思维发散创新

——训练指导

数学

准确解读课程标准

知识结构梳理清晰

例题解析精到细致

同步训练层次分明

九年级上册（配冀教版）

主编 贾从惠

河北人民出版社

九年级上册（配冀教版）

思维发散创新

——训练指导

数学

准确解读课程标准

知识结构梳理清晰

例题解析精到细致

同步训练层次分明

主编　贾从惠

河北人民出版社

主　　编　康平爽
本册主编　贾从惠

书　　名　思维发散创新——训练指导/数学/九年级上册/配冀教版

责任编辑　周建图　张艳茹　唐　丽　李　莉
美术编辑　李　欣
责任校对　李　耘

出版发行　河北人民出版社（石家庄市友谊北大街330号）
印　　刷　河北省财政厅票证文印中心
开　　本　787×1092毫米　1/16
印　　张　10.5
字　　数　223 000
版　　次　2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
印　　数　1—1 500
书　　号　ISBN 7-202-04379-3/G·1394
定　　价　11.50元

编写出版说明

为了给中学生学习各科课程提供有益的引导和帮助，夯实学习基础，巩固重点知识，有针对性地准备中考，我们集中省内专家、教研人员和教学一线骨干教师经验和智慧，编写了这套适用于初中生的全科《思维发散创新——训练指导丛书》。

该丛书具有以下鲜明的特点：

以课本为基础，针对初中教学的特点，本套丛书**紧扣主旨**，专门开辟课标解读部分，帮助学生准确地解**读课程标准**，充分地**领会中考精神**；知识结构梳理部分**由点及面**，力求条理清晰，层次分明，帮助学生**系统有效地把握知识架构**；题例解析部分**由浅入深**，归纳总结的**经典例题分析精到细致，采用阶梯式难易程度编排**，符合初中生思维规律；同步训练部分，严格**与教材同步**，配合教学进度，与课堂教学相辅相成，七年级注重基础、八年级发散思维、九年级面向中考；**题量控制得当**，力求不使学生产生难以负荷的感觉。

我们希望，这套《思维发散创新——训练指导丛书》不仅能成为可以为广大初中生朋友提供帮助的伙伴，而且也能成为沟通你们与我们之间良好关系的桥梁，你们的意见和建议将促进我们的进步，我们也愿意通过我们的不断进步见证你们的成长。

河北人民出版社

《丛书》编写组

2006 年 8 月

目　录

第二十七章　圆（一）

课标解读

1. 学习本章内容之前，我们已经学习了直线形图形的有关性质：如三角形、四边形等；也利用图形的变换等方式探究了它们的许多性质．而圆这个几何图形，也在我们的生活中随处可见，人们利用它装点我们的生活，也利用它的性质解决了许多实际问题．

2. 通过对本章的学习，我们会对圆有一个初步的认识．本章的核心内容包括圆的有关概念及其性质，弧长、扇形面积的计算以及圆锥的侧面积和全面积的计算．

3. 圆既是轴对称图形，又是中心对称图形．在探究圆的有关性质的过程中，充分利用了圆的这一特性，我们都是通过图形的变换来发现有关数学规律，然后再通过推理说明结论的正确性．例如：利用“折叠”的方式探索垂径定理；利用“旋转”来探索弧、弦、圆心角之间的关系；利用“推理”的方式来说明垂径定理的逆定理等等．而动手操作——反复实验——大胆猜想——演绎推理——得出结论的过程。正是我们进行数学研究的全过程。所以，本章的学习过程，不仅会掌握相关知识，更能在体验数学事实发现的全过程中提升我们的数学素养．

4. 在探索圆周角和圆心角的关系的过程中，渗透了分类讨论的思想．从近几年的中考试题中，我们可以很明显的看到，分类讨论已成为压轴题必考的一种数学方法．

知识结构梳理

- 圆
  - 圆的有关概念
    - 圆心 半径 直径 弦 弧
    - 圆心角 圆周角
    - 三角形的外接圆
    - 扇形
  - 圆的有关性质
    - 轴对称性
    - 中心对称性
    - 弦 弧 圆心角、圆周角之间的关系
  - 圆的有关计算
    - 弧长
    - 扇形面积

