高中 数学

2007～2008

普通高中课程标准实验教科书

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

教学与测试

新课标

教师用书

文科总复习

上册

苏州大学出版社

配普通高中课程标准实验教科书

高中数学 教学与测试

教师用书

（文科·总复习·上册）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试. 文科总复习. 上/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. —苏州：苏州大学出版社，2007.3

教师用书 配普通高中课程标准实验教科书

ISBN 978-7-81090-823-8

Ⅰ.高… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 032252 号

高中数学教学与测试

教师用书

（文科・总复习・上册）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑　管兆宁

苏州大学出版社出版发行

（地址：苏州市干将东路 200 号　邮编：215021）

江 苏 省 新 华 书 店 经 销

丹 阳 市 兴 华 印 刷 厂 印 装

（地址：丹阳市胡桥镇　邮编：212313）

开本 787×1092　1/16　印张 29.25　字数 964 千

2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81090-823-8　定价：40.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部　电话：0512—67258835

数学科学学院介绍

苏州大学数学科学学院创建于1952年。现设有数学博士后流动站，数学一级学科博士点，国家理科基础科学研究和教学人才培养基地（数学），以及基础数学、应用数学、计算数学、概率统计、运筹与控制论等5个二级学科博士点和硕士点。应用数学为省级重点学科。整个数学学科被列为"211"重点建设和立项的学科。

学院现有教职工125人，其中专任教师106人，教授28人，副教授36人，博士生导师18人，国家有突出贡献的中青年专家3人，全国优秀教师3人，教育部新世纪优秀人才2人，江苏省333工程培养人选1人，青蓝工程骨干教师2人。专任教师中有47人具有博士学位。

学院下设数学与应用数学（基地）、数学与应用数学（师范）、信息与计算科学、统计学4个本科专业。目前在校研究生近300人，本科生近千人。学院从严治学，50多年来，培养了大批优秀人才，在国内外具有一定影响，许多校友已成为著名高校的学术带头人。

学院科研成就令人瞩目，先后承担了包括国家攀登计划、国家"973"攻关项目、国家自然科学基金等一大批科研项目。教师每年发表论文100多篇，相当部分论文被国际权威检索系统收录。在组合设计、动力系统、代数、微分几何、拓扑学等方面的科学研究处于国内先进水平，在国际上也有一定影响，先后有20多项成果获省部级科技进步奖。2002年学院成功举办了世界数学家大会代数卫星会议和代数拓扑卫星会议，充分显示出学院具有的实力和国际影响力。

学院设有独立的计算实验室，现拥有计算机180余台，供师生教学科研使用。学院与江苏省数学学会合办的《中学数学月刊》杂志，在国内同类杂志中质量较高、影响较大。其主编的"中学数学教学与测试"系列图书，深受中学数学教师、学生的欢迎。我院还与中国科学院数学与系统科学研究院合办国际性刊物《代数集刊》，在国际上具有一定影响。

苏州大学数学科学学院热忱欢迎有志青年报考我院本科各专业及研究生各专业。

联系电话： 0512－65112637（苏州大学数学科学学院办公室）

0512－65112618（苏州大学《中学数学月刊》编辑部）

0512－65216707（苏州大学期刊读者服务部）

《高中数学教学与测试》编委会

（文科·总复习·上册）

前　言

PREFACE

为了给使用《普通高中课程标准实验教科书(数学)》的广大高中学生和数学教师进行高考复习及高三数学教学提供更好的指导和帮助，我们聘请了在教学第一线工作、具有丰富高考复习经验的优秀专家、特级教师和高级教师组成强有力的编写小组，通过广泛听取意见，认真分析普通高中数学课程标准的新特点和数学高考命题的新动向，在精心研讨的基础上编写了《高中数学教学与测试》(文科总复习)，供2008年参加高考的文科学生和高三数学教师使用.

本套书分上、下两册，可分别作为第一、第二轮高三数学复习用书，每册又分为学生用书和教师用书.

上册学生用书共分13章72节.每节由5个部分组成：**基础训练**——选择、填空型基础题，相关考点的基本知识、技能的训练与准备；**例题精讲**——精选代表性、典型性和启发性的例题，体现新高考重点的考查内容以及能力考查的趋势，注重通性、通法的具体运用，揭示解题方法及解题规律；**巩固练习**——有针对性地对本节涉及的基本知识、方法和技巧进行检测巩固；**要点回顾**——梳理本节的知识要点，本节所体现的主要数学思想方法、能力考核要点等；**自我测试**——强化双基，进一步领会解题思路和方法。为方便使用，学生用书的“自我测试”按奇数、偶数节内容分别装订成“A册”和“B册”，书末附有自我测试简明答案.

