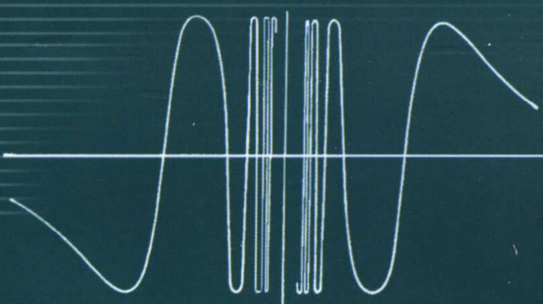
高等学校通用教材

高等数学

（上册）

罗贤强　陈怀琴　主编



GAODENG SHUXUE

北京航空航天大学出版社

高等学校通用教材

013
360
:1

高等数学

（上册）

罗贤强　陈怀琴　主编

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书根据作者多年的教学实践，结合化学、生物和医学等专业高等数学课程的基本要求以及教育部颁布的2005年研究生入学考试数学二和数学三的《考试大纲》编写而成。

本书分为上下两册，上册内容侧重于一元函数的微积分，并介绍了无穷级数、多元函数的微积分和微分方程。

本书结构严谨，逻辑清晰，取材适当，而且便于教学，可供高等学校理工科学生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/罗贤强等主编. —北京:北京航空航天大学出版社,2006.9

ISBN 7-81077-805-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①罗…②陈 Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第090970号

高等数学(上册)

罗贤强　陈怀琴　主编

责任编辑　李文轶

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083)　发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn　E-mail:bhpress@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×960　1/16　印张:18　字数:403千字

2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷　印数:4 000册

ISBN 7-81077-805-6　定价:24.00元

前 言

本书是根据作者多年的教学实践，结合化学、生物和医学等专业高等数学课程的基本要求以及教育部颁布的2005年研究生入学考试数学二和数学三的《考试大纲》编写而成。编写时力求做到深入浅出，注重基本概念和基本方法的讲解，取材适当，便于教学。

本书分上下两册，上册包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数微积分与常微分方程等8章；下册包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、特征值特征向量及相似矩阵、随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、参数估计以及假设检验等11章。每章配有一定数量的习题，并且书末附有答案。

本书由罗贤强、陈怀琴任主编，龙小胖、刘荣玄、王文华、张亮、吴高翔和鲁洁任副主编。其中，各章执笔人分别是：鲁洁(第1,2章)；吴高翔(第3章，第5章的5.5～5.7)；龙小胖(第4章，第5章的5.1～5.4)；罗贤强(第6,7,8章)；陈怀琴(第9,10,11,12,13章)；王文华(第14,15章)；刘荣玄(第16,17章)；张亮(第18,19章)。最后，上册由罗贤强统纂定稿，下册由陈怀琴统纂定稿。

本书在编写过程中参考了众多国内现有同类教材(见参考文献)，同时得到了井冈山学院领导及北京航空航天大学出版社的大力支持，对此表示衷心感谢。

限于作者水平，不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2006年6月

目 录

第 1 章　函数与极限

1.1　函　数 …… 1
1.1.1　区间与邻域 …… 1
1.1.2　函数的概念 …… 1
1.1.3　函数的特性 …… 3
1.1.4　反函数与复合函数 …… 4
1.1.5　初等函数 …… 6
习题 1.1 …… 6
1.2　数列极限 …… 7
1.2.1　数列极限的定义 …… 7
1.2.2　收敛数列的性质 …… 9
习题 1.2 …… 12
1.3　函数极限 …… 13
1.3.1　x 趋于 ∞ 时的函数极限 …… 13
1.3.2　x 趋于 x_0 时的函数极限 …… 14
1.3.3　函数极限的性质 …… 18
习题 1.3 …… 20
1.4　无穷小与无穷大 …… 21
1.4.1　无穷小量 …… 21
1.4.2　无穷大量 …… 22
习题 1.4 …… 23
1.5　两个重要极限 …… 23
习题 1.5 …… 26
1.6　无穷小量阶的比较 …… 27
习题 1.6 …… 28
1.7　函数的连续性 …… 29
1.7.1　函数连续性的概念 …… 29
1.7.2　间断点及其类型 …… 30

