西安交通大學 研究生创新教育系列教材

工程结构动力分析数值方法

陈玲莉 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學

研究生创新教育系列教材

工程结构动力分析数值方法

陈玲莉 编著

西安交通大学出版社
·西 安·

内容提要

本书以工程中大型线性离散结构为主线，重点介绍目前结构动力分析中常用的有效数值方法，例如QR法、Rayleigh-Rize法、子空间迭代法、截断Lanczos法、振型叠加法、Rize向量直接叠加法、Newmark和Wilson-θ直接积分法等。每种方法着重从工程应用观点讲述，力求深入浅出，突出说明方法的理论本质、基本思想及具体计算公式，并分析每种方法优缺点、实用条件、稳定性及精度；同时对工程中出现的二次特征问题(如回转系统、载流管道、非比例阻尼等)常用求解方法(涉及复模态求解)也列为专章介绍，重点说明二次特征问题的特点，左右特征向量的正交性及求解方法，例如广义Lanczos法、广义反迭代法等。书中还介绍了该领域近些年来发展的求结构动力响应的精细时程积分法。

书中配有一些例题、思考讨论题和习题；附录中给出目前求动力响应中应用较多的三种直接积分方法(Wilson-θ法、Newmark法、精细积分法)的计算程序，以方便读者学习和使用。

本书可作为高等工科院校有关专业研究生和高年级大学生的教材或参考书，也可供从事工程结构动力分析、设计、计算软件研制开发的教学和科研的广大教师以及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构动力分析数值方法/陈玲莉编著.—西安：西安交通大学出版社，2006.9

ISBN 7-5605-2283-1

Ⅰ.工…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.工程结构-结构动力分析-数值计算　Ⅳ.TU311.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第097230号

书　名　工程结构动力分析数值方法
编　著　陈玲莉
出版发行　西安交通大学出版社
地　址　西安市兴庆南路25号(邮编：710049)
电　话　(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　刷　陕西友盛印务有限责任公司
字　数　189千字
开　本　727mm×960mm　1/16
印　张　10.625
版　次　2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
书　号　ISBN 7-5605-2283-1/TB·41
定　价　16.00元

总　序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法，把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式，把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，有许多艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前　言

“结构动力分析”课程主要研究大型结构动力分析的数值方法。随着计算机的高速发展与广泛应用，这门学科发展很快，它所研究的理论与方法在航空、航天、土木、运输、能源、化工等工业部门的大型工程结构、机械结构的动力分析和动态设计中得到很好的应用，与之相适应的各种通用软件大量涌现，例如 ANSYS、NASTRAN 等大型分析软件在各相关领域已普遍使用。目前结构动力分析已发展成为振动工程的一个重要分支，其重大的工程实用价值已日益为人们所共识，这门课程已不仅是我校力学专业研究生的一门重要学位课程，同时也是机械、能动学院有关专业研究生的选修课程，且选修人数逐年增加。由于结构动力分析的基本内容、基本方法和有关实用软件目前已是广大科研和工程技术设计人员必需具备的基本知识，因此，迫切需要一本简明实用、系统地介绍目前在结构动力分析中常用有效数值方法的教材，以适应研究生教学与创新教育发展，同时满足从事工程结构动力分析研究人员的实际需要。

目前，国内外该领域教材中也有涉及本书的某些内容，例如《结构有限元分析》、《高等结构动力学》等参考书。但是，由于各种教材侧重点不同，讲述的内容一般比较分散，涉及面较广，因此，篇幅较长，例如有些教材讲述线性代数方面的篇幅较长，有的书介绍结构有限元分析建模篇幅较长，有些书对离散的、连续的、线性、非线性系统均涉及。而本书则是以“工程大型线性离散结构系统”为主线，系统地介绍工程结构动力分析中特征问题和动力响应常用的有效数值方法，因此，内容简明集中，实用性强。学习本书的读者一般应具有线性代数、机械振动方面的基础。

另外，本书除介绍求解大型线性特征问题常用数值方法外，还简要介绍工程实际结构出现的二次特征问题(回转结构、载流管道、非比例阻尼等)的特点和常用求解方法(涉及复模态计算)。同时介绍近些年发展的一些新的常用高精度数值方法，如精细时程积分法等。其次，在章节内容上也做了精细按排，从工程实际问题特性简介到具体求解方法及精度分析，从小型问题到大型问题求解方法均做了较详细介绍，以保证教材的系统性和实用性。