上册教师用书的单元、小节的数目及其排列顺序与上册学生用书完全相同，内容包括“基础训练”、“例题精讲”、“巩固练习”、“要点回顾”和“自我测试”中所有习题及详细解答，并给出典型问题的出处、选题目的、变题引申、教学点拨或学习指导.另外，在每节“要点回顾”后设置了**参考例题**，提供3个备选例题，以便教师酌情选用。

本书由全体编委会成员集体讨论确定编写细则，最后由7位特级(高级)教师执笔编写：樊亚东(江苏省苏州中学，教授级高级教师)——第一、十一、十二章；张志朝(江苏省前黄高级中学，教授级高级教师)——第二章；康达军(深圳实验学校，高级教师)——第三章；石志群(江苏省姜堰市第二中学，教授级高级教师)——第四、十、十三章；蒋建华(江苏省泰州中学，教授级高级教师)——第五、六章；袁长江(徐州市第一中学，高级教师)——第七、八章；吴锷(江苏省苏州市第十中学，高级教师)——第九章.

苏州大学数学科学学院六位教师负责审校：潘洪亮——第一、十一、十二章；邱尔依——第二章；何学兰——第三章；徐稼红——第四、十、十三章；丰世富——第五、六、七章；杨建明——第八、九章.

各章由两位专家负责把关：杨浩清(江苏省名教师、特级教师)——第一、二、三、四、十一、十二章；仇炳生(江苏省名教师、特级教师)——第五、六、七、八、九、十、十三章.

多年来，全国各地的中学数学教师、学生和社会各界人士对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持，对于本次编写的《高中数学教学与测试》(文科总复习)，许多专家和读者提出了很多宝贵的意见和建议.在此，我们一并表示衷心的感谢.

我们真诚地希望使用本书的老师、学生和家长将使用的情况和意见反馈给我们，以便我们今后进一步修改完善，把这套精品图书编得更好.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2007年3月

目　录

CONTENTS

一、集合、常用逻辑用语

1. 集合的概念、集合间的基本关系

基础训练

1. 下列关系中表述正确的是 (C)

A. $0\in\varnothing$　　B. $0\notin\{x\mid x^2-x=0\}$　　C. $0\in\mathbf{N}$　　D. $0\notin\{y\mid y=|x|,x\in\mathbf{R}\}$

提示　0是自然数.

2. 已知集合 $P=\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3},x\in\mathbf{R}\}$，$a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$，则下列关系中正确的是 (D)

A. $a\notin P$　　B. $\{a\}\in P$　　C. $a\subseteq P$　　D. $\{a\}\subseteq P$

提示　$\because a=\sqrt{2}+\sqrt{5}<\sqrt{3}+2$，$\therefore a\in P$，从而 $\{a\}\subseteq P$.

3. 已知集合 $P\subsetneqq S$，且 $S\subsetneqq T$，其中 $T=\{1,2,3,4\}$，则集合 P 的子集的个数最多是 (D)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　S 最多3个元素，P 最多2个元素，从而 P 的子集最多为4个.

4. 已知集合 $P=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，则 P 的所有子集是 <u>$\varnothing,\{2\}.\{3\},\{2,3\}$</u>

提示　$P=\{2,3\}$.

5. 用列举法表示不等式组 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x+2>2x-1\end{cases}$ 的整数解的集合：<u>$\{-1,0,1,2\}$</u>.

提示　由 $-1\leqslant x<3$，且 $x\in\mathbf{Z}$ 可得.

6. 已知集合 $M=\{a-3,2a-1,a^2-4\}$，且 $3\in M$，则实数 a 的取值所组成的集合是 <u>$\{0,1\}$</u>.

提示　若 $a-3=-3$，则 $a=0$ 符合题意：若 $2a-1=-3$，则 $a=-1$. M 不是三元集，舍之；若 $a^2-4=-3$，则 $a=\pm1$，舍去 $a=-1$.