1.7.3 连续函数的运算 …… 31
1.7.4 闭区间上连续函数的基本性质 …… 32
1.7.5 初等函数的连续性 …… 34
习题 1.7 …… 34
总习题一 …… 35

第 2 章 导数与微分

2.1 导数的概念 …… 37
2.1.1 导数的定义 …… 37
2.1.2 导数的几何意义 …… 39
2.1.3 导函数 …… 40
2.1.4 函数可导性与连续性的关系 …… 41
习题 2.1 …… 41
2.2 求导法则 …… 42
2.2.1 导数的四则运算 …… 42
2.2.2 反函数的导数 …… 44
2.2.3 复合函数的导数 …… 45
2.2.4 求导公式 …… 46
习题 2.2 …… 47
2.3 高阶导数 …… 48
习题 2.3 …… 50
2.4 隐函数和参变量函数的导数 …… 51
2.4.1 隐函数的导数 …… 51
2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 …… 52
习题 2.4 …… 54
2.5 微 分 …… 55
2.5.1 微分的概念 …… 55
2.5.2 微分的几何意义 …… 56
2.5.3 微分的运算法则 …… 57
2.5.4 微分在近似运算中的应用 …… 58
习题 2.5 …… 59
总习题二 …… 59

第 3 章　微分中值定理与导数的应用

3.1　中值定理 …… 61
3.1.1　罗尔定理 …… 61
3.1.2　拉格朗日中值定理 …… 63
3.1.3　柯西中值定理 …… 65
习题 3.1 …… 66
3.2　洛必达法则 …… 67
3.2.1　$\frac{0}{0}$型未定式 …… 67
3.2.2　$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 69
3.2.3　其他类型未定式 …… 69
习题 3.2 …… 71
3.3　泰勒公式 …… 72
习题 3.3 …… 74
3.4　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 75
3.4.1　函数的单调性 …… 75
3.4.2　曲线的凹凸性与拐点 …… 77
习题 3.4 …… 78
3.5　函数的极值及其求法 …… 79
习题 3.5 …… 82
3.6　函数的最大值、最小值 …… 83
习题 3.6 …… 85
3.7　函数图形的描绘 …… 85
习题 3.7 …… 89
3.8　曲　率 …… 89
习题 3.8 …… 91
总习题三 …… 92

第 4 章　不定积分

4.1　不定积分的概念和性质 …… 94
4.1.1　原函数 …… 94
4.1.2　不定积分 …… 94

4.1.3 不定积分的性质 …… 96
4.1.4 基本积分公式 …… 96
习题 4.1 …… 98
4.2 换元积分法 …… 99
4.2.1 第一换元法 …… 99
4.2.2 第二换元法 …… 102
习题 4.2 …… 105
4.3 分部积分法 …… 106
习题 4.3 …… 109
4.4 有理函数的积分 …… 109
4.4.1 有理函数的积分 …… 109
4.4.2 可化为有理函数的积分 …… 114
习题 4.4 …… 116
4.5 积分表的使用 …… 116
习题 4.5 …… 118
总习题四 …… 118

第 5 章 定积分

5.1 定积分的概念 …… 120
5.1.1 实 例 …… 120
5.1.2 定积分的概念 …… 122
习题 5.1 …… 123
5.2 定积分的性质 …… 124
习题 5.2 …… 127
5.3 微积分基本定理 …… 127
5.3.1 变上限的定积分和原函数存在定理 …… 128
5.3.2 微积分基本定理 …… 129
习题 5.3 …… 131
5.4 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 131
5.4.1 换元积分法 …… 131
5.4.2 分部积分法 …… 134
习题 5.4 …… 136
5.5 广义积分 …… 137
5.5.1 无穷区间上的广义积分 …… 137

