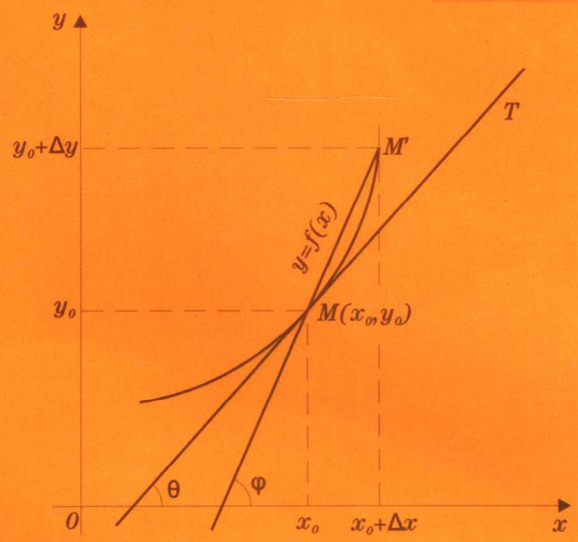
GAO DENG SHU XUE YI YUAN WEI JI FEN XUE

通识教育平台数学课程系列教材

高等数学

一元微积分学

黄立宏　孟益民　主编



科学出版社
www.sciencep.com

·通识教育平台数学课程系列教材·

高等数学：一元微积分学

黄立宏　孟益民　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书内容包括一元函数、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、级数等. 各节后配有适量习题，书末附有习题参考答案.

本书结构严谨，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

本书是为高等本科院校非数学专业学生编写的"高等数学"系列教材之一，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：一元微积分学/黄立宏，孟益民主编.—北京：科学出版社，2006
（通识教育平台数学课程系列教材）
ISBN 7-03-018057-7

I.高… II.①黄…②孟… III.①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 IV.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 109569 号

责任编辑：杨瑰玉／责任校对：董　丽
责任印制：高　嵘／封面设计：宝　典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2006 年 9 月第　一　版　开本：B5（720×1000）
2006 年 9 月第一次印刷　印张：16 1/2
印数：1—6 000　字数：318 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教育教学的基本工具，也是高等学校深化教育教学改革，全面推进素质教育，培养新世纪创新人才重要的条件保证. 教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》(教高[2005]1号)指出："加强教材建设，确保高质量教材进课堂. 要大力锤炼精品教材，并把精品教材作为教材选用的主要目标. 对发展迅速和应用性强的课程，要不断更新教材内容，积极开发新教材，并使高质量的新版教材成为教材选用的主体."

在数学作为科学和技术基础的今天，数学在决定国家各级人才的素质方面正起着日益重要的作用. 高等学校作为培育人才的摇篮，数学课程的开设也就具有特别重要的意义. 高等数学是高等教育中涉及学生多、专业门类广、对学生影响深远的基础课程之一，其教材建设工作受到广大教育工作者的普遍关注和重视.

湖南大学历来十分重视高等数学课程建设，其高等数学课程已被评定为国家精品课程，由湖南大学数学与计量经济学院组织编写的《大学数学》系列教材(供非数学专业理工科学生公共数学基础课程使用)被列为普通高等教育"十五"国家级规划教材，其修订版已被列为普通高等教育"十一五"国家级规划教材. 为了在教材建设中引进竞争机制，进一步打造精品教材，学院经广泛征求任课教师意见，并经教学指导委员会研究讨论，决定再组织编写一套高质量的高等数学课程教材，在不同年级学生的教学中两套教材交替使用，交替修改完善. 本套教材就是为此目的打造而成，它适合本科院校非数学专业学生作为数学公共课教材或参考书使用，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

《一元微积分学》是本套教材的第一册，由黄立宏、孟益民主编，参加本册编写人员还有刘开宇、彭亚新、彭国强等，他们都是长期从事非数学专业本科生数学公共课教学的教师，其中黄立宏教授是湖南大学"高等数学"国家精品课程负责人. 本册《一元微积分学》包含一元函数、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、级数等内容，其中标注"*"号的内容可根据学时多少进行选讲. 本书概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.