【中考信息】

本章在中考中的考点主要包括：关于“垂径定理”的计算；圆心角和圆周角之间的数量关系；弧长和扇形面积的计算、圆锥的展开图等．以上主要以填空题或选择题的形式来考查．

典型题例解析

例1 已知：如图27－1所示，OA、OB为$\odot O$的半径，C、D分别为OA、OB的中点.

求证：$AD=BC$.

命题目的："圆中的半径处处相等"往往是题目中的隐含条件.

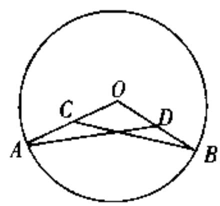


图27－1

思路点拨：要证$AD=BC$，应考虑含着这两条线段的两个三角形是否全等．通过观察发现：$\triangle AOD$和$\triangle BOC$有公共角$\angle O$，则可考虑用全等法则SAS或AAS等证明．从而引导我们去关注图形中有无其他线段相等.

证明：在$\triangle AOD$和$\triangle BOC$中，

$\because OA=OB$，$OC=\frac{1}{2}OA$，$OD=\frac{1}{2}OB$，

$\therefore OC=OD$．又$\because \angle O$是公共角，

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle BOC$．$\therefore AD=BC$.

思维提升：(1) 在证明题的分析过程中，我们往往是从结论入手，探寻只要存在什么条件就可以获得结论，再关注已知条件中是否存在所需要的条件.

(2) 证明线段的方法很多：如"利用全等三角形的性质"，如"等角对等边"，如"平行四边形的性质"，如"中垂线的性质"等等.

例2 如图27－2所示为矩形$ABCD$，试说明A、B、C、D四点在同一个圆上，并画出这个圆.

命题目的：巩固圆的定义："到定点的距离相等的点组成圆."

思路点拨：要说明这四点共圆，就是要证明这四个点到某一个点的距离相等．而"矩形的对角线相等且被平分"的性质提醒我们A、B、C、D到中心O的距离相等，所以A、B、C、D在以O为圆心，OA为半径的圆上.

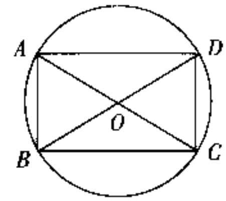


图27－2

证明：在矩形$ABCD$中，连结AC、BD交于点O，可得$AC=BD$，且$OA=OC$，$OB=OD$.

$\therefore OA=OB=OC=OD$.

$\therefore A$、B、C、D在以O为圆心，以OA为半径的圆上.

所画圆O，见图示27－2.

思维提升：(1) 解决这类问题的方法：只要几个点到某个定点的距离相等，就能说明这几个点共圆.

(2) 解决此类问题的关键是确定"定点"的位置．方法有：①矩形和正方形都有其对称中心；②利用"线段的中垂线上一点到线段两端点的距离相等"及其逆命题，也可以尝试着找到定点.

(3) 证明这类问题时，找到定点后，连结这个定点和各个点，然后问题就转化为：证明几条线段相等.

例3 某海军部队在灯塔A的周围进行军事演习，A的周围3千米的水域为演习重地．有一渔船误入离A 2千米的B处如图27－3；为了尽快驶离危险区域，该船应沿哪条射线方向航行？请说明理由.

命题目的：能利用"圆的半径处处相等"解决实际问题.

思路点拨：(1) 我们都能想到沿射线

AB 方向离开是最快的. 获得这个答案很容易，难的是怎样说明这样走最近，即 BC 最短.

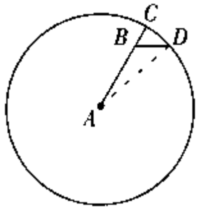


图 27－3

(2) 一般地，对这种唯一性的证明，我们都是在圆上任取另外一点，如点 D，通过证明 BD 总是大于 BC 来说明问题.