5.5.2　无界函数的广义积分 …… 139
习题 5.5 …… 141
5.6　定积分的几何应用 …… 141
5.6.1　平面图形的面积 …… 141
5.6.2　体　积 …… 146
5.6.3　平面曲线的弧长 …… 148
习题 5.6 …… 151
5.7　定积分在物理上的应用 …… 152
5.7.1　变力所作的功 …… 152
5.7.2　平均值 …… 153
习题 5.7 …… 154
总习题五 …… 155

第 6 章　无穷级数

6.1　常数项级数的概念与性质 …… 158
6.1.1　常数项级数的概念 …… 158
6.1.2　收敛级数的基本性质 …… 160
习题 6.1 …… 162
6.2　常数项级数的审敛法 …… 163
6.2.1　正项级数及其审敛法 …… 163
6.2.2　交错级数及其审敛法 …… 167
6.2.3　绝对收敛与条件收敛 …… 168
习题 6.2 …… 169
6.3　幂级数 …… 170
6.3.1　幂级数及其收敛半径 …… 170
6.3.2　幂级数的运算 …… 173
习题 6.3 …… 175
6.4　函数展开成幂级数 …… 175
6.4.1　泰勒级数 …… 175
6.4.2　函数展开成幂级数 …… 177
习题 6.4 …… 179
总习题六 …… 179

第7章　多元微积分

7.1　预备知识 …… 181
7.1.1　空间直角坐标系 …… 181
7.1.2　空间曲面与方程 …… 182
习题 7.1 …… 184
7.2　多元函数的基本概念 …… 184
7.2.1　平面点集 …… 184
7.2.2　多元函数的概念 …… 185
7.2.3　二元函数的极限 …… 187
7.2.4　二元函数的连续性 …… 188
习题 7.2 …… 189
7.3　偏导数与全微分 …… 190
7.3.1　偏导数 …… 190
7.3.2　高阶偏导数 …… 192
7.3.3　全微分 …… 193
习题 7.3 …… 195
7.4　复合函数与隐函数的微分法 …… 195
7.4.1　复合函数的微分法 …… 195
7.4.2　隐函数的微分法 …… 198
习题 7.4 …… 200
7.5　多元函数的极值 …… 201
7.5.1　多元函数的极值 …… 201
7.5.2　条件极值 …… 203
习题 7.5 …… 205
7.6　二重积分的概念与性质 …… 205
7.6.1　二重积分的概念 …… 205
7.6.2　二重积分的性质 …… 207
习题 7.6 …… 207
7.7　二重积分的计算 …… 208
7.7.1　利用直角坐标计算二重积分 …… 208
7.7.2　利用极坐标计算二重积分 …… 212
习题 7.7 …… 215
总习题七 …… 216

第 8 章　常微分方程

8.1　常微分方程的一般概念 …… 218

习题 8.1 …… 220

8.2　一阶微分方程 …… 220

8.2.1　可分离变量的微分方程 …… 220

8.2.2　一阶线性微分方程 …… 222

8.2.3　一阶微分方程应用举例 …… 226

习题 8.2 …… 227

8.3　可降阶的高阶微分方程 …… 227

8.3.1　$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 228

8.3.2　$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 228

8.3.3　$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 229

习题 8.3 …… 230

8.4　线性微分方程解的结构 …… 230

习题 8.4 …… 232

8.5　常系数齐次线性微分方程 …… 233

习题 8.5 …… 237

8.6　常系数非齐次线性微分方程 …… 237

8.6.1　$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$型 …… 238

8.6.2　$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$型 …… 240

习题 8.6 …… 242

总习题八 …… 242

附　录

附录 A　简单积分表 …… 245

附录 B　习题答案 …… 252

参考文献 …… 273

第 1 章　函数与极限

初等数学所研究的对象主要是常量，而高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，并且以极限方法作为基本的研究方法。在这一章中，首先引入函数的概念；然后介绍极限的概念及极限的运算法则；最后，通过极限引入函数的一种重要性质——连续性。