湖南大学数学与计量经济学院退休教师刘楚中教授在本套教材编写的前

期组织中做了大量工作，在此表示衷心感谢.

由于编写时间有限，本教材难免存在不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

湖南大学数学与计量经济学院

“高等数学”教材编写组

2006 年 6 月

目　录

第一章　函数 …… 1
　第一节　集合与映射 …… 1
　　一、集合及其运算 …… 1
　　二、映射 …… 3
　习题1-1 …… 5
　第二节　函数的概念与性质 …… 5
　　一、函数的概念 …… 5
　　二、函数的基本性质 …… 7
　　三、反函数 …… 9
　习题1-2 …… 9
　第三节　初等函数 …… 10
　　一、基本初等函数 …… 10
　　二、复合函数、初等函数 …… 12
　　三、双曲函数与反双曲函数 …… 13
　习题1-3 …… 15
第二章　极限 …… 16
　第一节　数列的极限 …… 16
　　一、数列极限的定义 …… 16
　　二、数列极限的性质 …… 18
　　三、数列的收敛准则 …… 21
　习题2-1 …… 24
　第二节　函数的极限 …… 25
　　一、当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 …… 25
　　二、当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 …… 26
　　三、函数极限的性质 …… 28
　习题2-2 …… 30
　第三节　无穷大量与无穷小量 …… 31
　　一、无穷大量 …… 31
　　二、无穷小量 …… 32
　习题2-3 …… 36
　第四节　极限的运算法则 …… 36

习题 2-4 …… 40
第五节 夹逼定理、两个重要极限…… 41
一、夹逼定理…… 41
二、重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 41
三、重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ …… 43
习题 2-5 …… 45
第六节 无穷小量的比较 …… 45
一、无穷小量比较的概念…… 45
二、关于等价无穷小的性质和定理…… 46
习题 2-6 …… 48
第三章 函数的连续性 …… 49
第一节 连续与间断 …… 49
一、函数连续性的概念…… 49
二、函数的间断性…… 51
习题 3-1 …… 53
第二节 连续函数的性质 …… 53
一、连续函数的基本性质…… 53
二、初等函数的连续性…… 57
习题 3-2 …… 57
第三节 闭区间上连续函数的性质 …… 57
一、闭区间上连续函数的性质…… 57
二、函数的一致连续性…… 60
习题 3-3 …… 61
第四章 一元函数的导数与微分 …… 63
第一节 导数的概念 …… 63
一、导数概念的引入…… 63
二、导数的定义…… 64
三、导数的几何意义…… 67
四、可导与连续的关系…… 68
习题 4-1 …… 68
第二节 求导法则 …… 69
一、函数四则运算的求导法则…… 69
二、复合函数的求导法则…… 71
三、反函数的求导法则…… 73

四、基本导数公式 …… 74
五、隐函数的求导法则 …… 75
六、参数方程的求导法则 …… 76
七、取对数求导法 …… 77
习题4-2 …… 78
第三节　高阶导数 …… 79
习题4-3 …… 82
第四节　微分及其运算 …… 83
一、微分的概念 …… 83
二、微分与导数的关系 …… 84
三、微分的几何意义 …… 85
四、微分法则 …… 85
五、高阶微分 …… 87
习题4-4 …… 88
第五章　微分中值定理 …… 89
第一节　微分中值定理 …… 89
一、罗尔中值定理 …… 89
二、拉格朗日中值定理 …… 90
三、柯西中值定理 …… 92
习题5-1 …… 93
第二节　洛必达法则 …… 94
一、$\frac{0}{0}$型不定式 …… 94
二、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式 …… 96
三、其他不定式 …… 98
习题5-2 …… 100
第三节　泰勒公式 …… 101
一、泰勒公式 …… 101
二、函数的泰勒展开式举例 …… 103
习题5-3 …… 105
第六章　导数的应用 …… 106
第一节　函数的单调性与极值 …… 106
一、函数的单调性 …… 106
二、函数的极值 …… 108
习题6-1 …… 111
第二节　函数的最值及其应用 …… 111

