無綫电理論基础

（訊号通过綫性电路及随机訊号部分）

无綫电系350教研組編

西安交通大學

1962. 5

目　录

第七章　訊号通过綫性網絡

§7.1　訊号通过線性网絡

給定一个綫性网絡，其对 e^{pt} 形式的"稳态"輸入的响应可以从响应函数 $F(p)$ 計算。如輸入是 $\dot{u}_1e^{pt}$ 則响应是

$$\dot{u}_2e^{pt}=F(p)\dot{u}_1e^{pt} \tag{7.1.1}$$

即

$$\dot{u}_2/\dot{u}_1=F(p) \tag{7.1.2}$$

第二章解决了将任意周期性或非周期性訊号分为 e^{pt} 形式的訊号元之和的問題．对綫性电路来說，根据叠加原理，可以将輸入訊号分解为 e^{pt} 形式的分量的和，各别的求得响应，而各别响应之和就是綫性电路对輸入訊号的响应。

广义来說，輸入訊号总是非周期的。訊号可以看为如下积分：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(w)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{7.1.3}$$

其中 $G(\omega)$ 是 $f(t)$ 的頻譜密度：

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{7.1.4}$$

或者

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty}G\left(\frac{p}{j}\right)e^{pt}\,dp \tag{7.1.5}$$

其中

$$G\left(\frac{P}{j}\right)=\int_{-\infty}f(t)e^{-pt}\,dt \tag{7.1.6}$$

7.1.3 式及 7.1.4 式是 $f(t)$ 的 Fourier 变換对，而 7.1.5 式及 7.1.6 式是 $f(t)$ 的广义 Fourier 变換对。

如果 $f(t)$ 在 $t=-\infty$ 区間及 $t=\infty$ 区間之任一不縮減至0，其Fourier变換頻譜密度（7.1.4 式）一般不能求得。如果 $f(t)$ 在 $t=\infty$ 区間不縮減至 0，但增长速度不快于 $e^{\alpha_1 t}$ 而在 $t<0$ 区間以快于 $e^{\alpha_0 t}$ 的速度減至 0，則此 $f(t)$ 的广义 Fourier 变换頻譜密度（7.1.6式）在 $\alpha_1>\alpha_0$ 的条件下是可

以求得的。对于多数起始于 $t=0$ 的 $f(t)$，自然满足后一情况，而可以求得其广义 Fourier 变换频谱密度。对于强制性的使 $f(t)$ 在 $t=0$ 开始的情况，7.1.6 式积分仅在正 t 区間进行，得单边的广义 Fourier 变换频谱密度。如容許广义 Fourier 变换中的广义频率 $p=\alpha+j\omega$ 中的 α 也作为变数，則单边广义 Fourier 变换成为 Laplace 变换。双边的 Fourier 变换对 7.1.5 式及 7.1.6 式具最普遍的意义。在 α_1 等于 0 的情况，即成为狭义的Fourier 变换对。

設訊号將通过的电路具响应函数 $F(t)$，則响应 $f_2(t)$ 將成为

$$f_2(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty}\left[G\left(\frac{p}{j}\right)F(p)\right]e^{pt}dp \qquad 7.1.7$$

这里 $e^{pt}G\left(\frac{p}{j}\right)dp$ 是广义角頻率为 p，譜帶佔寬为 dp 帶內的輸入訊号微分量，$e_{pt}G\left(\frac{p}{j}\right)dp\ F(p)$ 是对应的响应微分量，而积分則是全部响应。$G\left(\frac{p}{j}\right)$ $F(p)$ 是响应 $f_2(t)$ 的广义頻譜密度，称之为 $G_2\left(\frac{p}{j}\right)$:

$$G_2\left(\frac{p}{j}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{pt}\,dt \qquad 7.1.8$$

利用 7.1.6 式及 7.1.7 式求响应函数 $F(p)$ 对 $f(t)$ 的响应 $f_2(t)$ 是基本方法之一。

求解响应函数 $F(p)$ 对 $f(t)$ 的响应的第二个基本方法是利用DuHamel 积分。

假定給定响应函数 $F(p)$ 对的单元跃变函数 $1(t)$ 的时間响应函数是 $h(t)$，輸入的函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时引入。$f(t)$ 可以剖解为許多跃变函数之和，如图 7.1.1 所示。$F(p)$ 对这些跃变函数各发生各别的响应。而响应分量的和为总的响应 $f_2(t)$。$f_2(t)$ 显然等于，

$$f_2(t)=f(0)h(t)+\int_0^t f'(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 7.1.9$$