(3) 证明线段的不等量关系，常用到定理“三角形的两边之和大于第三边”.

解：连结 AB 并延长，交⊙A 于点 C，在⊙A 上再任取一点 D，连结 BD 和 AD. 在△ABD 中，$AB+BD>AD$，而 $AD=AC$，所以 $AB+BD>AC$，即 $AB+BD>AB+BC$，

∴$BD>BC$.

∴渔船沿射线 AB 方向驶离危险区域最快.

思维提升：(1) 在几何图形中，要说明一个点的位置的唯一性，往往任取其他一点，利用几何推理证明这一点不具备应有的性质即可.

(2) 几何论证中，如涉及到线段的不等量关系，应考虑①构造三角形，利用“三角形的三边关系定理”说明. ②构造直角三角形，利用“斜边总是大于直角边”说明. ③构造圆，利用“圆的直径是最长的弦”说明.

例 4 “圆材埋壁”是我国古代著名数学著作《九章算术》中的一个问题：“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何?”此问题的实质就是解决下面的问题：“如图 27－4，CD 为⊙O 的直径，弦 $AB\perp CD$ 于点 E，$CE=1$，$AB=10$，求 CD 的长”. 根据题意可得 CD 的长为_____.

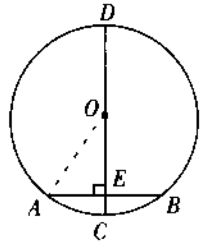


图 27－4

思路点拨：求 CD 的长即求半径 OA 的长. 而此图所提供的信息恰为“垂径定理”中的基本关联量：直径（或半径）、弦长、垂直等. 所以想到在直角三角形 OAE 中求出此量 OA.

解：∵CD 是直径且 $CD\perp AB$ 于 E.

∴$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$.

在 Rt△OAE 中，$OE=OC-CE=OC-1$，

设⊙O 的半径为 R，则 $OA=R$，$OE=R-1$，

∴$R^2=(R-1)^2+5^2$

$R^2=R^2-2R+1+25$

∴$R=13$. ∴$2R=26$.

∴应填 26 寸.

思维提升：(1) 垂径定理是我省历年中考中必考的考点之一. 在图 27－4 的经典图形中，包含四个量：弦 AB、半径 OA、弦心距 OE、弓形高 EC，这四个量只要已知两个量，就可以求出其他两个量，利用的算式是勾股定理：

$OE^2+(\frac{AB}{2})^2=OA^2$，或 $(R-EC)^2+(\frac{AB}{2})^2=R^2$.

(2) 涉及到“求圆中的某条弦长”时，常作辅助线“过圆心作弦的垂线”构造直角三角形；在证明某些弦的等量关系时，也经常用到这条辅助线.

(3) 垂径定理的推论要特别关注限制条件：平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

(4) 垂径定理还是证明“圆中两条弧相等”的重要依据之一.

能力拓展：如图 27－5，已知⊙O 的半径为 5，弦 $AB=8$，P 是弦 AB 上任意一点，则 OP 的取值范围是______.

思路点拨：当 P 点在 AB 上移动时，离 O 最近的位置是过 O 点作 AB 的垂线获得的垂足 P_1，离 O 最远的位置是 A、B 两点，所以此题考查的仍然是垂径定理中的“求弦心距长”.

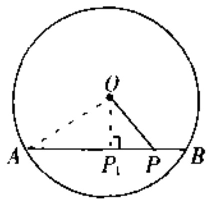


图 27－5

解：过点 O 作 $OP_1\perp AB$ 交 AB 于 P_1 点，连结 OA，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAP_1$ 中，利用勾股定理知：

$5^2=4^2+OP_1^2$，解得 $OP_1=3$.

∴填 $3\leqslant OP\leqslant 5$.