习题 6-2 …… 114
第三节　曲线的凹凸性…… 115
习题 6-3 …… 118
第四节　函数图形的描绘…… 118
一、渐近线 …… 118
二、函数图形的描绘 …… 120
习题 6-4 …… 121
第五节　相关变化率、弧微分、曲率…… 122
一、相关变化率 …… 122
二、弧微分 …… 123
三、曲率 …… 124
习题 6-5 …… 127
第七章　一元函数的积分…… 128
第一节　不定积分的概念和性质…… 128
习题 7-1 …… 132
第二节　求不定积分的方法…… 132
一、第一换元积分法(凑微分法) …… 133
二、第二换元积分法 …… 134
三、分部积分法 …… 138
四、有理函数和可化为有理函数的函数的积分 …… 140
习题 7-2 …… 144
第三节　定积分的概念…… 145
一、曲边梯形的面积 …… 145
二、定积分的概念 …… 146
三、定积分的性质 …… 147
习题 7-3 …… 151
第四节　定积分的基本定理…… 151
一、积分上限函数 …… 151
二、微积分的基本公式 …… 153
习题 7-4 …… 154
第五节　定积分的计算…… 155
一、换元法 …… 155
二、分部积分法 …… 157
三、部分分式法 …… 160
习题 7-5 …… 161
第六节　广义积分…… 162

一、无穷积分 …… 162
二、瑕积分 …… 164
三、Γ 函数 …… 166
* 四、广义积分的收敛原理 …… 167
* 五、广义积分的柯西主值 …… 168
习题 7-6 …… 169
第八章　定积分的应用 …… 171
第一节　定积分的微元法 …… 171
第二节　平面图形的面积 …… 171
一、直角坐标情形 …… 171
二、极坐标情形 …… 173
习题 8-2 …… 175
第三节　平面曲线的弧长 …… 176
习题 8-3 …… 179
第四节　立体体积和旋转体的侧面积 …… 179
一、平行截面面积为已知的立体体积 …… 179
二、旋转体的体积 …… 180
三、旋转体的侧面积 …… 182
习题 8-4 …… 183
第五节　定积分在物理学中的应用 …… 183
一、变力做功 …… 183
二、液体静压力 …… 185
习题 8-5 …… 186
第六节　其他方面的应用 …… 186
一、质心 …… 186
二、连续函数的平均值 …… 188
习题 8-6 …… 191
第九章　无穷级数 …… 192
第一节　常数项级数的概念与性质 …… 192
一、无穷级数的概念 …… 192
二、级数收敛的必要条件 …… 194
三、级数的基本性质 …… 195
习题 9-1 …… 196
第二节　常数项级数敛散性判别法 …… 197
一、正项级数敛散性判别法 …… 197
二、交错级数及其敛散性判别法 …… 202

三、任意项级数及其敛散性判别法 …… 203
习题 9-2 …… 205
第三节 幂级数 …… 206
一、函数项级数 …… 206
二、幂级数及其收敛域 …… 207
三、幂级数的运算 …… 210
习题 9-3 …… 211
第四节 函数展开成幂级数 …… 211
一、幂级数的解析性质 …… 211
二、函数展开为幂级数 …… 212
习题 9-4 …… 217
第五节 傅里叶级数 …… 217
一、周期函数的傅里叶级数 …… 217
二、非周期函数的傅里叶级数 …… 225
习题 9-5 …… 229
附录 常用积分公式 …… 230
习题参考答案 …… 239

第一章　函　　数

第一节　集合与映射

一、集合及其运算

1. 集合的概念

所谓集合(简称集)是指具有某种特定属性的事物的全体. 集合常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示,而组成集合的事物称为该集合的元素,常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

x 是集合 A 的元素,记为 $x\in A$,读作 x 属于 A;x 不是 A 的元素,记为 $x\notin A$,读作 x 不属于 A.