本书内容分 6 章讲述：第 1 章介绍本书涉及的数学基础知识；第 2 章介绍特征问题的有关特性，为理解各种特征问题求解方法打下基础；第 3 章介绍求解工程特征问题的一些基本方法，这些方法常用于求解中小型特征问题，其中某些方法进行巧妙结合后，就可得到求解大型特征问题的方法，即第 4 章的内容；第 5 章介绍工

程结构中常见的二次特征问题(涉及复模态)的特点及有效数值解法;第 6 章介绍求动力响应的常用方法。本书大部分章节内容,作者在近些年研究生教学中已进行多遍讲授,建议使用本书授课时数约为 40～50 学时。

书中部分章节配有一些思考讨论题,附录中给出一些习题和答案、参考文献、计算应用程序等,便于读者学习和参考。

西安交通大学航天航空学院徐健学教授仔细审阅了书稿,提出了许多有益的意见和具体修改建议,特此表示真诚的感谢。同时,感谢曾在本校开设过结构动力分析课程的许庆余教授、徐稼轩教授和现在复旦大学任教的郑铁生教授,本书的编写得益于他们早期的工作。

由于作者水平有限,书中难免有错误和不妥之处,恳请读者批评指正。

作　者

2006 年 8 月

于西安交通大学

目　录

第 1 章　向量和矩阵的有关概念

本书主要研究离散结构动力系统的特征问题和动力响应常用数值求解方法。固有振动分析归结为特征问题,它是受迫振动动力响应分析的基础。本章先阐述向量和矩阵的有关概念和性质。

1.1　向量的内积和正交

1.1.1　线性空间、子空间

• 线性空间　在数学上,常常把实数域和复数域分别记为 R 和 C。实数域(或复数域)上的 n 维向量的全体集合是 n 维线性空间,记为 R^n(或 C^n)。$\boldsymbol{x}\in R^n$(或 C^n)表示 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维实(或复)向量。若 $R^{m\times n}$(或 $C^{m\times n}$)表示实数域(或复数域)上 $m\times n$ 阶矩阵全体集合,它也是线性空间,若 $\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}$(或 $C^{m\times n}$),则表示 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实(或复)矩阵。

例如:若 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times m}$,则 $\boldsymbol{A}^T\in R^{m\times n}$。

• 子空间　设 $m(\leqslant n)$ 个向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in R^n$,由这 m 个向量的任何线性组合所构成的集合

$$\left\{\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \mid \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m\in R\right\}$$

称为 R^n 的由 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m$ 所生成的子空间,记为 $\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m)$,$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m$ 称作生成向量。

特别是当 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m$ 线性无关时,$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m)$是 R^n 的一个 m 维子空间。

1.1.2　向量内积、模和正交

• 向量内积

任意两个向量 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in R^n$,内积定义为

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1-1}$$

我们把 R^n 中定义的内积的集合称为 n 维欧几里德空间(简称欧氏空间),一般记为 R^n。

$n\leqslant 3$ 的欧几里德空间也称为几何空间。

• 内积性质

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(2) $(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$；

(4) $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$。

• 向量的模、夹角和正交

由上述内积的定义和性质，可以引出向量的模以及向量之间的夹角与正交的概念。

定义
$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} \tag{1-2}$$
为向量 $\boldsymbol{x}$ 的模（或者欧几里德范数）。

根据 Cauchy-Schwarz 不等式　$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$

或者　$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2\cdot\|\boldsymbol{y}\|_2$

可定义向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角：
$$\varphi=\arccos\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|_2\cdot\|\boldsymbol{y}\|_2}\quad\text{或}\quad\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|_2\cdot\|\boldsymbol{y}\|_2} \tag{1-3}$$
可见：二向量之间的夹角越小，其相关程度越大；当夹角为零时，二向量相互平行（即二向量线性相关）。

另一方面，若非零向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，内积 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$；反之，若内积 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，夹角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$。这时称向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 相互正交，记为 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$。

特别地，当 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的模都为 1，且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ 时，我们称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 相互规范（归一化）正交。

★ 另外指出：如果在复数域上的 n 维线性空间 C^n 上定义内积
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y}_i \tag{1-4}$$
则 C^n 称为酉空间。$\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}$ 表示 $\boldsymbol{y}$ 的转置共轭，$\overline{y}_i$ 表示 y_i 的共轭。