1.1　函　数

1.1.1　区间与邻域

区间是一种常见的数集。设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，则

称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间，记作 (a,b)；

称数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为闭区间，记作 $[a,b]$；

称数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$。

以上几个区间统称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，$b-a$ 称为区间的长度。

此外，还可以定义如下 5 种类型的无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};\qquad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\};\qquad (-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R$$

这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是记号，不是数，分别读作“正无穷大”和“负无穷大”。

有限区间和无限区间统称为区间。

设有实数 a 及 δ，且 $\delta>0$，则称数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$。其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，称数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(a;\delta)$。

1.1.2　函数的概念

定义 1　设 D 是一个非空实数集，如果按照某一确定的对应法则 f，对于每一个数 $x\in D$，有唯一的一个实数 y 与之对应，则称该对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数，记作

$$f: D\to R \text{ 或 } y=f(x),\quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。

每个 $x\in D$ 所对应的数 y 称为函数 f 在点 x 的函数值，记为 $y=f(x)$。全体函数值的集

合 $f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数 f 的值域。

函数概念的核心是对应法则和定义域。函数的定义域通常按以下两种情况来确定:一种是有实际背景的函数,其定义域根据这个问题的实际意义来确定;另一种是用数学表达式表示的函数,如不说明定义域,则其定义域就是指使表达式有意义的一切实数组成的集合,称之为函数的自然定义域。对于两个函数来说,只有当它们的定义域和对应法则都相同时,它们才是相同的。例如函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$和函数 $g(x)=2x+1$,当 $x\neq\dfrac{1}{2}$时,有相同的函数值;但由于 $f(x)$的定义域是$(-\infty,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$,而 $g(x)$的定义域却是$(-\infty,+\infty)$,因而它们是不同的函数。又例如函数 $f(x)=1$ 与函数 $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$,虽然它们的表达形式不同,却是两个相同的函数。

例 1 物体的自由落体运动中,时间与物体下落的高度的函数关系是

$$h(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度(常数)。这里对应法则 f 是“$\dfrac{1}{2}g$ 乘以自变量 t 的平方”。设物体在 T 时刻落地,则定义域为$[0,T]$。

例 2 温度一定时,火药的燃烧速度与燃烧室内的压强有关。一般说来,压强越大,燃烧越快。对于某种火药,在常温 20 ℃之下,测得压强 $p(\mathrm{kg/cm^2})$与燃烧速度 $v(\mathrm{mm/s})$之间的对应关系如表 1-1 所示。

表 1-1 压强与燃烧速度对应关系

$p/(\mathrm{kg\cdot cm^{-2}})$	30	60	90	120	150	180
$v/(\mathrm{mm\cdot s^{-1}})$	6.2	6.1	9.6	11.5	13.5	15.8

例 3 在气象站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-1所示。据图可知这一天内时间 t 由 0~24 (h)气温 T(℃)的变化情况。

例 1 是由公式给出的;例 2 是由表格给出的;例 3 是由图形给出的。一般说来,函数关系的表示方法大致就分这样 3 种:解析法、列表法和图示法。今后所讨论的函数大都是用解析法表示的。

用解析法表示的函数,也可在其定义域的不同部分用不同的数学式子给出。例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\2-x & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

是如图 1-2 所示的在区间$[0,2]$上的一个函数。当自变量在半开区间$[0,1)$上取值时,对应的函数值用公式 $y=x$ 计算;当 x 在闭区间$[1,2]$上取值时,对应的函数值用公式 $y=2-x$ 计算。