例 1　设 L 表示平面上单位圆上所有的点构成的集合,则点 $(0,1)\in L$,而点 $(0,0)\notin L$.

一个集合中若只含有限个元素,则称之为有限集,否则称之为无限集.

我们规定:不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

集合通常有两种表示方法:① 列举法,即列举出集合中的全部元素,如 $A=\{1,3,5,7,9\}$;② 特性描述法,即给出该集合中元素 x 所具有的性质 $P(x)$,记为 $A=\{x\mid P(x)\}$,如 $B=\{x\mid x^2>4\}$. 无论哪种表示法,集合中的元素不得重复出现.

为直观起见,我们有时也用几何图形来表示某些集合.

例 2　点集

$$C=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-2)^2=9\}$$

表示平面上以点 $(1,2)$ 为圆心,3 为半径的一个圆.

例 3　方程 $x^2-1=0$ 的解的全体组成一个集合,用列举法可表示为 $A=\{-1,1\}$,用特性描述法则可表示为 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$.

例 4　$0,\{0\},\varnothing$ 是三个不同的概念:0 是数,不是集合;$\{0\}$ 是仅含一个元素 0 的集合;而 $\varnothing$ 是空集.

若当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 任何集合都是它自身的子集,即 $A\subset A$,并规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集,即 $\varnothing\subset A$.

子集具有传递性,即若 $A\subset B,B\subset C$,则必有 $A\subset C$.

全体自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$;全体整数构成的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数构成的集合记为 $\mathbf{Q}$;全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$,有时也记为 $\mathbf{R}^1$. 显然,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

数学中常用的实数集合还有区间、邻域和去心邻域.

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,a,b\in\mathbf{R}\}$称为闭区间；

$(a,b)=\{x\mid a<x<b,a,b\in\mathbf{R}\}$称为开区间；

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,a,b\in\mathbf{R}\}$及$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,a,b\in\mathbf{R}\}$均称为半开半闭区间.

上述区间都是有限区间，其中a,b分别称为区间的左端点和右端点，并定义它们的长度均为$\rho(a,b)=b-a$.

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,b\in\mathbf{R}\}$，$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b,b\in\mathbf{R}\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,a\in\mathbf{R}\}$及$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,a\in\mathbf{R}\}$均称为无穷区间.

当不必区分区间类型时，将笼统说成区间I.

邻域是高等数学中的重要概念之一.

设$x_0\in\mathbf{R}$，对于正数δ，集合$\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点$x_0$的$\delta$邻域，记为$U(x_0,\delta)$，其中$x_0$称为邻域中心，$\delta$称为邻域半径；

集合$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为$x_0$的去心邻域，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$；

集合$\{x\mid x_0-\delta<x\leqslant x_0,x\in\mathbf{R}\}$称为点$x_0$的左邻域，记为$U(x_0^-,\delta)$；

集合$\{x\mid x_0\leqslant x<x_0+\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点$x_0$的右邻域，记为$U(x_0^+,\delta)$.

相应地，也有去心左邻域和去心右邻域.

$\mathring{U}(x_0^-,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0,x\in\mathbf{R}\}$表示$x_0$的去心左邻域；

$\mathring{U}(x_0^+,\delta)=\{x\mid x_0<x<x_0+\delta,x\in\mathbf{R}\}$表示$x_0$的去心右邻域.

在用邻域讨论问题时，若不强调邻域半径，则分别使用$U(x_0)$，$\mathring{U}(x_0)$，$U(x_0^+)$，$U(x_0^-)$，$\mathring{U}(x_0^-)$，$\mathring{U}(x_0^+)$等记号.

