计描述问题。

2.2 随机变量、随机矢量及其统计描述

2.2.1 随机变量的统计特性

设 $x(\zeta)$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一个随机变量，则其统计特性的完整数学描述是它的概率密度函数 $p(x)$。

随机变量 $x(\zeta)$ 的主要统计平均量是它的均值 μ_x 和方差 σ_x^2，分别定义为

$$\mathrm{E}[x(\zeta)] \overset{\text{def}}{=} \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

（教材(2.2.10)式）和

$$\mathrm{Var}[x(\zeta)] \overset{\text{def}}{=} \sigma_x^2 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(x(\zeta)-\mu_x)^2] \tag{2.2}$$

（教材(2.2.15)式）。

2.2.2 随机矢量的统计特性

1. 随机矢量的统计描述

设

$$\boldsymbol{x}(\zeta) = (x_1(\zeta), x_2(\zeta), \cdots, x_N(\zeta))^{\mathrm{T}}$$

是 N 维随机矢量，则其统计特性的完整数学描述是它的 N 维联合概率密度函数

$$p(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} p(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

2. 随机矢量的主要统计平均量

随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)$的主要统计平均量是它的均值矢量$\boldsymbol{\mu}_x$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_x$。$\boldsymbol{\mu}_x$ 定义为

$$\boldsymbol{\mu}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(\zeta)] \stackrel{\text{def}}{=} (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \cdots, \mu_{x_N})^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

式中，$\mu_{x_k} = \mathrm{E}[x_k(\zeta)]$ $(k=1,2,\cdots,N)$（教材(2.2.41)式）；而 $\boldsymbol{C}_x$ 定义为

$$\boldsymbol{C}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}(\zeta)-\boldsymbol{\mu}_x)(\boldsymbol{x}(\zeta)-\boldsymbol{\mu}_x)^{\mathrm{T}}]$$

$$= \begin{bmatrix} c_{x_1x_1} & c_{x_1x_2} & \cdots & c_{x_1x_N} \\ c_{x_2x_1} & c_{x_2x_2} & \cdots & c_{x_2x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{x_Nx_1} & c_{x_Nx_2} & \cdots & c_{x_Nx_N} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

式中，$c_{x_jx_k} = \mathrm{E}[(x_j(\zeta)-\mu_{x_j})(x_k(\zeta)-\mu_{x_k})] = c_{x_kx_j}$ $(j,k=1,2,\cdots,N)$（教材(2.2.42)式）。

3. 相互统计独立性和独立同分布

若

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= p(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &= p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_N) \end{aligned} \tag{2.5}$$

（教材(2.2.43)式），则称随机变量 $x_k(\zeta)$ $(k=1,2,\cdots,N)$之间是相互统计独立的。特别地，如果还满足 $p(x_k)$ $(k=1,2,\cdots,N)$都一样，则 $\boldsymbol{x}(\zeta)$是具有独立同分布的 N 维随机矢量。

4. N 维联合高斯随机矢量的性质

如果 $\boldsymbol{x}(\zeta)$是 N 维联合高斯随机矢量，则其 N 维联合概率密度函数完全由均值矢量$\boldsymbol{\mu}_x$和协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_x$ 决定，表示为

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\,|\boldsymbol{C}_x|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_x^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x)\right] \tag{2.6}$$

式中，$|\boldsymbol{C}_x|$是 $\boldsymbol{C}_x$ 的行列式，$\boldsymbol{C}_x^{-1}$是 $\boldsymbol{C}_x$ 的逆矩阵（教材(2.2.44)式）。

N 维联合高斯随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)$的三个主要性质：

(1) N 维联合高斯随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)$的每一个分量 $x_k(\zeta)$ $(k=1,2,\cdots,N)$都是一维高斯随机变量。