酉空间 C^n 中内积的性质与 R^n 中性质(1)不同，即 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$

其余 3 条性质完全相同。另外酉空间 C^n 中向量的模、向量间夹角和正交的概念与 R^n 的完全相同，不再赘述。

1.1.3 广义内积、广义模和广义正交

• 广义内积

在工程实际结构动力分析中，通常使用广义加权内积、加权规范化和加权正交的概念，通常权表现为质量矩阵 $\boldsymbol{M}$。

设 $\boldsymbol{M}$ 是正定的质量矩阵，$\boldsymbol{M}\in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$，定义

$$(\boldsymbol{Mx},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Mx} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j y_i \tag{1-5}$$

为 R^n 中向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 关于正定权矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的广义内积，记为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_M$。不难验证，$R^n$ 中内积的 4 条性质对广义内积全部适用，请读者自行验证。

★ 注意：这里权矩阵 $\boldsymbol{M}$ 必须是正定矩阵，否则将不具有这 4 条性质(思考：为什么?)。

• 广义模和广义正交

定义 $$\|\boldsymbol{x}\|_M = (Mx,x)^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})_M^{\frac{1}{2}} \tag{1-6}$$

为向量 $\boldsymbol{x}$ 的广义模。

当 $$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})_M = 0 \tag{1-7}$$

时，称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 广义正交。

m 个向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$，如果两两相互正交，即

$$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j) = 0 \quad 或 \quad (\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j)_M = 0 \quad (i \neq j)$$

则称它们构成了正交组。特别地，若

$$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

或 $$(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j)_M = \delta_{ij} \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

则称它们构成了规范正交组，即所有向量的模为 1 的正交组。

• 向量与子空间正交的概念

设 $\boldsymbol{x} \in R^n$(或 C^n)，S 是 R^n(或 C^n)的一个子空间，如果对于任何 $\boldsymbol{y} \in S$ 都有 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 S 正交。记为 $\boldsymbol{x} \perp S$，由所有正交于 S 的向量全体组成的集合称为 S 的正交补空间，记为 $S^{\perp}$，它也是 R^n 的一个子空间。

例如，设 $S = \mathrm{span}(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_m)$，若 $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}_i (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，则 $\boldsymbol{x} \perp S$。特别地，若 $\boldsymbol{x} \perp R^n$，则 $\boldsymbol{x}$ 是零向量。

1.2　向量的 Gram-Schmidt 正交化方法

相互正交的向量一定是线性无关的，但线性无关的向量却未必相互正交。在实用中，常需要由一组线性无关的向量来构造出另一组相互规范正交的向量，这两组向量具有相同的生成子空间。这种构造过程称为 Gram-Schmidt 规范正交化方法，简称 G－S 正交化方法。

1.2.1 标准 G－S 正交化方法

从最简单的二维情形开始研究，设平面上给定了两个线性无关的向量 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，现在希望由这两个向量产生一组新的向量 $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$，使得它们构成平面上的规

范正交基底(如图 1－1 所示)。具体过程如下:

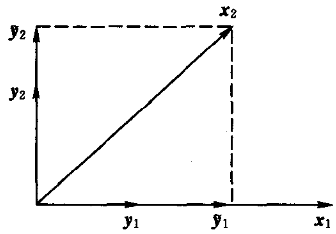

图 1－1

首先把 $\boldsymbol{x}_1$ 规范化,获得单位向量

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|_2} \tag{1-8}$$

然后把向量 $\boldsymbol{x}_2$ 作正交分解

$$\boldsymbol{x}_2=\tilde{\boldsymbol{y}}_1+\tilde{\boldsymbol{y}}_2$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{y}}_1$ 是 $\boldsymbol{x}_2$ 在 $\boldsymbol{y}_1$ 上的投影,因此

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1=(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{y}_1$$

于是 $\tilde{\boldsymbol{y}}_2$ 可惟一表示为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_1)\boldsymbol{y}_1 \tag{1-9}$$

再把 $\tilde{\boldsymbol{y}}_2$ 规范化,即得

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_2\|_2} \tag{1-10}$$

容易验证$(\tilde{\boldsymbol{y}}_2,\ \boldsymbol{y}_1)=0$,即 $\tilde{\boldsymbol{y}}_2$ 一定与 $\boldsymbol{y}_1$ 正交。或者说 $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$ 是由 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 构造出的平面上的规范正交向量组。这种构造过程称为 G－S 正交化方法。