2. 集合的运算

(1) 交集：由集合A与B的公共元素组成的集合称为A与B的交集，记为$A\cap B$.

(2) 并集：由集合A与B的所有元素组成的集合称为A与B的并集，记为$A\cup B$.

(3) 差集：由集合A中不属于集合B的那些元素组成的集合称为A与B的差集，记为$A-B$. 当$B\subset A$时，称差集$A-B$为B关于A的余集.

包含所论及的一切元素的集合称为全集，记为Ω. 若$A\subset\Omega$，则将A关于Ω的余集$\Omega-A$记为$\overline{A}$，简称为A的余集.

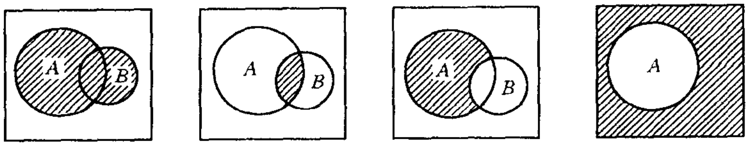
例5 设$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则$A\cap B=\{1,2,3\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，$A-B=\{5\}$. 若$\Omega=\mathbf{N}$，则$\overline{B}=\{5,6,7,8,\cdots\}$.

利用Venn图能够较直观地表达交集、并集、差集和余集等概念(图1-1).

集合的运算满足下列性质：

1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

2) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$　　$\overline{A}$

图 1-1

3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

4) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$;

5) $(C-A)-B=C-(A\cup B)$.

以上性质均可由定义推导出来,这里证明从略.

3. 逻辑量词与符号

以下逻辑量词在本书中常用到.

符号"$\forall$"表示"对每一…"或"对任意…",或"对所有…";符号"$\exists$"表示"存在","$\overline{\exists}$"表示"不存在".

例如,"对所有的实数 x,都有 $x^2+1>0$"可以写成:

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad 都有\ x^2+1>0;$$

"存在正数 x,使 $x^2-3x+2>0$"可以写成:

$$\exists x>0,\quad 使\ x^2-3x+2>0.$$

符号"$\Rightarrow$"称为蕴涵词,"$A\Rightarrow B$"表示"若命题 A 成立,则命题 B 成立",即表示 A 是 B 的充分条件,或 B 是 A 的必要条件.

符号"$\Leftrightarrow$"称为双蕴涵词,"$A\Leftrightarrow B$"表示"当且仅当命题 A 成立时命题 B 成立",或"A 与 B 等价",也即表示 A 是 B 的充要条件.

例如,"若 $x>2,y>3$,则 $xy>6$"可表示为

$$x>2,y>3\Rightarrow xy>6;$$

"$a^2+b^2=0$ 当且仅当 $a=b=0$"可表示为

$$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0.$$

二、映射

定义1　设 X、Y 是两个非空集,若存在某个对应规则 f,使 $\forall x\in X$,都有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的一个映射,记为 $f:x\to y$ 或 $y=f(x)$.

这里,y 称为 x 在映射 f 下的像,x 称为 y 的一个原像,集 X 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$,$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$.

例6　设 $X=\{x\mid x\in\mathbf{Z}\}$,$Y=\{y\mid y$ 为偶数$\}$,则

$$y=f(x)=2x,\quad x\in X$$

定义了 $X\to Y$ 的一个映射 f,其中 $D(f)=X,R(f)=Y$.

定义2 设$f:X\to Y$是X到Y的一个映射，若$f(X)=Y$(即$R(f)=Y$)，则称f是X到Y上的映射(或满射)；若$\forall x_1,x_2\in X$，当$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为X到Y的一个单射；若f既是满射又是单射，则称f为X到Y的一一对应.

例7 设$X=\mathbf{R}$，$Y=\{y\,|\,-1\leqslant y\leqslant 1\}$，则映射

$$f:x\to y=\cos x$$

是X到Y的满射，但不是单射，因此不是一一对应. 若取$X_1=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant \pi\}$，则$f$是$X_1$到$Y$的一一对应.