上式第一項 $f(0)h(t)$ 是 $t=0$ 时的起始跃变 $f(0)1(t)$ 引起的响应。积分号中 $f'(\tau)d\tau.h(t-\tau)$ 是发生在 $t=\tau$ 瞬时的微跃 $f'(\tau)d\tau$ 引起的微响应。积分是將微跃变响应求和。7.1.9 式称为 Du Hamel 积分。应用 Du Hamel 积分沒有条件限制。

如果 $f(t)$ 并不規定在 $t=0$ 瞬时引入，而实质上开始于任意瞬时，則

7.1.9 式可以推广为:

$$f_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad 7.1.9$$

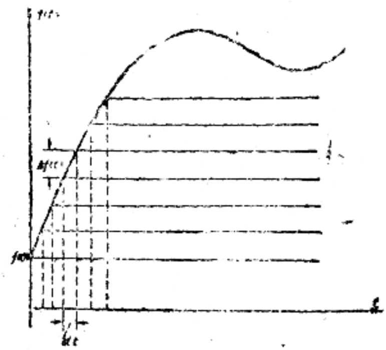


图 7—1—1

7.1.9 式称为推广的 Du Hamel 积分，在一定 意义上它较 7.1.9 式具更普遍的意义。

求解响应函数 $F(p)$对 $f(t)$ 的响应的第三个基本方 法是 利用 Green 函数的积分。Green 函数 $g(t)$ 是响应函数 $F(p)$在 $t=0$ 时受一个单元脉冲 $\delta(t)$驱动所引起的时间响应函数，按 7.1.2 图的概念，可得

$$f_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad 7.1.10$$

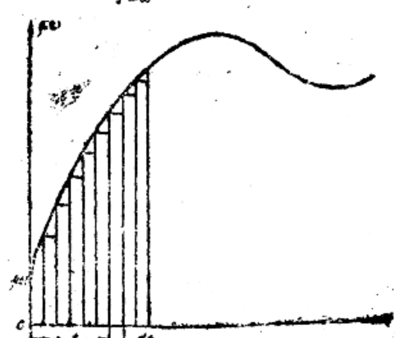


图 7—1—2

式中 $f(\tau)$ 是在 $t=\tau$ 瞬时的 $f(t)$ 值。故 $f(\tau)d\tau\delta(t-\tau)$ 是新生在 $t=\tau$ 的微脈冲。$f(\tau)d\tau g(t-\tau)$ 是对应的微响应，积分是总和响应。积分 7.1.10 之的应用也沒有条件限制。应用三个方法的任一都可求得 $F(p)$ 对 $f(t)$ 的响应 $f_2(t)$。