例题精讲

例1　判断下列各题中集合 A 与 B 是否具有相等或真包含关系：

(1) $A=\{x\mid x=3k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=6k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $A=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{x},x\neq 0\right\}$，$B=\left\{y\mid y=\dfrac{2}{x},x\neq 0\right\}$；

(3) $A=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{Z}\}$.

解　(1) 若 $x=6k\pi+\alpha$，则 $x=3(2k)\pi+\alpha=3k'\pi+\alpha$，即 $B\subseteq A$. 但 $3\pi+\alpha\in A$，$3\pi+\alpha\notin B$，故 $B\subsetneqq A$.

(2) $A=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{x},x\neq 0\right)=\{y\mid y\neq 0\}$，$B=\left\{y\mid y=\dfrac{2}{x},x\neq 0\right\}=\{y\mid y\neq 0\}$，故 $A=B$.

(3) $A=B=\{$奇数$\}$.

说明　注意对集合元素的表示形式进行变形，当 $B\subseteq A$ 时，只需找到一个 $x_0\in A$ 且 $x_0\notin B$，即可证 $B\subsetneqq A$；理解集合的本质，函数不同，值域可以相同；同一集合可以有不同的表示形式.

例 2 用列举法表示下列集合 A：

(1) $A=\{(x,y)\mid x+y=2,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$； (2) $A=\left\{x\mid x\in\mathbf{N},\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z}\right\}$.

解 (1) $A=|(x,y)\mid x+y=2,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}=\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$.

(2) $A=\left\{x\mid x\in\mathbf{N},\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z}\right\}=\{0,1,2,4,5,6,9\}$.

说明 注意集合元素的形式及元素符合的特征性质.

例 3 已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0,x\in\mathbf{R}\}$，$S=\{x\mid ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $S\subseteq P$，求实数 a 的取值组成的集合 A.

解 $P=\{-3,2\}$. 当 $a=0$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$；当 $a\neq0$ 时，$S=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$，要满足 $S\subseteq P$，应有 $-\dfrac{1}{a}=-3$ 或 $-\dfrac{1}{a}=2$，则 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$. 因此所求集合 $A=\left\{-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3}\right\}$.

说明 当讨论 $S\subseteq P$ 关系时，注意是否有 $S=\varnothing$ 的情形.

例 4 已知集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$，$S=\{x\mid x^2-2ax+a\leqslant0\}$. 若 $S\subseteq P$，求实数 a 的取值组成的集合 A.

解 $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant2\}$，设 $f(x)=x^2-2ax+a$.

① 当 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$，即 $0<a<1$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$.

② 当 $\Delta=0$，即 $a=0$ 或 $a=1$ 时，

若 $a=0$，则 $S=\{0\}$，不满足 $S\subseteq P$，故舍去 $a=0$.

若 $a=1$，则 $S=\{1\}$，满足 $S\subseteq P$.

③ 当 $\Delta>0$ 时，满足 $S\subseteq P$，等价于方程 $x^2-2ax+a=0$ 的两根位于 1 和 2 之间，

$$\text{即}\begin{cases}\Delta>0,\\ 1<-\dfrac{(-2a)}{2}<2,\\ f(1)\geqslant0,\\ f(2)\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\text{ 或 }a>1,\\ 1<a<2,\\ 1-a\geqslant0,\\ 4-3a\geqslant0\end{cases}\quad\Leftrightarrow a\in\varnothing.$$

综合①，②，③得 $0<a\leqslant1$，即所求集合 $A=\{a\mid 0<a\leqslant1\}$.

说明 先讨论特殊情形($S=\varnothing$)，再讨论一般情形. 关键是对 Δ 分类讨论，确定 a 的取值范围. 可用数形结合的方法讨论 $\Delta>0$.

巩固练习

1. 已知集合 $P=\{x\mid 0<x<2\}$，$Q=\{x\mid x<a\}$. 若 $P\subsetneqq Q$，则 (B)

A. $a\in(2,+\infty)$　B. $a\in[2,+\infty)$　C. $a\in(-\infty,2)$　D. $a\in(-\infty,2]$

提示 $a=2$ 时，也满足条件.

2. 下列表示同一个集合(即 $M=N$)的是 (D)

A. $M=\{(1,0)\}$，$N=\{(0,1)\}$

B. $M=\{y\mid y=x+1\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+1\}$

C. $M=\{(x,y)\mid y=x\}$，$N=\left\{(x,y)\mid \dfrac{y}{x}=1\right\}$

D. $M=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$

提示 $3k-1=3(k-1)+2=3k'+2$.