例 5　如图 27－6，已知 CD 是⊙O 的一条弦，点 A、B 在直线 CD 上，且 $OA=OB$. 请判断 AC 和 BD 的数量关系并说明理由.

命题目的：涉及到“弦”的问题，常作辅助线：过 O 作弦的垂线.

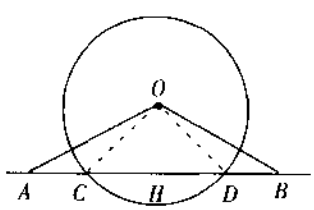


图 27－6

思路点拨：(1) 可以考虑$\triangle AOC$ 和$\triangle BOD$ 全等，利用全等三角形对应边相等证得 $AC=BD$.

(2) 已知条件中的 $OA=OB$，AC 和 BD 在弦 CD 的两侧延长线上. 综合这两个条件，容易联想到垂径定理和等腰三角形的“三线合一”.

证明：

证法一：连结 OD、OC.

∵$OD=OC$，∴$\angle OCD=\angle ODC$，

∴$\angle OCA=\angle ODB$.

又∵$OA=OB$，∴$\angle A=\angle B$.

∴$\triangle OAC\cong\triangle OBD$ (AAS).

∴$AC=BD$.

证法二：如图 27－7，过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H 点，

∴$CH=HD$.

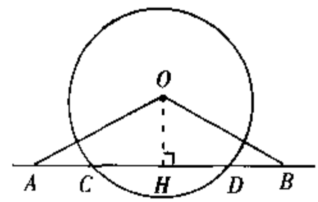


图 27－7

而在$\triangle OAB$ 中，$OA=OB$，$OH\perp AB$，

∴$AH=BH$（三线合一）

∴$AH-CH=BH-HD$.　∴$AC=BD$.

思维提升：“过圆心作已知弦的垂线”是解决圆的问题时常用的辅助线之一.

例 6　已知：如图 27－8，弦 AD 和弦 BC 相等. 试猜想：弦 AB 和 CD 相等吗？为什么？

命题目的：弦、弧之间的等量转化是圆中的重要结论.

思路点拨：很显然，$AB=CD$. 要说明这个结论，应展开联想：由弦相等⟶弧相等⟶圆心角相等. 所以关注$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$是否相等，或者关注$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角是否相等，或者是否有包含这两条线段的两个三角形全等.

解：$AB=CD$.

证明：∵弦 $AD=BC$，∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$

∴$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{CA}$. ∴$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{AB}$.

∴弦 $DC=AB$.

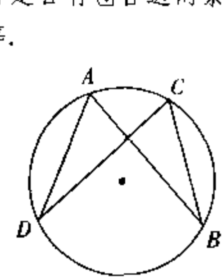


图 27－8

思维提升：《课本》的第 5 页定理（在同圆或等圆中，相等的弧所对的弦相等；相等的弦所对的优

弧和劣弧分别相等），是在圆的问题中证明两弦相等，或两弧相等的重要依据.

能力拓展：在同圆中，如图 27－9. 如果$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，那么弦 AB、CD 的关系是（　　）.

A. $AB>2CD$　　B. $AB=2CD$

C. $AB<2CD$　　D. 不确定.

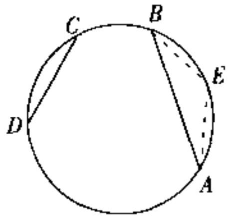


图 27－9

思路点拨：先把已知条件 $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，转化为弧的等量关系，才能用前题所叙述的定理. 所以想到取$\overset{\frown}{AB}$的中点 E，这样$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}$，也存在弦 $BE=AE=CD$. 再看这些弦和弦 AB 恰好构成了三角形 ABE. 就可以联想到“三角形三边关系定理”.

解：取$\overset{\frown}{AB}$的中点 E，连结 AE 和 BE.

$\because \overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AE}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AE}$，$\therefore CD=BE=AE$.