最多数場合宜于采用第一个方法。

三个方法涉及三个响应函数：$F(p)$，$h(t)$，及 $g(t)$ 三者都是电路的結构及元件值的函数，或实质上是 $F(p)$ 的 0 点及极点位置的函数。

§7.2 微分响应函数 $F(p)=p$。微积分响应函数 $F(p)=\frac{1}{p}$。

如果某响应函数为

$$F(p)=p \tag{7.2.1}$$

則此响应函数的具体結构将如图 7.2.1 所示。电路 7.2.1 包括一个具跨导 $1/L$ 的恆流五极管及一个无耗电感 L，响应（电压）在 L 二端取得。

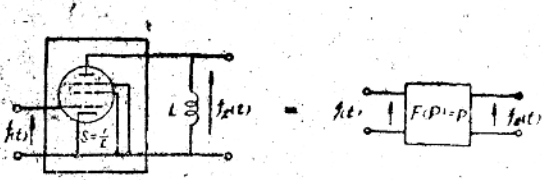


图 7—2—1

对于任意形状的输入电压 $f(t)$，这一电路对它的一般响应电压表示式是：

$$f_2(t)=\frac{df(t)}{dt} \tag{7.2.2}$$

因而，具頻率特性 7.2.1 的响应函数其时間响应特性是一次微分：形式为 p 的响应函数称为微分响应函数。

如果某响应函数为

$$F(p)=\frac{1}{p} \tag{7.2.3}$$

則此响应函数的具体結构将如图 7.2.2所示，包括一个具跨导为 C 的恆流五极管及一个无耗电容 C，响应（电压）在 C 二端取得。

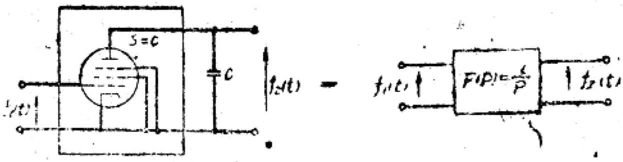


图 7－2－2

对于任意形状的输入电压 $f(t)$，一般的响应电压表示式是

$$f_2(t)=\int^t f_1(t)dt \qquad 7.2.4$$

因而，具频率特性 7.2.3 的响应函数，其时间响应特性是一次积分。形式为 $\frac{1}{p}$ 的响应函数称为积分响应函数。

如果某响应函数为 $F(p)=p$，

显然，如

$$f(t)=1(t) \qquad 7.2.5$$

则

$$\frac{df(t)}{dt}=\delta(t) \qquad 7.2.6$$

即，将单元跃变函数 $1(t)$ 向微分电路输入，将得响应为单元脉冲函数 $\delta(t)$。图 7.2.4－a 示这种关系。

而如果 $F(p)=\frac{1}{p}$

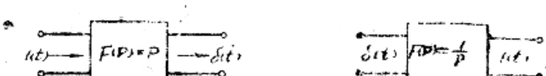
而

$$f(t)=\delta(t) \qquad 7.2.7$$

则

$$\int^t f(t)\,dt=1(t) \qquad 7.2.8$$

即，将单元脉冲函数 $\delta(t)$ 向积分电路输入将得响应为单元跃变函数 $1(t)$。图 7.2.4－b 示这种关系。



(a) (b)

图 7－2－4

当单元脉冲 $\delta(t)$ 向响应函数 $F(p)$ 输入时，所得的时间响应函数为

$g(t)$。由于 $\delta(t)$ 等于 $1(t)$ 通过一个微分响应函数的輸出，故 $\delta(t)$ 向 $F(p)$ 輸入的輸出响应等于 $1(t)$ 向微分响应函数 p 輸入而后輸入至 $F(p)$ 的輸出。即 7.2.5 图的 (a) 的輸出与 (b) 的輸出是一致的。而显然 7.2.5 图 (b) 和 (c) 是完全等效的。(c) 图的輸入 $1(t)$ 經 $F(p)$ 后輸出 $h(t)$，而 $h(t)$ 經微分响应函数 p 后得 $g(t)$ 因而

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \qquad 7.2.9$$

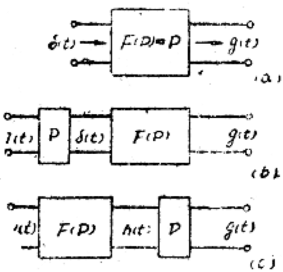


图 7—2—5

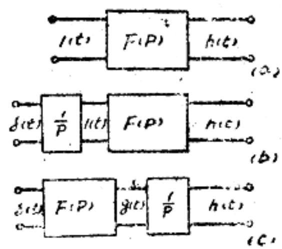


图 7—2—6

当单元跃变函数 $1(t)$ 向 $F(p)$ 輸入时。所得的时間响应函数为 $h(t)$。由于 $1(t)$ 等于 $\delta(t)$ 通过一个积分响应函数的輸出，故 $1(t)$ 向 $F(p)$ 輸入的輸出响应等于 $\delta(t)$ 向积分响应函数 $1/p$ 輸入而后輸入至 $F(p)$ 的輸出。即 7.2.6 图的 (a) 的輸出与 (b) 的輸出是一致的。而显然。7.2.5 图 (b) 和 (c) 是完全等效的。(c) 图的輸入 $\delta(t)$ 經 $F(p)$ 后輸出 $g(t)$，而 $g(t)$ 經积分响应函数 $1/p$ 后得 $h(t)$。因而

$$\int^{t} g(t)dt = h(t) \qquad 7.2.10$$

7.2.10 式就是 7.2.9 式。于是，得結論：一个响应函数的时間相之一的单元脈冲响应函数 $g(t)$ 是对应单元跃变响应函数 $h(t)$ 的微分，而 $h(t)$ 是 $g(t)$ 的积分。这是响应函数 $F(p)$。$g(t)$ 及 $h(t)$ 三者关系中的第一方面。

§7.3 时間相响应函数 $h(t)$ 及 $g(t)$ 与頻率相响应函数 $F(p)$ 的关系。$F(p)$ 的极点和特征振盪。

頻率相响应函数 $F(p)$ 可以是入端响应函数，也可以是轉移响应函数。

时間相响应函数 $h(t)$ 及 $g(t)$ 同样也可以是入端响应函数，也可以是傳移响应函数。

$F(p)$，$h(t)$ 及 $g(t)$ 三个响应函数，是全部共同由 $F(p)$ 的 0 点及极点在 p 平面上的分布决定的。$F(p)$ 的 0 点及极点的位置則决定定于电路的結构及元件值。