3. 用列举法写出集合 $A=\{y|y=x^2-2,x\in\mathbf{Z},|x|\leqslant 3\}=$ $\underline{\{-2,-1,2,7\}}$.

提示　只要求出 $x=0,1,2,3$ 的函数值即可.

4. 已知集合 $A=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 A 与 B 的关系为 $\underline{A\subsetneqq B}$.

提示　分别作出 A，B 所表示的平面图形，即可判断.

要点回顾

1. 理解集合的概念，掌握集合的表示方法(列举法与描述法)，体会元素的确定性、互异性和无序性，以及元素与集合的“属于”关系.

2. 能对集合不同表示方法作转换，应明确元素的形式. 理解集合之间的“包含”与“相等”的关系. 应注意空集在解题中的运用.

3. 注意集合语言与方程、不等式、函数等知识的综合.

参考例题

1. 由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合 M 中，元素的个数最多是　(A)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

解　$x=0$ 时，M 只有一个元素；$x\neq 0$ 时，M 有两个元素.

2. $M=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{N},\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{N}\right\}$，$Q=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{6}{1+t},t\in\mathbf{N},x\in\mathbf{N}\right\}$，求 $M\cap Q$.

解　$M=\{0,1,2,5\}$，$Q=\{1,2,3,6\}$，故 $M\cap Q=\{1,2\}$.

3. 含有三个元素的集合可表示为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$ 也可表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，求 a,b.

解　由 $\dfrac{b}{a}$ 可得 $a\neq 0$，又 $a\neq 1$，故 $a\neq a^2$，从而 $a=a+b$，于是 $b=0$，从而 $a=-1$.

自我测试

1. 对于下列四个关系：① $3\sqrt{2}\in\{x|x\leqslant\sqrt{17}\}$；② $0\notin\varnothing$；③ $0\in\mathbf{N}$；④ $0\notin\{y|y=x^2-x+1\}$，其中正确的个数是　(C)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　②，③，④均正确.

2. 已知集合 $P=\{x|x>1\}$，$Q=\{x|x^2>1\}$，则　(B)

A. $P=Q$　　B. $P\subsetneqq Q$　　C. $Q\subsetneqq P$　　D. 以上都不对

提示　$Q=\{x|x<-1$ 或 $x>1\}$.

3. 函数 $y=x^2-ax+3$ 在区间 $(-\infty,1]$ 内单调递减，则　(D)

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in(-\infty,2]$　　C. $a\in[1,+\infty)$　　D. $a\in[2,+\infty)$

提示　令 $-\dfrac{(-a)}{2}\geqslant 1$，可得 $a\geqslant 2$.

4. 满足 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合的个数为 $\underline{\ 8\ }$.

提示 A 为二元集时,有 1 个;A 为三元素集时,有 3 个;A 为四元素集时,有 3 个;A 为五元素集时,有 1 个.故共有 8 个.

5. 用列举法表示集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|},a,b\text{ 为非零实数}\right\}=$ $\underline{\{-2,0,2\}}$.

提示 分 a,b 同负,同正,一负一正三种情况讨论即可.

6. 已知非空集合 M 满足①$M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$,②若 $a\in M$,则 $6-a\in M$,那么 $M=$ $\underline{\{3\}\text{或}\{1,5\}\text{或}\{2,4\}\text{或}\{1,3,5\}\text{或}\{2,3,4\}\text{或}\{1,2,4,5\}}$.

7. 已知 $1\in\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,求实数 a 的值.

解 当 $a+2=1$ 时,$a=-1$,而此时有 $a^2+3a+3=1$,故 $a=-1$ 舍去.
当 $(a+1)^2=1$ 时,$a=0$ 或 $a=-2$.而当 $a=-2$ 时,$(a+1)^2=a^2+3a+3$,故此时,$a=0$.
当 $a^2+3a+3=1$ 时,$a=-1$ 或 $a=-2$,均应舍去.
综上所述,$a=0$.

8. 已知 $\{2,a,b\}=\{2a,2,b^2\}$,求实数 a,b 的值.