而在$\triangle ABE$ 中，$BE+EA>AB$，

$\therefore 2BE>AB$，即 $2CD>AB$.

∴应选 C.

例 7　如图 27－10，已知 AB 和 CD 是⊙O 中的两条平行弦，试说明 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

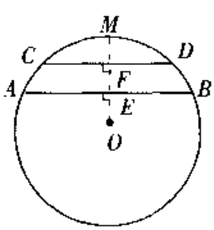


图 27－10

命题目的：利用垂径定理证明圆中的两弧相等.

思路点拨：区别于例 6，在本题的条件中没有相等的弦和角. 所以应想其他的策略解决它. 而垂径定理的结论中，也有“弧相等”的结论，可以尝试做出“垂径定理”的基本图形.

证明：如图 27－10，过 O 点作 $OE\perp AB$，交 CD 于 F，交⊙O 于 M.

$\because AB/\!/CD$，$OE\perp AB$，$\therefore OF\perp CD$.

又$\because OE\perp AB$，OM 为半径，

$\therefore \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，$\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$.

$\therefore \overset{\frown}{AM}-\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{BM}-\overset{\frown}{DM}$.

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

思维提升：(1) 本题所证条件和结论用文字表述为：平行弦所夹的弧相等.

(2) 易错点：在作辅助线时，只能如证明中所述，不能像有些同学所写的：过 O 点作 OM 垂直 AB 和 CD. 这样的辅助线写法不规范，给辅助线附加的条件限制太多，不符合几何要求，要特别注意.

(3) 综合例 6、例 7 的条件和结论可以看出，在圆中，证明“弧相等”时，我们有两种解决途径：①同圆中，等弦对等弧，可以通过证明“弦相等”获得“弧相等”. ②垂径定理：垂直于弦的直径，平分弦所对的两条弧.

例 8　有一座圆弧形的拱桥，桥下水面宽度 7.2m，拱桥高出水面 2.4m，现有一货船，送一货箱欲从桥下经过，已知货箱长 10m，宽 3m，高 2m（货箱底与水平面持平），问该船可否顺利通过该桥？

命题目的：会用垂径定理解决实际生活中的问题.

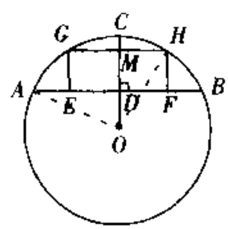


图 27－11

思路点拨：(1) 如图 27－11，桥面宽 7.2m 指 $AB=7.2$，拱桥高出水面 2.4m 是指 CD 长 2.4m. 由此可见，这是垂径定理的典型例题.

(2) 货箱要想从桥下通过，（货箱的

宽 $EF=3\text{m}$ 落在 AB 上，如图 27－11，$EFGH$ 即为货箱）GE 的长应为货箱的最大允许的高度，实际货箱的高度 2m 得小于线段 GE 的长．所以问题归结为“求出线段 GE 的长”．

(3) 要求 GE 的长，可以看出 $GE=OM-OD$．而 OM 和 OD 分别是弦 GH 和弦 AB 的弦心距，只要确定它的长度即可．所以连结 OA，在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中先确定半径是最重要的．

解：如图 27－11，连结 OA，设⊙O 半径为 R．

$\text{Rt}\triangle AOD$ 中，$\because AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 7.2=3.6$．

$OD=R-CD=R-2.4$．

$\therefore AD^2+OD^2=OA^2$．即 $3.6^2+(R-2.4)^2=R^2$．

解得：$R=3.9\text{m}$．

所以 $OD=3.9\text{m}-2.4\text{m}=1.5\text{m}$．

同理：连结 OH，在 $\text{Rt}\triangle OMH$ 中，$R^2=CH^2+OM^2$．

即 $3.9^2=1.5^2+OM^2$，解得 $OM=3.6\text{m}$，

所以 $GE=OM-OD=3.6\text{m}-1.5\text{m}=2.1\text{m}$．

而货箱能否通过该桥，关键看货箱的顶部两角 G 和 H 是否会被桥拱拦住．即当货箱位于桥下正中位置时，两角的高度是否小于 GE，通过计算发现：箱高 $2\text{m}<GE$，所以可以通过．