(2) N 维联合高斯随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)$的线性变换

$$\boldsymbol{y}(\zeta) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\zeta)$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $M\times N$ 非随机矩阵，则 $\boldsymbol{y}(\zeta)$是 M 维联合高斯随机矢量，其均值矢量为$\boldsymbol{\mu}_y=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_x$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}_y=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_x\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

(3) N 维联合高斯随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)$的各分量 $x_k(\zeta)$ $(k=1,2,\cdots,N)$之间的互不相关性和相互统计性具有等价性。

5. 高斯随机变量的线性组合

由 N 维联合高斯随机矢量的性质，可以得出 N 个高斯随机变量 $x_k(\zeta)(k=1,2,\cdots,N)$ 线性组合的有用结果。

(1) 若 $x_k(\zeta)\sim\mathcal{N}(\mu_{x_k},\sigma_{x_k}^2)(k=1,2,\cdots,N)$，且它们相互统计独立，则它们的和

$$x(\zeta)=\sum_{k=1}^{N}x_k(\zeta)\tag{2.7}$$

是高斯随机变量，且有 $x(\zeta)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$，其中

$$\mu_x=\sum_{k=1}^{N}\mu_{x_k}\tag{2.8}$$

和

$$\sigma_x^2=\sum_{k=1}^{N}\sigma_{x_k}^2\tag{2.9}$$

(2) 更一般地，任意有限 N 个高斯随机变量 $x_k(\zeta)(k=1,2,\cdots,N)$ 的线性组合

$$x(\zeta)=\sum_{k=1}^{N}a_kx_k(\zeta)\tag{2.10}$$

仍然是高斯随机变量，且有 $x(\zeta)\sim\mathcal{N}(\mu_x,\sigma_x^2)$，其中

$$\mu_x=\sum_{k=1}^{N}a_k\mu_{x_k}\tag{2.11}$$

和

$$\sigma_x^2=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_ja_kc_{x_kx_j}\tag{2.12}$$

式中，协方差函数 $c_{x_kx_j}=c_{x_jx_k}$，其定义同前。

2.2.3 随机变量的函数

设随机变量 $x(\zeta)$ 的概率密度函数为 $p(x)$，其函数

$$y(\zeta)=g(x(\zeta))$$

如果反函数

$$x(\zeta)=h(y(\zeta))$$

存在，且连续可导，则随机变量 $y(\zeta)$ 的概率密度函数为

$$p(y)=p[x=h(y)]\,|\,J\,|\tag{2.13}$$

这种变换称为一维雅可比变换，雅可比 J 为

$$J=\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}$$

$|\cdot|$ 是绝对值符号(教材(2.2.49)式)。

随机变量函数的均值为

$$\mu_y=\mathrm{E}(y(\zeta))=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)p(x)\mathrm{d}x\tag{2.14}$$

(教材(2.2.12)式)。这是一个很有用的求随机变量函数均值的公式。

2.2.4 随机矢量的函数

设 N 维随机矢量 $\boldsymbol{x}(\zeta)=(x_1(\zeta),x_2(\zeta),\cdots,x_N(\zeta))^{\mathrm{T}}$ 的 N 维联合概率密度函数为 $p(\boldsymbol{x})=p(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，其函数

$$y_k(\zeta)=g_k(x_1(\zeta),x_2(\zeta),\cdots,x_N(\zeta)),\quad k=1,2,\cdots,N$$

如果它的反函数

$$x_k(\zeta)=h_k(y_1(\zeta),y_2(\zeta),\cdots,y_N(\zeta)),\quad k=1,2,\cdots,N$$

存在，且对 $y_k(k=1,2,\cdots,N)$ 连续可导，则 N 维随机矢量 $\boldsymbol{y}(\zeta)=(y_1(\zeta),y_2(\zeta),\cdots,y_N(\zeta))^{\mathrm{T}}$ 的 N 维联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{y})&=p(y_1,y_2,\cdots,y_N)\\&=p[x_1=h_1(y_1,y_2,\cdots,y_N),x_2=h_2(y_1,y_2,\cdots,y_N),\cdots,\\&\quad x_N=h_N(y_1,y_2,\cdots,y_N)]\,|J|\end{aligned}\tag{2.15}$$