解 由题意 $\begin{cases}a=2a,\\b=b^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\b=2a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

而当 $\begin{cases}a=0,\\b=0\end{cases}$ 时与集合元素的互异性不符,应舍去.所求 a,b 的值是 $\begin{cases}a=0,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

9. 已知 $\{1,a^2-a\}\subseteq\{1,2,a\}$,求实数 a 的值.

解 若 $a^2-a=2$,则 $a=-1$ 或 $a=2$,而当 $a=2$ 时不符元素的互异性.
若 $a^2-a=a$,则 $a=0$ 或 $a=2$,舍去 $a=2$.
综上所述,$a=-1$ 或 $a=0$.

10. 已知 $\{x|x^2-mx+2=0\}\subseteq\{x|x^2-3x+2=0\}$,且 $\{x|x^2-mx+2=0\}\neq\varnothing$,求实数 m 的取值组成的集合 M.

解 易得 $\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,对于 $x^2-mx+2=0$,

$\Delta=m^2-8=0$ 时,$x_1=x_2=\frac{m}{2}\neq1$ 或 2.故 $\{x|x^2-mx+2=0\}=\{1,2\}$,此时 $m=3$,得 $M=\{3\}$.

2. 集合的基本运算

基础训练

1. 已知集合 $M=\{(x,y)|x+y=2\}$,$P=\{(x,y)|x-y=4\}$,则 $M\cap P$ 等于 (D)

A. $\{-1,3\}$　　B. $\{3,-1\}$　　C. $\{(-1,3)\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

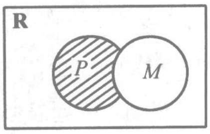
提示 解方程组,得到两条直线的交点坐标.

2. 已知集合 $A=\{x|a-3<x<a+3\}$,$B=\{x|x<-1\text{ 或 }x>2\}$,若 $A\cup B=\mathbf{R}$,则 (B)

A. $a\in[-1,2]$　　B. $a\in(-1,2)$　　C. $a\in[-2,1]$　　D. $a\in(-2,1)$

提示 由 $a-3<-1$ 且 $a+3>2$，解得 $-1<a<2$. 也可借助数轴来解.

3. 设全集为 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x^2>4\}$，$P=\left\{x\middle|\frac{2}{x-1}\geqslant 0\right\}$，则图中阴影部分表示的集合是 (C)



A. $\{x|-2\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x<1\}$

提示 $M=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$，$P=\{x|x>1\}$.

4. 设集合 $A=\{$平行四边形$\}$，$B=\{$对角线相等的四边形$\}$，则 $A\cap B=$ __{矩形}__.

5. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，$B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$ __$\{1,2,5\}$__.

提示 由 $\log_2(a+3)=2$ 得 $a=1$，从而 $b=2$.

6. 设集合 $A=\{(x,y)|y\geqslant|x-2|\}$，$B=\{(x,y)|y\leqslant-|x|+3\}$，则 $A\cap B$ 所表示的图形的面积等于 __$\frac{5}{2}$__.

提示 分别作出 A，B 所表示的平面区域，得 $A\cap B$ 为一矩形，$S=\left(3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}$.

例题精讲

例 1 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|2x-10\geqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-5x\leqslant 0$，且 $x\neq 5\}$. 求 $\complement_U(A\cup B)$ 以及 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

解 $A=\{x|x\geqslant 5\}$，$B=\{x|0\leqslant x<5\}$，则 $A\cup B=\{x|x\geqslant 0\}$. 于是 $\complement_U(A\cup B)=\{x|x<0\}$. 又 $\complement_U A=\{x|x<5\}$，$\complement_U B=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$. 于是 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{x|x<0\}$.

说明 一般地集合有如下性质：$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

例 2 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,a-2,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 $A\cup B$.

解 由 $A\cap B=\{-3\}$ 知，$-3\in B$. 又 $a^2+1\geqslant 1$. 故

① 当 $a-3=-3$ 时，$a=0$，此时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-2,1\}$. $A\cap B\neq\{-3\}$ 时，故 $a=0$ 舍去.

② 当 $2a-1=-3$ 时，$a=-1$，此时 $A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$. 满足 $A\cap B=\{-3\}$，从而 $A\cup B=\{-4,-3,0,1,2,\}$.

说明 由 $-3\in B$ 对 B 的元素进行讨论，注意对 a 的值进行验证，避免增解.