思维提升：(1) 该类问题的难点在于把实际问题转化成几何量之间的数量关系．而这正是现今中考试题的热门话题，应引起我们的高度重视．

(2) 数学建模的过程是体现我们能力的过程．例如：在本题的解决过程中，“货箱是否通过”其实就是比较“线段 GE 与 2m 的大小”，如果 $GE>2\text{m}$，说明桥比货箱高，可以通过；如果 $GE<2\text{m}$，说明桥太矮，货箱太高，不可以通过．但本题的解决还可以反过来想，比如：我们可以假设 EF 的长未定，而 $GE=2\text{m}$，类似的，我们可以解出来 EF 和 GH 的长．如果 $GH=EF>3\text{m}$，说明货箱可以通过；如果 $GH<3\text{m}$，说明货箱横向会被卡住，不可以通过．我相信同学们肯定会试一试这种解法！

例 9 填空：

(1) 如图 27－12，已知圆心角 $\angle BOC=100°$，点 A 为优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点，则圆周角 $\angle BAC=$ ______ 度．

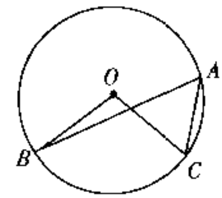


图 27－12

(2) 已知圆心角 $\angle BOC=100°$，如图 27－13，则圆周角 $\angle BDC=$ ______ 度．

(3) 如图 27－14，点 A、B、C、D 在圆周上，$\angle A=65°$，则 $\angle D=$ ______ 度．

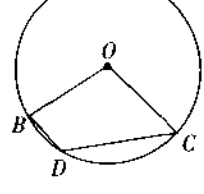


图 27－13

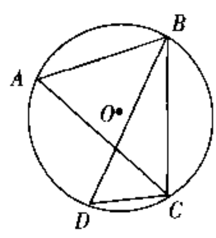


图 27－14

命题目的：掌握同弧所对的圆心角和圆周角之间的数量关系，是进一步学习圆的有关知识的基础．

思路点拨：如图 27－12，$\angle A$ 和 $\angle BOC$ 是同弧所对的圆周角和圆心角，所以 $\angle BOC=2\angle A$．图 27－13 中，$\angle BDC$ 和 $\angle BOC$ 并非同弧所对的圆周角和圆心角，但 $\angle BOC$ 和劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数相同，$\angle BDC$ 的度数等于优弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数的

一半．所以$\angle BDC=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle BOC)$．如图 27－14，$\angle A$ 和$\angle D$ 恰为$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角，所以$\angle D=\angle A$．

解：(1) 50°．

(2) 130°．

(3) 65°．

思维提升：(1) 和圆心角、圆周角有关的计算题是中考必考的内容．

(2) 相关定理：①同弧所对的圆周角是圆心角的一半；②同弧所对的圆周角相等．

(3) 上述两个定理是圆中证明“角相等”或“角的倍数关系”时的重要依据．

(4) 综合 (1) (2) 两题可以得到如下结论：因为$\angle A$ 和$\angle D$ 都是弦 BC 所对的圆周角，所以一条弦所对的圆周角的度数有两个，且互为补角．

例 10 如图 27－15，在$\odot O$ 中，直径 AB 为 10cm，弦 $AC=6$cm，$\angle ACB$ 的平分线交$\odot O$ 于 D，则 $BC=$______cm，$\angle ABD=$______度．