这种变换称为 N 维雅可比变换，雅可比行列式 J 为

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial h_1(\cdot)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1(\cdot)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1(\cdot)}{\partial y_N}\\ \dfrac{\partial h_2(\cdot)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2(\cdot)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_2(\cdot)}{\partial y_N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial h_N(\cdot)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_N(\cdot)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_N(\cdot)}{\partial y_N}\end{vmatrix}\tag{2.16}$$

（教材(2.2.52)式和(2.2.53)式）。

2.2.5 随机变量的特征函数

设随机变量 $x(\zeta)$ 的概率密度函数为 $p(x)$，则其特征函数为

$$\begin{aligned}G_x(\omega)&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathrm{E}[\exp(\mathrm{j}\omega x)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\exp(\mathrm{j}\omega x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.17}$$

（教材(2.2.54)式）。

2.3 随机过程及其统计描述

2.3.1 随机过程的定义

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是一概率空间，T 是一个实参数集，定义在 T 和 Ω 上的二元函数 $x(t,\zeta)$，$t\in T,\zeta\in\Omega$，称为随机过程。显然 $x(t_k,\zeta)$ 是一随机变量，而 $x(t,\zeta_i)$ 是一随机函数。

2.3.2 随机过程的统计描述

随机过程 $x(t,\zeta)$ 是由其 $t_k(k=1,2,\cdots,N)$ 时刻采样所得随机变量 $x(t_k,\zeta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}x(t_k)=(x_k;\ t_k)(k=1,2,\cdots,N)$ 的概率密度函数来描述的，即对于任意的 $N\geqslant1$ 和任意时刻

$t_k(k=1,2,\cdots,N)$，概率密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;\ t_1,t_2,\cdots,t_N) \tag{2.18}$$

是随机过程 $x(t,\zeta)$ 的完整数学描述。

2.3.3 随机过程的统计平均量

随机过程的许多主要特性可以用与它的概率密度函数有关的一阶和二阶统计平均量来表示。为方便起见，以后将 $x(t,\zeta)$ 简记为 $x(t)$。

随机过程的均值

$$\mu_x(t) = \mathrm{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;\ t)\mathrm{d}x \tag{2.19}$$

（教材(2.3.7)式）。$\mu_x(t)$ 可以理解为在 t 时刻 $x(t)$ 的“直流分量”。

随机过程的均方值

$$\varphi_x^2(t) = \mathrm{E}[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x;\ t)\mathrm{d}x \tag{2.20}$$

（教材(2.3.8)式）。$\varphi_x^2(t)$ 可以理解为在 t 时刻 $x(t)$ 的“平均功率”。

随机过程的方差

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t) &= \mathrm{E}[(x(t)-\mu_x(t))^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x(t))^2 p(x;\ t)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.21}$$

（教材(2.3.9)式）。$\sigma_x^2(t)$ 可以理解为在 t 时刻 $x(t)$ 的“交流功率”。

随机过程的自相关函数

$$\begin{aligned}r_x(t_j,t_k) &= \mathrm{E}[x(t_j)x(t_k)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k p(x_j,x_k;\ t_j,t_k)\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k\end{aligned} \tag{2.22}$$

（教材(2.3.11)式）。$r_x(t_j,t_k)$ 可以理解为 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 含有直流分量时的相关程度的度量。

随机过程的自协方差函数

$$\begin{aligned}c_x(t_j,t_k) &= \mathrm{E}[(x(t_j)-\mu_x(t_j))(x(t_k)-\mu_x(t_k))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_j-\mu_x(t_j))(x_k-\mu_x(t_k))p(x_j,x_k;\ t_j,t_k)\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k\end{aligned} \tag{2.23}$$