例 3 已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle|\frac{y-3}{x-2}=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{(x,y)|y=ax+2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值.

解 由方程组 $\begin{cases}\frac{y-3}{x-2}=1,\\ y=ax+2,\end{cases}$ 得 $(1-a)x=1$. 当 $a=1$ 时，方程组无解；

当 $a\neq 1$ 时，$x=\frac{1}{1-a}$. 若 $\frac{1}{1-a}=2$，即 $a=\frac{1}{2}$，此时 $x=2$ 为增根，所以方程组也无解.

从而 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

说明 本题可用几何的方法来解. $l_1:y-3=x-2$，$l_2:y=ax+2$，当 $l_1/\!/l_2$ 或 l_1 与 l_2 交于 $(2,3)$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

例 4 已知函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 上至少存在一个实数 c，使 $f(c)>0$，求 p 的取值组成的集合 P.

解 由补集的含义知$\complement_{\mathbf{R}}P=\{p\mid$当$x\in[-1,1]$时$f(x)\leqslant 0$恒成立$\}$. 因为$f(x)$的开口向上,所以$\complement_{\mathbf{R}}P=\{p\mid f(-1)\leqslant 0$且$f(1)\leqslant 0\}$. 由$4+2(p-2)-2p^2-p+1\leqslant 0$且$4-2(p-2)-2p^2-p+1\leqslant 0$,解得$p\leqslant -3$或$p\geqslant \frac{3}{2}$,从而$p=\left\{p\mid -3<x<\frac{3}{2}\right\}$.

说明 本题看似与集合无关,但运用补集的方法使问题解法简单明了. 如果直接分类讨论比较复杂.

巩固练习

1. 下列四个推理:①$a\in A\cup B\Rightarrow a\in A$;②$a\in A\cap B\Rightarrow a\in A\cup B$;③$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$;④$A\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$. 其中正确推理的个数为 (C)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示 ②③④均为正确的推理.

2. 已知集合$P=\{y\mid y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{N}\}$,$Q=\{y\mid y=-x^2+2x-1,x\in\mathbf{N}\}$,则 (B)

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\cap Q=\{-1\}$　　C. $P\cap Q=\{0\}$　　D. $P\cap Q=\mathbf{N}$

提示 注意条件$x\in\mathbf{N}$是关键.

3. 已知集合$A=\{x\mid x=6n-4,n=1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{x\mid x=2^{n-1},n=1,2,3,4,5,6\}$,假定等可能地从$A\cup B$中取出$x$,那么$x\in A\cap B$的概率是$\underline{\ \frac{1}{3}\ }$.

提示 $A\cup B$有9个元素,$A\cap B$有3个元素,$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

4. 若$x,y\in\mathbf{R}$,集合$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,$B=\left\{(x,y)\mid \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,a>0,b>0\right\}$,且$A\cap B$只有一个元素,则$a,b$应满足的关系为$\underline{\ ab=\sqrt{a^2+b^2}\ }$.

提示 坐标原点$(0,0)$到直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$的距离为1.

要点回顾

1. 理解集合运算的含义,会求补集、交集与并集,体会它们都是由给定的两个集合经运算得到的集合,会用文氏图表示集合运算.

2. 注意集合的包含关系与集合的运算的联系,如$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$等.

3. 注意集合与方程、不等式、函数、平面解析几何等知识的联系,在各类集合的运用中提高能力,如例4中巧妙运用补集的思想方法.

参考例题

1. 设$P=\{x\mid x^2-x<0\}$,$Q=\{x\mid |x|<2\}$,则 (B)

A. $P\cap Q=\varnothing$　　B. $P\cap Q=P$　　C. $P\cup Q=P$　　D. $P\cup Q=\mathbf{R}$

解 $P=\{x\mid 0<x<1\}$,$Q=\{x\mid -2<x<2\}$,利用数轴.

2. 集合$S=\{0,1,2,3,4,5\}$,A是S的一个子集. 当$x\in A$时,若$x-1\notin A$,且$x+1\notin A$,则称x为A的一个"孤立元素",那么S中无"孤立元素"的4元子集的个数是 (C)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解　$x\in S$ 时，令 $B=\{x-1,x+1\}$，则 $A=\complement_S B$，满足 $x\in A$，且 $x-1\notin A$，$x+1\notin A$，故这样的 A 共有 6 个，均是 4 元集.