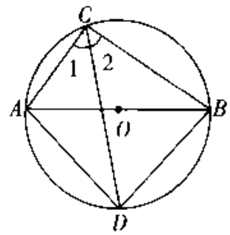


图 27－15

命题目的：熟练掌握“直径所对的圆周角是直角”．

思路点拨：因为 AB 是直径，所以$\angle ACB$ 和$\angle ADB$ 都是直角，这就和勾股定理建立了对应关系，从而可以得出 BC 的长．

解：∵AB 是直径，

∴$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$，又∵$\angle 1=\angle 2$，

∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$

∴$AD=DB$（同弧所对的弦相等）

∴$\angle DAB=\angle ABD=45^\circ$（同弧或等弧所对的圆周角相等）．

且在 Rt$\triangle ACB$ 中，$AC^2+CB^2=AB^2$，

∴$CB^2=10^2-6^2=8^2$，∴$CB=8$cm．

思维提升：(1) 此题的知识点较为综合，既用到了圆周角为直角的判定方法，也用到了如何判定两条弧、弦相等的方法．

(2) 本题蕴含的解题方法：见直径，找直角；见角平分线，找相等的角、相等的弧、相等的弦等结论．

能力拓展：如图 27－15，你还能算出 AD 或 BD 的长吗？

解：∵$\angle ADB=90^\circ$，$AD=BD$．

∴$AD^2+BD^2=AB^2=100$．即 $2AD^2=100$．

解得：$AD=BD=5\sqrt{2}$．

例 11 如图 27－16，已知在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的$\odot O$ 与 BC 相交于点 D，则 BD 和 DC 有特殊的数量关系吗？请说明理由．

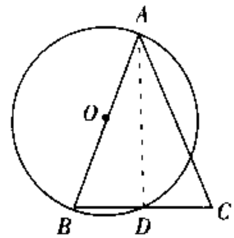


图 27－16

命题目的：掌握圆的第二种常用辅助线：见直径，构造直径所对的圆周角——直角．

思路点拨：很显然，结论 $BD=DC$，不难猜出．也就是说 D 点是等腰$\triangle ABC$ 底边上的中点，那么很自然地会联想到三线合一，即连结 AD．观察 AD 和 BC 的位置关系，而$\angle ADB$ 恰为直径所对的圆周角，所以$\angle ADB=90^\circ$，即 $AD\perp BC$．则此题得证．

解：$BD=DC$．

连结 AD．∵AB 是直径，∴$\angle ADB=90^\circ$（直径所对的圆周角是 90°）

$\therefore AD \perp BC$，又$\because AB=AC$，

$\therefore BD=DC$（等腰三角形的三线合一）

思维提升：（1）直径所对的直角往往是解决此类问题的关键，所以此题还可以从条件入手去分析：既然已知 AB 是直径，先观察图中有无直角，如没有，再构造辅助线，然后探索构造的直角提示我们什么新的结论.

（2）学习几何的过程是一个学习说理的过程，是一个学会看图，提高观察能力的过程．但前提很关键，就是几何定理的题设和结论要记得很清楚.

例 12　如图 27－17，直角坐标系中有一条圆弧经过网格点 A、B、C，其中 B 点坐标为（4，4），则该圆弧所在圆的圆心坐标为______.

命题目的：学科间综合试题中应关注圆的知识点的灵活运用.

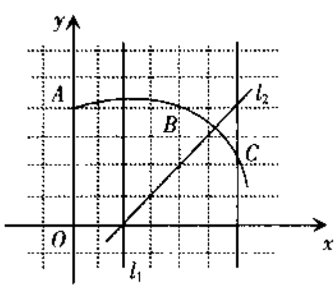


图 27－17

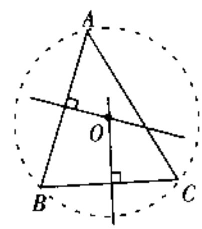
思路点拨：此题实际考察的是“过三点的圆”的知识，经过 A、B、C 三点的圆的圆心落在三条边的中垂线的交点上．因为 A、B、C 三点都是网格点，所以线段 AB 的中垂线很明显；而 BC 的中垂线也很好作，是以 B、C 为顶点的 2×2 的小正方形的另外一条对角线．两条中垂线的交点即为所求的点.