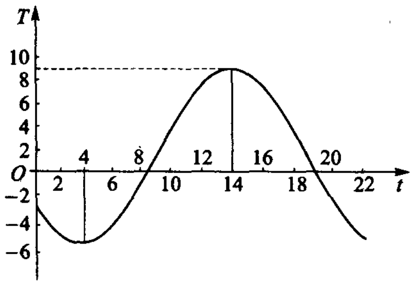


图 1-1

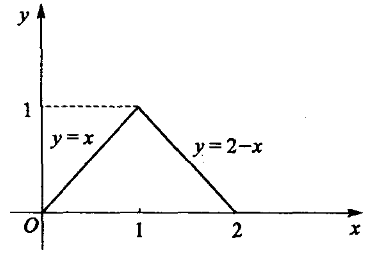


图 1-2

这种在函数定义域的不同部分，分段用公式进行表达的函数，通常简称为分段函数。又如分段函数

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

如图 1-3 所示，也称之为符号函数。

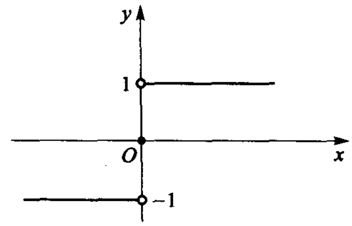


图 1-3

1.1.3　函数的特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义。如果存在正数 M，使对 D 中每一个 x 都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界，并称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，而 M 称为 $f(x)$ 在 D 上的一个界；若不存在满足上述条件的 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界，并称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数。

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，因为对一切实数 x 有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$。又如函数 $y=x^3$ 在 $[-1,2]$ 上是有界函数，而在 $(-\infty,+\infty)$ 上却是无界函数。这是由于当 $x\in[-1,2]$ 时 $|x^3|\leqslant 8$；而当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，对任何正数 M，总存在 $x\in(-\infty,+\infty)$（比如取 $x=\sqrt[3]{M+1}$）使 $|x^3|>M$。

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，区间 $I\subset D$。如果对 I 中任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对 I 中任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。并称区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增加区间（或单调减少

区间)。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升,单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降。

例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有单调性,但在 $(-\infty,0)$ 上是单调递减的,而在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的。

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 在数轴上关于原点对称,若对任何 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数;若对任何 $x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数。

从函数图形上看,奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称。

例如 $f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$。而 $f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在非零常数 T,使得对一切 $x\in D$,都有 $x+T\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的一个周期。

显然,若 T 为 $f(x)$ 的周期,则对于任何非零整数 k,kT 也是函数 $f(x)$ 的周期。若在周期函数的所有正周期中有一个最小的周期,则称此周期为该函数的最小正周期。通常把周期函数的最小正周期简称为该函数的周期。

例如函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数。

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数的概念

定义 2 设有函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 且值域为 M。若对于每一个 $y\in M$,通过 $y=f(x)$,都有 D 中唯一的 x 与之对应,那么这种对应关系所确定的 x 是 y 的一个函数。则称这个函数是函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in M \tag{1-1}$$

注意:函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 事实上都是表达变量 x,y 之间的同一个对应关系,不同之处在于前者与后者的自变量与函数值互换。即反函数的定义域和值域,恰好是原来函数的值域和定义域。

反函数关系是相互的,即 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,$y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数。

例如 $x=\arcsin y$ 与 $y=\sin x$ 互为反函数,其中,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$y\in[-1,1]$;$x=\sqrt{y}$ 与 $y=$

x^2 互为反函数,其中,$x\in[0,+\infty)$,$y\in[0,+\infty)$。

习惯上,自变量用 x 表示,因变量用 y 表示。若把反函数 $x=f^{-1}(y)$中的自变量改为 x,因变量改为 y,则式(1-1)变为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in f(D) \tag{1-2}$$