这种构造过程可推广到 n 维情形。

设 $m(\leqslant n)$个 n 维向量 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m$ 相互线性无关,用 G－S 正交化方法产生子空间 $\mathrm{span}(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_m)$上的一组规范正交基底组 $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_m$。

具体过程如下:

(1) 计算第一个向量的模

$$r_{11}=\|\boldsymbol{x}_1\|_2=(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_1)^{\frac{1}{2}} \tag{1-11}$$

把向量 $\boldsymbol{x}$ 规范化,得到

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{\boldsymbol{x}_1}{r_{11}} \tag{1-12}$$

(2) 对 $i=2,\ 3,\ \cdots,\ m$

(ⅰ)对 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$ 计算内积　$r_{ji}=(\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{y}_j)$　(1－13)

(ⅱ) 计算与前 j 个向量$(\boldsymbol{y}_i)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ i-1)$正交的向量

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_i=\boldsymbol{x}_i-\sum_{j=1}^{i-1}r_{ji}\boldsymbol{y}_j \tag{1-14}$$

(ⅲ) 将 $\tilde{\boldsymbol{y}}_i$ 规范化,计算

$$r_{ii}=(\tilde{\boldsymbol{y}}_i,\ \tilde{\boldsymbol{y}}_i)^{\frac{1}{2}} \tag{1-15}$$

$$\boldsymbol{y}_i=\frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_i}{r_{ii}} \tag{1-16}$$

这一过程可以用一个式子加以表述

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} r_{ji} y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{1-17}$$

也可统一写成矩阵的形式

$$X_m = Y_m R_m \tag{1-18}$$

其中

$$X_m \doteq [x_1 x_2 \cdots x_m]$$

$$Y_m = [y_1 y_2 \cdots y_m]$$

$$R_m = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & r_{mm} \end{bmatrix}$$

其中 Y_m 的 m 个列相互规范正交，即　$Y_m^H Y_m = I_m$

R_m 是 m 阶上三角方阵。

特别当 $m=n$ 时，Y_n 是正交方阵，此时式(1-18)称为矩阵 X_n 的 QR 分解。QR 分解在求特征值问题 QR 方法中用到。

1.2.2　修正的 G-S 正交化方法

当给定的向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 中有接近相互平行的向量时，即向量组中有几乎线性相关的向量存在时，标准 G-S 正交化方法的数值稳定性较差，所产生的向量组 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 可能并非正交向量组。为了改进标准 G-S 法的数值稳定性，就产生了所谓修正的 G-S 正交化方法。在理论上，修正的 G-S 方法与标准的 G-S 方法等价，只是当存在舍入误差时(实际应用总存在误差)，两种方法才会有差别。

在标准 G-S 正交化过程中，规范正交向量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是逐步计算出的。具体而言，只有当需要求出 y_i 时，才用到 x_i，在此之前 x_i 不作任何改变。而在修正的 G-S 正交化方法中，每当产生一个新的向量 y_i 后，所有的后续向量 $x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_m$ 都要相应地改变，消去其平行 y_i 的分量，使得它们必须正交于已产生的 $y_1, y_2, \cdots, y_i$。

具体过程如下：

(1)记 $x_i^{(i)} = x_i \quad i=1, 2, \cdots, m$

(2)对 $i=1, 2, \cdots, m$

(ⅰ)计算 $x_i^{(i)}$ 的模　$r_{ii} = (x_i^{(i)}, x_i^{(i)})^{\frac{1}{2}}$　(1-19)

把 $x_i^{(i)}$ 规范化，得到第 i 个规范正交向量　$y_i = \dfrac{x_i^{(i)}}{r_{ii}}$　(1-20)

若 $i=m$ 则过程结束，否则继续下列计算。

（ⅱ）对 $j=i+1, i+2, \cdots, m$ 计算内积

$$r_{ij} = (\boldsymbol{x}_j^{(i)}, \boldsymbol{y}_i) \tag{1-21}$$

消去 $\boldsymbol{x}_j^{(i)}$ 中平行于 $\boldsymbol{y}_i$ 的分量，使它与 $\boldsymbol{y}_i$ 正交

$$\boldsymbol{x}_j^{(i+1)} = \boldsymbol{x}_j^{(i)} - r_{ij}\boldsymbol{y}_i \tag{1-22}$$