跃变响应函数 $h(t)$ 是 $F(p)$ 对特殊形式的輸入 $f(t)=1(t)$ 的輸出响应。

因单元跃变函数 $1(t)$ 的頻譜密度函数是

$$G\left(\frac{p}{j}\right)=\frac{1}{p} \qquad 7.3.1$$

因而，$h(t)$ 得写为

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty} F(p)\cdot\frac{1}{p}e^{pt}\,dp \qquad 7.3.2$$

显然积分 7.2.2 是 $F(p)$ 的 0 点及极点的位置的函数。

脈冲响应函数 $g(t)$ 是 $F(p)$ 对特殊形式的輸入 $f(t)=\delta(t)$ 的輸出响应。

今单元脈冲函数 $\delta(t)$ 的頻譜密度函数是

$$G(p/j)=1 \qquad 7.3.3$$

因而

$$g(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp \qquad 7.3.4$$

$g(t)$ 显然是 $F(p)$ 的 0 点及对时間极点的函数。

如果将 7.3.2 式微分，其右方将成为

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp$$

是即 7.3.4 式的右方。因而，再度得知：

$$g(t)=\frac{dh(t)}{dt} \qquad 7.3.5$$

肯定了 7.2.9 式。

比較 7.3.2 式及 7.3.4 积分，前者比后者多一个被积函数因子 $1/p$，因而在一定意义上，7.3.4 式积分可能較 7.3.2 式积分为簡单。而按 7.2.10 式关系，可得

$$h(t)=\int^{t}\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty}F(p)e^{pt}\,dp\,dt \qquad 7.3.6$$

求得 $h(t)$ 的路径可以是 7.3.2 式，也可以是 7.3.6 式。

由 7.3.4 式可得 $F(p)$ 作为 $g(t)$ 的函数为：

$$F(p)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-pt}dt \qquad 7.3.7$$

在已知脉冲响应函数 $g(t)$ 的情况下，可利用 7.3.7 式求得 $F(p)$；

而按 7.3.2 式，可得 $F(p)$ 作为 $h(t)$ 的函数为：

$$\frac{F(p)}{p}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-pt}dt$$

即

$$F(p)=p\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-pt}dt \qquad 7.3.8$$

在已知跃变响应函数 $h(t)$ 的情况下，可以利用 7.3.8 式求得 $F(p)$。

当利用 7.3.2 式，7.3.4 式，7.3.6 式从 $F(p)$ 求 $g(t)$ 或 $h(t)$ 时，应用 Cauchy 留数定理。

对于任一个电路，要求得其各种响应函数，往往从 $F(p)$ 开始。因为 $F(p)$ 的求得可以用第四章的方法，仅涉及简单的行列式演算。

按第四章的讨論，任意線性电路的响应函数，形式必是 p 的有理分式。分子是 p 的共轭解析多项式 $A(p)$，分母是 p 的共轭介析多项式 $B(p)$：

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots\cdots a_mp^m}{b_0+b_1p+b_2p^2+\cdots\cdots b_np^n} \qquad 7.3.9$$

从分子抽出 a_m 系数，从分母抽出 b_n 系数，得：

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_m}{b_n}\frac{p^m+\frac{a_{m-1}}{a_m}p^{m-1}+\cdots\cdots\frac{a_0}{a_m}}{p_n+\frac{b_{n-1}}{b_n}p^{n-1}+\cdots\cdots\frac{b_0}{b_n}} \qquad 7.3.10$$

分母多项式得分介为因子乘积：

$$p^n+\frac{b_{n-1}}{b_n}p^{n-1}+\cdots\cdots+\frac{b_0}{b_n}=(p-p_1)(p-p_2)\cdots\cdots(p-p_n). \qquad 7.3.11$$

p_1、p_2……p_n 等为分母多项式 $B(p)$ 的根。是为 $F(p)$ 的极点所在。$F(p)$ 的各极点或是純实数，或是复数而共轭成对。

如果 $B(p)$ 沒有重根，而 $n>m$，则 $F(p)$ 可以展开为部分分式如下：

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_m}{b_n}\left[\frac{C_1}{p-p_1}+\frac{C_2}{p-p_2}+\cdots\cdots+\frac{C_n}{p-p_n}\right] \qquad 7.3.12$$