3. 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，选择 I 的两个非空子集 A，B，且 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有　　(B)

A. 50 种　　B. 49 种　　C. 48 种　　D. 47 种

解　设 A 中的最大数为 n，则 $1\leqslant n\leqslant 4$，从而 A 的个数有 2^{n-1} 个，B 的个数有 $2^0+2^1+\cdots+2^{4-n}$，于是共有 $2^0\times(2^3+2^2+2+1)+2\times(2^2+2+1)+2^2\times(2+1)+2^3\times1=49$.

自我测试

1. 满足 $\{1,3\}\cup A=\{1,3,4,5\}$ 的集合 A 的个数是　　(D)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

提示　分 A 为二元素集、三元素集、四元素集讨论和计数.

2. 已知集合 $P=\{y\,|\,y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，$M=\{y\,|\,y=2x-x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap M$ 是　　(D)

A. $\mathbf{R}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{(0,0),(1,1)\}$　　D. $\{y\,|\,0\leqslant y\leqslant 1\}$

提示　$P=\{y\,|\,y\geqslant 0\}$，$M=\{y\,|\,y\leqslant 1\}$.

3. 设 P，Q 为两个非空数集，定义集合 $P+Q=\{a+b\,|\,a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是　　(B)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

提示　因 $0+6=5+1$，故所求元素的个数为 $9-1=8$.

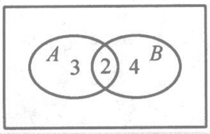
4. 设集合 $A=\{-1,a\}$，$B=\{1,|a|\}$，且 $A\cap B$ 是单元素集，则 $a=$ __0__.

提示　由 $a=|a|$ 得 $a=0$ 或 $a=1$(舍).

5. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $P=\{y\,|\,y=2^{|x|},x\in\mathbf{R}\}$，$M=\{x\,|\,y=\lg(3-x)\}$，则 $(\complement_U P)\cap M=$ __$(-\infty,1)$__.

提示　$P=\{y\,|\,y\geqslant 1\}$，故 $\complement_U P=\{y\,|\,y<1\}$，$M=\{x\,|\,x<3\}$.

6. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，则 $A=$ __$\{2,3\}$__，$B=$ __$\{2,4\}$__.



提示　利用文氏图.

7. 已知集合 $A=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\,|\,x\geqslant m+1$，且 $x\leqslant 2m-1\}$，且 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围.

解　$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

① 若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，即 $m<2$，此时总有 $B\subseteq A$.

② 若 $B\neq\varnothing$，则 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综合①，②知，m 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

8. 某班期中考试，数学优秀率为 70%，语文优秀率为 75%，试确定两门学科都优秀的百分率至少为多少？

解　设班级人数为 100，则两门学科中至少有一门优秀的总人数不大于 100.

由 $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}(A)+\mathrm{Card}(B)-\mathrm{Card}(A\cap B)$，可得 $70+75-\mathrm{Card}(A\cap B)\leqslant 100$，即 $\mathrm{Card}(A\cap B)\geqslant 45$.

故两门学科都优秀的百分率至少为 45% .

9. 若集合 A_1,A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称 (A_1,A_2) 是集合 A 的一个分拆. 当且仅当 $A_1=A_2$ 时，(A_1,A_2) 与 (A_2,A_1) 为同一个分拆. 试分别求 $A=\{a\}$ 时及 $A=\{a,b\}$ 时的分拆总数.

解 (1) 当 $A=\{a\}$ 时，有 $(A,\varnothing)$，$(\varnothing,A)$，(A,A) 三种分拆，此时分拆总数是 3. (2) 当 $A=\{a,b\}$ 时，有 $(A,\varnothing)$，$(\varnothing,A)$，$(A,A)(\{a\},A)$，$(\{a\},\{b\})$，$(\{b\},\{a\})$，$(\{b\},A)$，$(A,\{a\})$，$(A,\{b\})$ 九种分拆，此时分拆总数是 9.

说明 可引导学生探索 n 元集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的分拆总数 3^n.

10. 设 $f(x)=x^2+px+q$，集合 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1) 求证 $A\subseteq B$； (2) 如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

解 (1) 设 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$，从而 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，即 $x_0\in B$，故 $A\subseteq B$.