上述过程中，向量 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 的产生过程可以示意为

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{x}_1^{(1)}, & \boldsymbol{x}_2^{(1)}, & \boldsymbol{x}_3^{(1)}, & \boldsymbol{x}_4^{(1)}, & \cdots, & \boldsymbol{x}_m^{(1)} \\
\boldsymbol{y}_1, & \boldsymbol{x}_2^{(2)}, & \boldsymbol{x}_3^{(2)}, & \boldsymbol{x}_4^{(2)}, & \cdots, & \boldsymbol{x}_m^{(2)} \\
 & \boldsymbol{y}_2, & \boldsymbol{x}_3^{(3)}, & \boldsymbol{x}_4^{(3)}, & \cdots, & \boldsymbol{x}_m^{(3)} \\
 & & \boldsymbol{y}_3, & \boldsymbol{x}_4^{(4)}, & \cdots, & \boldsymbol{x}_m^{(4)} \\
 & & & \boldsymbol{y}_4 & & \vdots \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & \boldsymbol{y}_m
\end{array}$$

其中处于第 $i+1$ 行上的向量 $\boldsymbol{x}_j^{(i+1)}$（$j=i+1, i+2, \cdots, m$）全部正交于已形成的 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_i$。

最后强调指出，只需把上述两种 G－S 正交化过程中内积的计算改为对正定矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的广义内积，则所产生的向量组 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m$ 是对 $\boldsymbol{M}$ 的广义规范正交的向量组，即

$$(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j)_M = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, m \tag{1-23}$$

这个结果在本书应用中具有重要的意义，因为在结构动力分析中经常用到对质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 加权广义正交的向量组。

1.3 矩阵范数、谱半径、矩阵函数

1.3.1 矩阵范数

• 矩阵范数的定义

如同一个向量的情况一样，有必要用一个纯数来表示一个矩阵的大小，而范数就是这样一种度量。方阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数为一个非负数，用 $\|\boldsymbol{A}\|$ 表示，并满足条件：

(1) 正定性：$\|\boldsymbol{A}\| \geqslant 0$，而且仅当 $\boldsymbol{A}=0$ 时，$\|\boldsymbol{A}\|=0$；

(2) 齐次性：对于任何标量 α，有 $\|\alpha\boldsymbol{A}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{A}\|$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$；

(4) 相容性：$\|\boldsymbol{AB}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|$。

另外，对所有的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和向量 $\boldsymbol{x}$，一个矢量范数及其从属的矩阵范数总是相容的，即

$$\|\boldsymbol{Ax}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$$

• 常用的矩阵范数

设 $\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，从属于向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|_1$，$\|\boldsymbol{x}\|_2$，$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 的矩阵范数分别为

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (1-24)

称为矩阵的 1-范数(列范数)。

(2) $\|\boldsymbol{A}\|_2 = (\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda_n}$ (1-25)

称为矩阵的 2-范数(谱范数)，其中 λ_n 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

(3) $\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (1-26)

称为矩阵的∞-范数(行范数)。

1.3.2 矩阵的谱半径

定义　设 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则称绝对值最大的特征值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径，记为

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| \tag{1-27}$$

从属于向量范数的矩阵范数和谱半径有如下关系

$$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \tag{1-28}$$

证明：这是因为对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 λ_i 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_i$，有如下关系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$$

两端取范数，并考虑矩阵与向量的相容性，有

$$\|\lambda_i\boldsymbol{x}_i\| = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i\|$$

因为　$\|\lambda_i\boldsymbol{x}_i\| = |\lambda_i|\cdot\|\boldsymbol{x}_i\|$，$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{x}_i\|$

所以　$|\lambda_i|\ \|\boldsymbol{x}_i\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{x}_i\|$

两边消去 $\|\boldsymbol{x}_i\|$ 有　$|\lambda_i| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$

故　$\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$

矩阵范数和谱半径的概念在数值计算的误差分析中经常用到。

1.3.3 初等矩阵函数

• 矩阵函数定义

由多项式　$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_k\lambda^k$

可定义 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + a_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + a_k\boldsymbol{A}^k \tag{1-29}$$

它是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的函数，称为矩阵函数。