其中系数 c_i 显然是

$$c_i=\frac{b_n F(p)(p-p_i)}{a_m}\bigg|_{p=pi}=\frac{b_n A(p)(p-p_i)}{a_m B(p)}\bigg|_{p=pi} \qquad 7.3.13$$

7.3.13 式分子中的 $(p-p_i)$ 因子将与分母中 $B(p)$ 中的同一因子消去，以 $p=p_i$ 代入即求得 c_i。

但是如果演算过程中不能明显的将（7.3.13 式中的）分子的 $(p-p_i)$ 因子与 $B(p)$ 中同一因子消去，则 c_i 将具 0/0 的不定形式。在这种情形，应用 L'Hospital 定则，可以求得 c_i 为

$$c_i=\frac{b_n A(p)}{a_m B'(p)}\bigg|_{p=pi} \qquad 7.3.14$$

如果 $F(p)$ 具有重阶极点，即 $B(p)$ 具有重阶 0 点，而 $n>m$，则 $F(p)$ 的部分分式展开将成为：

$$F(p)=\frac{a_n}{b_n}\Big[\frac{c_{11}}{(p-p_1)}+\frac{c_{12}}{(p-p_1)^2}+\cdots\cdots\frac{c_{21}}{(p-p_2)}+$$

$$+\frac{c_{22}}{(p-p_2)^2}+\cdots\cdots\frac{c_{n1}}{(p-p_n)}+\frac{c_{n2}}{(p-p_n)^2}+\cdots\cdots\Big] \qquad 7.3.15$$

如果 p_i 是 l 阶极点，则与 p_i 有关的项计为

$$\frac{c_{i1}}{(p-p_i)}+\frac{c_{i2}}{(p-p_i)^2}+\cdots\cdots+\frac{c_{il}}{(p-p_i)^l}$$

其中系数 c_{il} 显然可以按下式求得：

$$c_{il}=\Big[(p-p_i)^l F(p)\frac{b_n}{a_m}\Big]_{p=pi} \qquad 7.3.16$$

而 $c_{i(l-1)}$ 为

$$c_i(l-1)=\frac{1}{\underline{|1}}\frac{d}{dp}\Big[(p-p_i)^l F(p)\Big]_{p=pi}\frac{b_n}{a_m} \qquad 7.3.17$$

依次 $c_i(l-2)$ 为

$$c_{i(l-2)}=\frac{1}{\underline{|2}}\frac{d^2}{dp^2}\Big[(p-p_i)^l F(p)\Big]_{p=pi}\frac{b_n}{a_m}，等等$$

如果演算过程中不能明显的将 7.3.16 式，7.3.17 式等分母中的 $(p-p_i)$ 因子与分子中的 $(p-p_i)$ 因子約去，则各 c_{il}，$c_{i(l-1)}$……等将具 0/0 的不定形式。

遇到这种情况也可以应用 L'Hospital 定則。

按照留数定理，一个迴綫积分

$$\oint_c \frac{f(p)}{p-p_i}dp$$

在迴綫 c 包括 p_i 但不包括 $f(p)$ 的极点的条件下，此积分等于：

$$\oint_c \frac{f(p)}{p-p_i}dp = 2\pi j f(p_i) \qquad 7.3.18$$

按 7.3.4 式，$F(p)$ 响应函数的对应脉冲响应函数：

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad (7.3.4)$$

而在 $F(p)$ 仅包括一阶极点的情形，以 7.3.12 式代入上式，得

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} \frac{a_m}{b_n}\left[\frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{p-p_n}\right]e^{pt}dp \qquad 7.3.19$$

或在 $F(p)$ 包括高阶极点的情形，以 7.3.15 式代入，得

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} \frac{a_m}{b_n}\left[\frac{c_{11}}{(p-p_1)} + \frac{c_{12}}{(p-p_1)^2} + \cdots\cdots \frac{c_{21}}{(p-p_2)}\right.$$

$$\left. + \frac{c_{22}}{(p-p_2)^2} + \cdots\cdots + \frac{c_{n1}}{(p-p_n)} + \frac{c_{n2}}{(p-p_n)^2} + \cdots\cdots\right]e^{pt}dp \qquad 7.3.20$$

系数 c_1、$c_2\cdots\cdots$ 及 c_{11}、$c_{12}\cdots\cdots$ c_{21}、$c_{22}\cdots\cdots$ 等由 7.3.13、7.3.14、7.3.16 7.3.17 式确定。