（教材(2.3.13)式）。$c_x(t_j,t_k)$ 是 $x(t_j)$ 与 $x(t_k)$ 之间相关程度的度量。

显然，这些统计平均量之间存在如下关系：

$$c_x(t_j,t_k) = r_x(t_j,t_k) - \mu_x(t_j)\mu_x(t_k)$$

$$r_x(t,t) = \varphi_x^2(t)$$

$$c_x(t,t) = \sigma_x^2(t)$$

$$\sigma_x^2(t) = \varphi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$

2.3.4 随机过程的平稳性

随机过程的平稳性，反映随机过程的统计特性与时间 t 的关系。

若随机过程 $x(t)$ 的概率密度函数满足

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;\ t_1,t_2,\cdots,t_N)$$
$$=p(x_1,x_2,\cdots,x_N;\ t_1+\Delta t,t_2+\Delta t,\cdots,t_N+\Delta t) \tag{2.24}$$

则该随机过程是严格平稳的(教材(2.3.21)式)。特别地,对严格平稳随机过程,有

$$p(x_j;\ t_j)=p(x)$$

和

$$p(x_j,x_k;\ t_j,t_k)=p(x_j,x_k;\ \tau),\quad \tau=t_k-t_j$$

若随机过程 $x(t)$ 的均值和自相关函数满足

$$\mu_x(t)=\mu_x \tag{2.25}$$

和

$$r_x(t_j,t_k)=r_x(\tau),\quad \tau=t_k-t_j \tag{2.26}$$

则该随机过程是广义平稳的。

既不满足严格平稳,也不满足广义平稳的随机过程是属于非平稳的。

严格平稳的随机过程是从其联合概率密度函数特性定义的,它一定是广义平稳的,但从统计平均量特性定义的广义平稳的随机过程不一定是严格平稳的,除非该过程是高斯随机过程。

2.3.5 随机过程的正交性、不相关性和统计独立性

设 $x(t_j)$ 和 $x(t_k)$ 是随机过程 $x(t)$ 在任意两个不同时刻的随机变量,其均值分别为 $\mu_x(t_j)$ 和 $\mu_x(t_k)$,自相关函数为 $r_x(t_j,t_k)$,自协方差函数为 $c_x(t_j,t_k)$。如果

$$r_x(t_j,t_k)=0,\quad j\neq k \tag{2.27}$$

则称 $x(t)$ 是相互正交的随机变量过程(教材(2.3.35)式)。如果

$$c_x(t_j,t_k)=0,\quad j\neq k \tag{2.28}$$

则称 $x(t)$ 是互不相关的随机变量过程(教材(2.3.36)式),其等价条件为

$$r_x(t_j,t_k)=\mu_x(t_j)\mu_x(t_k),\quad j\neq k \tag{2.29}$$

(教材(2.3.37)式)。如果

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_N;\ t_1,t_2,\cdots,t_N)=p(x_1,t_1)p(x_2,t_2)\cdots p(x_N,t_N) \tag{2.30}$$

则称 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程(教材(2.3.41)式)。

三者之间的关系为:

如果 $\mu_x(t_j)=0,\mu_x(t_k)=0$,则相互正交的随机变量过程等价为互不相关的随机变量过程;

如果 $x(t)$ 是相互统计独立的随机变量过程,则它一定是互不相关的随机变量过程;

如果 $x(t)$ 是互不相关的随机变量过程,则它不一定是相互统计独立的随机变量过程,除非其随机变量是服从联合高斯分布的。

2.3.6 平稳随机过程的功率谱密度

平稳随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度 $P_x(\omega)$ 是其频域特性的统计描述。