定义3 设f是X到Y的一一对应，则$\forall y\in X$，存在唯一的$x\in X$，使$f(x)=y$，这就确定了Y到X的一个映射，记作$f^{-1}:Y\to X$，称之为映射f的逆映射.

f的逆映射：$x=f^{-1}(y)$，$y\in Y$，$x\in X$，也是一一对应的，如图1-2.

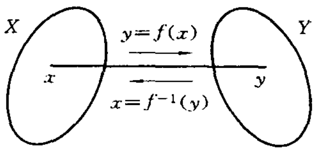


图1-2

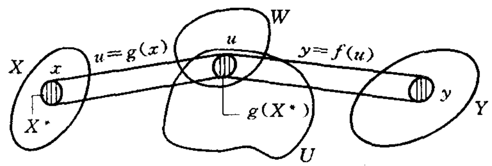


图1-3

例8 设$X=Y=\mathbf{R}$，则$y=f(x)=3x+2$是X到Y的一一对应，f的逆映射为$x=f^{-1}(y)=\dfrac{1}{3}(y-2)$.

定义4 设有映射$g:X\to U$，$f:W\to Y$，若存在非空集合$X^*\subset X$使$g(X^*)\subset W$，则可构造X^*到Y的映射$f\circ g:X^*\to Y$，即$y=f\circ g(x)=f(g(x))$，$x\in X^*$，称$f\circ g$为映射f与g在X^*上的复合映射，如图1-3.

例9 设有映射$y=f(u)=3u+1$，其中$D(f)=R$，$u=g(x)=5x-1$，$D(g)=R$，则复合映射$y=f(g(x))=3(5x-1)+1=15x-2$.

值得注意的是，不是任意两个映射f与g都能形成复合映射$f\circ g$，条件$R(g)\cap D(f)\neq\varnothing$是必要的. 如$y=f(u)=\sqrt{u}$，$D(f)=\{u\,|\,u\geqslant 0\}$，$u=g(x)=-x^2-1$，$D(g)=R$，则$f\circ g(x)=\sqrt{-x^2-1}$无意义，即不能形成复合映射$f\circ g$，这是因为$R(g)\cap D(f)=\varnothing$.

此外，三个以上的映射若满足一定的条件也可形成复合映射，如$y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$，若$R(h)\subset D(g)$，$R(g)\subset D(f)$，则可构成复合映射$f\circ g\circ h(x)=f(g(h(x)))$. 可以证明，映射的复合满足下列关系：

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),$$

但一般来说，$f\circ g\neq g\circ f$.

习　题　1-1

1. 写出下列集合间的关系(填空).

(1) $A\cap B$ ________ $A\cup B$；　　(2) $A-B$ ________ A；

(3) 若 $A\subset B$，则对任何集合 C，$A\cap C$ ________ $B\cap C$.

2. 用区间表示变量的变化范围.

(1) $x^2<9$；　　(2) $|x-1|<|x+1|$.

3. 设 $A=\{x|0<x<1\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$ 及 $B-A$.

4. 证明 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

5. 下列映射是 S 到 S 的，其中 $S=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$.

(1) $f(x,y)=(-y,x)$；　　(2) $g(x,y)=(x,0)$；

(3) $h(x,y)=(0,y)$；　　(4) $u(x,y)=x(-y)$；

(5) $v(x,y)=(-y,-x)$；　　(6) $w(x,y)=(x,y)$.

问哪些映射是一一对应？若是一一对应，则求其逆射.

6. 设 f,g,h 均为 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射，

$$f:x\to 3x,\quad g:x\to 3x+1,\quad h:x\to 3x+2,$$

求 $f\circ g$，$g\circ f$，$g\circ h$，$f\circ g\circ h$.