根据 Jordan 辅助定理，如果 $F(p)$ 在 $|p|\to\infty$ 时趋于 0，同时如果积分路徑上 pt 的实部为有限正数或任意的小于 0 的值，则积分

$$\int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} F(p)e^{pt}dp = \int_{\alpha_1 - j\infty}^{\alpha_1 + j\infty} F(p)e^{pt}dp + \int_{\alpha_1 + j\infty}^{\alpha_1 - j\infty} F(p)e^{pt}dp\Bigg|_{c_1,\ c_2} \qquad 7.3.21$$

即将与将积分路徑补充 c_1 而扩充至包括全部 $(\alpha_1 - j\infty)$ 至 $(\alpha_1 + j\infty)$ 以左的 p 平面（对于 $t>0$ 而言）的迴綫积分值，或将积分路徑补充 c_2 而扩充至包括全部 $(\alpha_1 - j\infty)$ 至 $(\alpha_1 + j\infty)$ 以右的 p 平面（对于 $t<0$ 而言）的迴綫积分值一致。（图 7.3.1 示这种关系）。这样，在 p 平面上的迴綫积分可以用 Caucy 留数定理（7.3.18 式）求得。按此，7.3.19 式，即当 $F(p)$ 仅包括一阶极点时，成为：

$$g(t) = \frac{a_m}{b_n}\left[c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots\cdots c_n e^{p_n t}\right] \qquad 7.3.22$$

由于$F(p)$的全部极点只可能在p平面左半面，故7.3.22式括号中各$c_i e^{p_i t}$项包括全部的7.3.19式的括号因子中的每一$\frac{c_i}{p-p_i}$项的对应积分项。而

$$g(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.23$$

同样，按Jordan輔助定理，得7.3.20式为，(当$F(p)$有高阶极点时)：

$$g(t)\frac{a_m}{b_n}\Big[(c_{11}+\frac{c_{12}}{\lfloor 1}t+\frac{c_{13}}{\lfloor 2}t^2+\cdots+$$

$$+\frac{c_{1l}}{\lfloor l-1}t^{(l-1)}e^{p_1 t}+(c_{21}+\frac{c_{22}}{\lfloor 1}t+\frac{c_{23}}{\lfloor 2}t^2+$$

$$+\cdots+\frac{c_{2l'}}{\lfloor l'-1}t^{(l'-1)})e^{p_2 t}+\cdots\Big]_{t>0} \qquad 7.3.24$$

$$g(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.25$$

注意式7.3.22式$g(t)$及7.3.24式$g(t)$均是$e^{p_i t}$形式的振盪的和。每一$F(p)$的极点p_i均有一对应的振盪项。因此，各振盪$e^{p_i t}$被称为响应函数$g(t)$的特征振盪，而各振盪的(复数角)频率p_i各称为特征(角)频率。各特征頻率正就是$F(p)$各极点的各p值。稳定的$F(p)$的极点的必在p平面左半面的必然性质决定$g(t)$的各特征振盪的必然非增幅性。

当求得一个系統的脈冲响应函数$g(t)$后。将$g(t)$加以一次积分便得跃变响应函数$h(t)$。按7.3.22式及7.3.23式，当$F(p)$无高阶极点的情形：

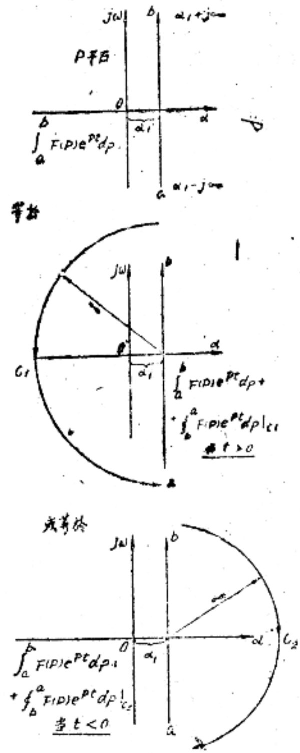


图 7—3—1

$$h(t)=\frac{a_m}{b_n}\Big[\frac{c_1}{p_1}e^{p_1 t}+\frac{c_2}{p_2}e^{p_2 t}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{p_n}e^{p_n t}\Big]_{t>0} \qquad 7.3.26$$

$$h(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.27$$

按 7.3.24 及 7.3.25 式，当 $F(p)$ 有高阶极点的情形：

$$h(t)=\frac{a_m}{b_n}\Big[\Big(\frac{c_{11}}{p_1}e^{p_1t}+\frac{c_{12}}{\lfloor 1}\int^t te^{p_1t}dt+\frac{c_{13}}{\lfloor 2}\cdot$$