平稳随机过程 $x(t)$ 的功率谱密度 $P_x(\omega)$ 与它的自相关函数 $r_x(\tau)$ 构成了一对傅里叶变换对,即

$$P_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{2.31a}$$

$$r_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{2.31b}$$

(教材(2.3.52)式),称为维纳-辛钦公式。

2.4 复随机过程及其统计描述

若

$$\tilde{x}(t)=x_R(t)+\mathrm{j}x_I(t)$$

式中,$x_R(t)$和 $x_I(t)$均为实随机过程,则$\tilde{x}(t)$就是复随机过程。

复随机过程$\tilde{x}(t)$在 t_k 时刻采样得复随机变量$\tilde{x}(t_k)=(\tilde{x}_k;\ t_k)(k=1,2,\cdots,N)$,其 N 维联合概率密度函数为

$$p(\tilde{\boldsymbol{x}};\ \boldsymbol{t})=p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_N;\ t_1,t_2,\cdots,t_N) \tag{2.32}$$

如果$\tilde{x}(t)$是复高斯随机过程,则复高斯随机变量

$$\tilde{x}(t_k)=x_R(t_k)+\mathrm{j}x_I(t_k)$$

的实部 $x_R(t_k)$与虚部 $x_I(t_k)$是相互统计独立的,且分别服从 $x_{R_k}\sim\mathcal{N}(\mu_{x_{R_k}},\sigma_{\tilde{x}_k}^2/2)$和 $x_{I_k}\sim\mathcal{N}(\mu_{x_{I_R}},\sigma_{\tilde{x}_k}^2/2)$,这里 $x_{R_k}=x_R(t_k)$,$x_{I_k}=x_I(t_k)$,$\mu_{x_{R_k}}=\mu_{x_R}(t_k)$,$\mu_{x_{I_k}}=\mu_{x_I}(t_k)$,$\sigma_{\tilde{x}_k}^2=\sigma_{\tilde{x}}^2(t_k)$。于是,隐去时刻 t_k 后的概率密度函数为

$$p(x_{R_k},x_{I_k};\ t_k,t_k)=\frac{1}{\pi\sigma_{\tilde{x}_k}^2}\exp\left[-\frac{|\tilde{x}_k-\mu_{\tilde{x}_k}|^2}{\sigma_{\tilde{x}_k}^2}\right] \tag{2.33}$$

(教材(2.4.16)式),式中

$$\tilde{x}_k=x_{R_k}+\mathrm{j}x_{I_k}$$

$$\mu_{\tilde{x}_k}=\mu_{x_{R_k}}+\mathrm{j}\mu_{x_{I_k}}$$

对于复高斯随机矢量

$$(\tilde{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t})=(\tilde{x}(t_1),\tilde{x}(t_2),\cdots,\tilde{x}(t_N))^{\mathrm{T}}$$

则其 N 维联合概率密度函数隐去时刻 $t_k(k=1,2,\cdots,N)$后表示为

$$\begin{aligned}p(\tilde{\boldsymbol{x}};\ \boldsymbol{t})&=p(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_N;\ t_1,t_2,\cdots,t_N)\\&=\frac{1}{\pi^N|\boldsymbol{C}_{\tilde{x}}|}\exp[-(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_{\tilde{x}})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_{\tilde{x}})]\end{aligned} \tag{2.34}$$

(教材(2.4.17)式),式中,均值矢量为

$$\boldsymbol{\mu}_{\tilde{x}}=(\mu_{\tilde{x}_1},\mu_{\tilde{x}_2},\cdots,\mu_{\tilde{x}_N})^{\mathrm{T}}$$

这里 $\mu_{\tilde{x}_k}=\mathrm{E}[\tilde{x}(t_k)]=\mathrm{E}(\tilde{x}_k)(k=1,2,\cdots,N)$。协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}c_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} & c_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2} & \cdots & c_{\tilde{x}_1\tilde{x}_N}\\ c_{\tilde{x}_2\tilde{x}_1} & c_{\tilde{x}_2\tilde{x}_2} & \cdots & c_{\tilde{x}_2\tilde{x}_N}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{\tilde{x}_N\tilde{x}_1} & c_{\tilde{x}_N\tilde{x}_2} & \cdots & c_{\tilde{x}_N\tilde{x}_N}\end{bmatrix}$$