第二节　函数的概念与性质

一、函数的概念

定义 1　设 X、Y 为两个非空实数集，称映射 $f:X\to Y$ 为 X 到 Y 的函数，简称 f 为 X 上的函数，其中 X 称为函数 f 的定义域，记为 $D(f)$；$x\in X$ 所对应的像 $y\in Y$ 称为 x 对应的函数值，所有函数值的集合 $f(X)$ 称为函数 f 的值域，记为 $R(f)$，原像 x 又称为自变量，而像 y 称为因变量.

定义中的函数是指映射 f，而 $f(x)$ 是 x 在 f 下的像，严格说来两者是不同的，但为方便起见，也常称 $y=f(x)$ 是 x 的函数.

函数通常用数学表达式来表示，如 $y=x^2+1$. 一般来说，给出一个函数时要同时指明函数的定义域. 当给出函数表达式而未给出其定义域时，则约定其定义域为使数学表达式有意义的所有实数值的集合，如函数 $y=x^2+1$ 的定义域为一切实数 $\mathbf{R}$，而函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为集合 $[0,+\infty)$. 若是实际问题，则其定义域还要受到实际意义的约束，如半径为 R 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其定义域 $R\subset[0,+\infty)$.

例 1　求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域.

解　函数的第一项 $\sqrt{9-x^2}$ 在 $D_1=[-3,3]$ 上有定义，函数的第二项 $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 在

$D_2=(2,+\infty)$内有定义，故所求函数的定义域D为D_1与D_2的交集：$D=D_1\cap D_2=(2,3]$.

例 2 设有两组函数

(1) $f_1(x)=x, g_1(x)=\dfrac{x^2}{x}$;

(2) $f_2(x)=\sqrt{x^2}, g_2(x)=|x|$.

问各组中的函数是否相同？

解 只有当两函数的对应规则和定义域都相同时，两函数才相同.

第(1)组函数中，$D(f_1)=(-\infty,+\infty)$，$D(g_1)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故该组的两个函数$f_1(x)$、$g_1(x)$不相同.

第(2)组函数中，两者的定义域与对应规则均相同，故是相同的函数，即$f_2(x)=g_2(x)$.

函数的表示除了用数学表达式外，还可用图形法、表格法等，这些方法我们在中学数学课程里已熟知.

在平面中引入直角坐标系，以x为横坐标，以$y=f(x)$为纵坐标，则可确定平面上一点(x,y)，点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D(f)\}$$

可表示函数$y=f(x)$，并称此点集为函数$y=f(x)$的图形，也称曲线$y=f(x)$.

若一个函数在其定义域的某些不相重叠的子集上有不同的表达式，则称这个函数为分段函数.

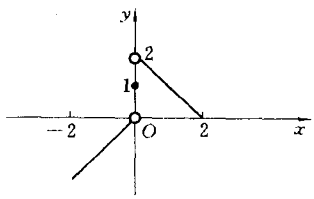


图 1-4

例 3 定义域为$[-2,2]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-2,0), \\ 1, & x=0, \\ 2-x, & x\in(0,2] \end{cases}$$

就是一个分段函数，其对应规则f由三部分构成：当$x\in[-2,0)$时，$f(x)=x$；当$x=0$时，$f(0)=1$；当$x\in(0,2]$时，$f(x)=2-x$. 其图形如图 1-4.

例 4 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(0,+\infty), \\ 0, & x=0, \\ -1, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

也是一个分段函数，它的对应规则也是由三部分构成：当$x\in(-\infty,0)$时，$y=-1$；当$x=0$时，$y=0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$y=1$，该函数称为符号函数，通常记为$y=\mathrm{sgn}x$，其图形如图 1-5.

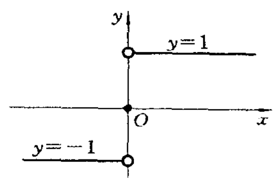


图 1-5

对任何实数x，均有