(2) $A=\{-1,3\}$，即方程 $x^2+px+q=x$ 的两根分别为 $-1,3$，则 $p=-1,q=-3$，所以 $f(x)=x^2-x-3$. 解方程 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$，即 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$. 得 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

3. 命题及其关系

基础训练

1. 下列语句，其中不是命题的是 (D)

A. 对顶角相等 B. 一个集合所有子集的个数不为 3

C. 不等式 $\frac{1}{x}<1$ 的解是 $1<x$ D. $2a<3a$

提示 无法判断 $2a<3a$ 的真假.

2. 命题“若 $a>b$，则 $2a>2b$”的否命题是 (C)

A. 若 $a<b$，则 $2a<2b$ B. 若 $2a>2b$，则 $a>b$

C. 若 $a\leqslant b$，则 $2a\leqslant 2b$ D. 若 $2a\geqslant 2b$，则 $a\geqslant b$

提示 $a>b$ 的否定是 $a\leqslant b$.

3. 下列关于向量的命题中，真命题是 (B)

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ B. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ D. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

提示 向量内积的分配律.

4. 命题“若 $\alpha=\pi-\beta$，则 $\sin\alpha=\sin\beta$”的逆命题是 <u>若 $\sin\alpha=\sin\beta$，则 $\alpha=\pi-\beta$</u>.

5. 一个原命题的逆否命题是“若 $x=1$，则 $x^2-2x<0$”，那么该原命题是 <u>若 $x^2-2x\geqslant 0$，则 $x\neq 1$</u>.

6. 设 a,b 为实数，则使 $ab(a-b)<0$ 成立的一个充要条件是 <u>$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$</u>.

提示 本题答案不惟一，可写出与 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 等价的任一条件.

例题精讲

例 1 判断下列语句是否是命题，若是命题，试判断其真假.

(1) $2x+3<0$；(2) 若 x 是实数，则 $x^2+4x+4\geqslant 0$；(3) a,b 都是无理数，则 $a+b$ 为无理数；(4) 证明 x 是整数；(5) x 是正数吗？(6) 如果 $\alpha>\beta$，那么 $\cos\alpha<\cos\beta$.

解 (1) 不是命题；(2) 是真命题；(3) 是假命题；(4) 不是命题；(5) 不是命题；(6) 是假命题.

说明 可判断真假的语句是命题.(1)是开语句，无法判断真假；(4)是祈使句，(5)是疑问句，都不能判断真假.

例 2 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，命题"若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$"，写出逆命题，判断其真假，并证明你的结论.

解 逆命题为"若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$"，是真命题.

反证 假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，从而 $f(a)<f(-b)$，同理由 $b<-a$ 得 $f(b)<f(-a)$，

从而有 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$ 与已知矛盾. 假设不成立. 从而 $a+b\geqslant 0$.

说明 上述证明过程，证明了"若 $a+b<0$，则 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$"，它是待证命题的逆否命题.

例 3 求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件.

解 当 $a=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$ 符合题意.

当 $a\neq 0$ 时，若方程两根一正一负(没有零根)，即 $\begin{cases}\Delta>0,\\ \frac{1}{a}<0\end{cases}\Leftrightarrow a<0$，

若方程两根均负，即 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\frac{2}{a}<0,\\ \frac{1}{a}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a\leqslant 1$. 综上所述，所求充要条件是 $a\leqslant 1$.

说明 对"至少有一个负根"进行分类讨论. 由于方程没有零根，故只有两类. 方程两根一正一负$\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\Delta>0,\\ \frac{1}{a}<0,\end{cases}$ 符号"$\Leftrightarrow$"有时写成"即"，如果写成"则"，应注意反过来验证.

例 4 已知 $a>0$，命题 p：函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，命题 q：不等式 $|x-2a|+x>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，若 p 和 q 有且仅有一个是真命题，求 a 的取值组成的集合 A.

解 若 p 真，则 $0<a<1$.

若 q 真，则 $a>\frac{1}{2}$ $\left(\text{函数 } y=x+|x-2a| \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上的最小值为 } 2a\text{，由 } 2a>1 \text{ 得 } a>\frac{1}{2}\right)$.

若 p 真 q 假，则 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

若 p 假 q 真，则 $a>1$. 故所求集合 $A=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\frac{1}{2}\text{ 或 }a>1\right\}$.

说明 注意对"p 和 q 有且仅有一个真命题"的理解.