$$\cdot\int^t t^2e^{p_1t}dt+\cdots+\frac{c_{1l}}{\lfloor l'-1}\int^t t^{(l-1)}e^{p_1t}dt\Big)+\Big(\frac{c_{21}}{p_2}e^{p_2t}+$$

$$+\frac{c_{22}}{\lfloor 1}\int^t te^{p_2t}dt+\frac{c_{23}}{\lfloor 2}\int^t t^2e^{p_2t}dt+\cdots+\frac{c_{2l'}}{\lfloor l'-1}\cdot$$

$$\cdot\int^t t^{(l'-1)}e^{p_2t}dt\Big)+\cdots\cdots\Big]_{t>0} \qquad 7.3.28$$

$$h(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.29$$

从 7.3.28 式可見，当 $F(p)$ 具高阶极点时，从 $g(t)$ 求 $h(t)$ 是一个复杂的途徑。因而在 $F(p)$ 具高阶极点的情形，$h(t)$ 宜按 7.3.2 式計算。7.3.2 式积分与 7.3.4 式积分的区别，在于前者被积函数在 p 平面的原点上多一个一阶极点。在 $F(p)$ 无高阶极点的情况按 7.3.12 式的展开方法，被积函数是：

$$\frac{F(p)}{p}=\frac{A(p)}{pB(p)}=\frac{a_m}{b_n}\Big[\frac{c_0}{p-p_0}+\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{c_n}{p-p_n}\Big] \qquad 7.3.30$$

其中

$$p_0=0 \qquad 7.3.31$$

而

$$c_i=\frac{b_nF(p)(p-p_i)}{a_mp}\Big|_{p=p_i}=\frac{b_nA(p)(p-p_i)}{a_mpB(p)}\Big|_{p=p_i} \qquad 7.3.32$$

或

$$c_i=\frac{b_nA(p)}{pa_mB'(p)}\Big|_{p=p_i} \qquad 7.3.33$$

得

$$h(t)=\frac{a_m}{b_n}\Big[c_0+c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}+\cdots\cdots+c_ne^{p_nt}\Big]_{t>0} \qquad 7.3.34$$

$$h(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.35$$

故

$$g(t)=\frac{a_m}{b_n}\Big[p_1c_1e^{p_1t}+p_2c_2e^{p_2t}+\cdots p_nc_ne^{p_nt}\Big]_{t>0} \qquad 7.3.36$$

$$g(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.37$$

当 $F(p)$ 具有重阶极点时。按 7.3.15 式的展开方法，被积函数是为：

$$\frac{F(p)}{p}=\frac{A(p)}{pB(p)}=\frac{a_n}{b_n}\Big[\Big(\frac{c_0}{p-p_0}\Big)+\Big(\frac{c_{11}}{p-p_1}+\frac{c_{12}}{(p-p_1)^2}+\cdots\cdots\Big)+$$

$$+\Big(\frac{c_{21}}{(p-p_2)}+\frac{c_{22}}{(p-p_2)^2}+\cdots\Big)+\Big(\frac{c_{n1}}{p-p_n}+\frac{c_{n2}}{(p-p_2)^2}+\cdots\Big)\Big] \qquad 7.3.38$$

其中
$$p_0=0 \qquad 7.3.39$$

而
$$c_{il}=\Big[(p-p_i)^l\frac{F(p)}{p}\frac{b_n}{a_m}\Big]_{p=p_i}$$

$$c_{i(l-1)}=\frac{1}{\lfloor 1}\frac{d}{dp}\Big[(p-p_i)^l\frac{F(p)}{p}\frac{b_n}{a_m}\Big]_{p=p_i} \qquad 7.3.40$$

$$c_{i(l-2)}=\frac{1}{\lfloor 2}\frac{d^2}{dp^2}\Big[(p-p_i)^l\frac{F(p)}{p}\frac{b_n}{a_m}\Big]_{p=p_i}$$