例 4　求函数 $y=-\sqrt{x-1}$的反函数。

解　函数的定义域为 $x\in[1,+\infty)$,值域为$(-\infty,0]$,由 $y=-\sqrt{x-1}$解出它的反函数为

$$x=y^2+1,\quad y\in(-\infty,0]$$

按习惯又写为

$$y=x^2+1,\quad x\in(-\infty,0]$$

必须注意,并不是每个函数在给定的数集 D 上都有反函数。由反函数的定义可知,若函数 $y=f(x)$的自变量与因变量值是一一对应的,则它一定有反函数。由此可见,在数集 D 上的单调函数一定有反函数。例如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上就没有反函数。但它在$[0,+\infty)$上单调增加,则反函数为 $y=\sqrt{x}$;而它在$(-\infty,0]$上单调减少,则反函数为$y=-\sqrt{x}$。

2. 复合函数的概念

定义 3　设函数

$$y=f(u),u\in D;\quad u=g(x),x\in E$$

记 $\Omega=\{x\,|\,g(x)\in D\}\cap E$。若 $\Omega\neq\varnothing$,则对每一个 $x\in\Omega$,可通过函数 g 对应 D 内唯一的一个值 u,而 u 又通过函数 f 对应唯一的一个值 y。这就确定了一个定义在 Ω 上的函数,它以 x 为自变量,y 为因变量,记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in\Omega$$

则称为函数 $y=f(u)$和函数 $u=g(x)$的复合函数,也简记为 $f\circ g$。其中 f 称为外(层)函数,g 称为内(层)函数。

例 5　函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$,$u\in D=[0,+\infty)$与函数 $u=g(x)=1-x^2$,$x\in\mathrm{R}$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}\text{ 或}(f\circ g)(x)=\sqrt{1-x^2}$$

其定义域 $\Omega=[-1,1]\subset\mathrm{R}$。

注意,当且仅当 $\Omega\neq\varnothing$(即 $D\cap g(E)\neq\varnothing$)时,函数 f 与 g 才能进行复合。例如 $y=f(u)=\arcsin u$,$u\in[-1,1]$与 $u=2+x^2$,$x\in(-\infty,+\infty)$就不能进行复合。这是因为外函数的定义域 $D=[-1,1]$与内函数的值域 $g(E)=[2,+\infty)$不相交;即不存在实数 x,使 $2+x^2\in[-1,1]$。

复合函数也可由多个函数相继复合而成。例如,由 3 个函数 $y=\sqrt[3]{u}$,$u=\sin v$ 与 $v=x^2$ 相继复合而成的复合函数为

$$y=\sqrt[3]{\sin x^2},\quad x\in\mathrm{R}$$

1.1.5 初等函数

在中学数学中，读者已经熟悉基本初等函数有以下6类：

常量函数 $y=C$（C 是常数）

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）

指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0, a\neq 1)$

三角函数 $y=\sin x$ （正弦函数）； $y=\cos x$ （余弦函数）

$y=\tan x$ （正切函数）； $y=\cot x$ （余切函数）

反三角函数 $y=\arcsin x$ （反正弦函数）； $y=\arccos x$ （反余弦函数）

$y=\arctan x$ （反正切函数）； $y=\text{arccot}\, x$ （反余切函数）

定义4 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数，统称为初等函数。

例如，有理函数是由常数与幂函数经过四则运算而得到的，所以是初等函数。又如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是多项式 $u=1-x^2$ 与幂函数 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 复合而成，而多项式 $1-x^2$ 又是常数1与幂函数 x^2 之差，所以 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是初等函数。

不是初等函数的函数，称为非初等函数。如在本节中给出的符号函数是非初等函数。

习题1.1

1. 将下列不等式中 x 的所在区间用邻域形式表示出来：

(1) $|x|<a(a>0)$； (2) $\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{3}{2}$；

(3) $|x+3|<1$； (4) $0<|x+2|<5$。

2. 若 $f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(2+x), f(2x), f(x^2), f(f(x)), f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$。

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}2+x & x\leqslant 0\\ 2^{x} & x>0\end{cases}$$

求：

(1) $f(-3), f(0), f(1)$；

(2) $f(\Delta x)-f(0), f(-\Delta x)-f(0)(\Delta x>0)$。

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$； (2) $y=\frac{1}{\lg(1-x)}$；