最后得

$$h(t)=\frac{a_n}{b_n}\Big[c_0+\Big(c_{11}+\frac{c_{12}}{\lfloor 1}t+\frac{c_{13}}{\lfloor 2}t^2+\cdots+\frac{c_{1l}}{\lfloor l-1}t^{(l-1)}\Big)e^{p_1t}+$$

$$+\Big(\frac{c_{21}}{\lfloor 0}+\frac{c_{22}}{\lfloor 1}t+\frac{c_{23}}{\lfloor 2}t^2+\cdots+\frac{c_{2l'}}{\lfloor l'-1}t^{(l'-1)}\Big)e^{p_2t}+\cdots\Big]_{t>0} \qquad 7.3.41$$

$$h(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.42$$

$$g(t)=\frac{a_m}{b_n}\Big[\Big(p_1c_{11}e^{p_1t}+\frac{c_{12}}{\lfloor 1}\frac{d}{dt}(te^{p_1t})+\frac{c_{13}}{\lfloor 2}\frac{d}{dt}(t^2e^{p_1t})+\cdots\Big)$$

$$+\Big(p_2c_{21}e^{p_2t}+\frac{c_{22}}{\lfloor 1}\frac{d}{dt}(te^{p_2t})+\frac{c_{23}}{\lfloor 2}\frac{d}{dt}(t^2e^{p_2t})+\cdots\Big)+\cdots\Big]_{t>0} \qquad 7.3.43$$

$$g(t)=0\Big|_{t<0} \qquad 7.3.44$$

对稳定的无源系統来說，如果 $F(p)$ 的 0 点数少于极点数，按 Jordan 輔助定理，7.3.21 式关系是成立的。在这样的条件下，$F(p)$ 的对应 $g(t)$ 可按 7.3.16、7.3.17、7.3.22、7.3.23、7.3.24、7.3.25 求得。但是如果 $F(p)$ 的 0 点数等于极点数，按 Jordan 輔助定理 7.3.21 式就不成立。在这样的条件下，$F(p)$ 的对应 $g(t)$ 便不能按 7.3.16、7.3.17、7.3.22、7.3.23、7.3.24、7.3.25 各式求得。在这一情况下此 $F(p)$ 的对应的 $h(t)$ 却是可以按 7.3.32、7.3.33、7.3.34、7.3.35、7.3.40、7.3.41、7.3.42 各式求得。因为求得 $h(t)$ 过程中对 $F(p)$ 乘入因子 $1/p$，无穷积分 7.3.2 式的被积函数

因 $1/p$ 因子而降低一阶，可以满足 Jordau 辅助定理所要求的无穷积分轉化为迴綫积分的条件。

当 $F(p)$ 的 0 点数以 1 多于极点数时，$F(p)$ 可通过除法展开为一个微分响应函数与一个常数响应函数与一个 0 点数少于极点数的响应函数之和，可以分别求得各别的 $g(t)$ 及 $h(t)$，而后合成得总和 $g(t)$ 及 $h(t)$。在工程上，由于分布电容以及引綫电感等不可能避免，絕对严格的微分轉移响应函数是不可能实現的，而絕对严格的微分入端响应函数也只有在絕对 0 的电源内阻或絕对恆流电源的情况下才可能，故而一般不遇到 0 点数多于极点数的响应函数。一般 0 点数至多等于极点数，例如在阶节的情形。因而，一般 $F(p)$ 响应函数的对应时間响应函数 $g(t)$ 及 $h(t)$ 至少可以用 7.3.40、7.3.41、7.3.42、7.3.43 及 7.3.44 各式求得。

§7.4 $F(p)$ 的极点及 0 点位置与 $g(t)$ 以及 $h(t)$ 的特征振盪起始振幅的关系。同一网絡的同类响应函数的共同点。

一个 $F(p)$ 的全部极点完全确定对应的 $g(t)$（以及 $h(t)$）具有的特征振盪的广义频率，而一个 $F(p)$ 的全部极点及全部 0 点共同完全确定对应 $g(t)$（以及 $h(t)$）的各特征振盪的起始振幅。

給定一个 $F(p)$ 后，其 $g(t)$ 是

$$g(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty} F(p)e^{pt}dp \qquad 7.4.1$$

将有理分式 $F(p)$ 写为因子乘积的形式：

$$g(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty}\frac{a_m}{b_n}\,\frac{(p-p_1')(p-p_2')\cdots(p-p_m')}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}e^{pt}dp \qquad 7.4.2$$

利用部分分式展开：

$$g(t)=\frac{\frac{a_m}{b_n}}{2\pi j}\int_{\alpha_1-j\infty}^{\alpha_1+j\infty}\left(\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{c_n}{p-p_n}\right)e^{pt}\,dp=$$

$$=\frac{a_m/b_n}{2\pi j}\left[c_1e^{p_1t}+c_2e^{p_2t}+\cdots+c_ne^{p_nt}\right] \qquad 7.4.3$$

按 7.3.13 并考虑到

$$F(p)=\frac{a_m}{b_n}\,\frac{(p-p_1')(p-p_2')\cdots(p-p_m')}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}$$