解：如图 27－17，l_1 与 l_2 的交点即为圆心，此圆心的坐标为（2，0）.

思维提升：（1）网格问题是实验区很热门的一类考题，应用在“相似三角形的判定”、“动点或动图”问题、“平移和旋转”中的图形变换方面等．这类问题在于让我们能很快地根据格点的位置，确定出我们所需要的特殊位置或数量关系，从而解决问题.

（2）三角形的外接圆是唯一存在的．而外心是三边中垂线的交点，它是作出三角形外接圆的关键．锐角三角形的外接圆圆心在三角形内部，直角三角形的外心恰为斜边的中点，钝角三角形的外心在三角形外部.

能力拓展：如右图，A、B、C 表示三个工厂，要建一个供水站，使它到这三个工厂的距离相等，你能确定供水站的位置吗？



思路点拨：一个点到 A、B、C 三点的距离相等，则这个点即为圆心，A、B、C 为圆上三点.

作法：分别连结 AB、BC、CA．并作出 AB 和 BC 的中垂线，交于点 O，点 O 即为所求作的供水站位置.

例 13

（1）如图 27—18，如果三角形的三边长分别为 5cm，12cm，13cm，请问，这个三角形外接圆的半径是______.

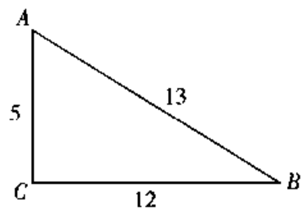


图 27－18

（2）如图 27－19，小明同学在手工制作中，把一个边长为 12cm 的等边三角形纸片贴到一个圆形的纸片上，若三角形

的三个顶点恰好都在这个圆上，则该圆的半径为(　　).

A. $3\sqrt{2}$cm

B. $3\sqrt{3}$cm

C. $4\sqrt{2}$cm

D. $4\sqrt{3}$cm

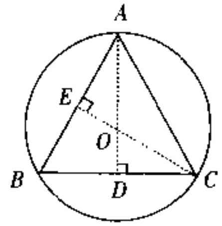


图 27—19

命题目的：利用“外心”的性质求某些线段（如外接圆半径）的长度.

思路点拨：(1) 直角三角形的外心为斜边中点.

(2) 解决此类问题，应先确定外心，再连接外心和顶点，得到外接圆半径，再利用勾股定理构造关于 R 的方程而解得 R.

解：(1) 很明显：5，12，13 是勾股数，即 $5^2+12^2=13^2$，所以$\angle C=90°$，AB 是斜边，∴外接圆半径 $r=\frac{1}{2}\times13=6.5$cm.

(2) 作 BC 边和 AB 边的高 AD 和 CE，AD 和 CE 交于点 O，点 O 即为外心，OC 即为半径 r，更关键的是 OA 也是半径 r，这样 $OD=AD-r$，$CD=\frac{1}{2}\times BC$，$OC=r$. 已知 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times12=6\sqrt{3}$

∴在 Rt$\triangle ODC$ 中，

$OD^2+DC^2=OC^2$，即 $(6\sqrt{3}-r)^2+6^2=r^2$

解得：$r=4\sqrt{3}$.

∴选 D.

思维提升：(1) 这类问题常常涉及到直角三角形、等腰三角形或等边三角形，它们本身的特殊性质往往是解决这类问题的关键，如“直角三角形外心的特殊位置”，还如等边或等腰三角形底边上高也是底边上的中线的特殊性，更如等边三角形中特殊的 60°和 30°，往往在应用上给人柳暗花明又一村的感觉.

(2) 解决这类问题的关键是“确定外心位置，找到表示半径的线段”. 最后归结到某个直角三角形中应用勾股定理，解方程得到未知量.

例 14　如图 27－20，小花在为班级办板报时，遇到了一个难题，在版面设计过程中需要将一个半圆面三等分，请你帮助她在图中设计一个合理的等分方案，要求叙述清楚作法.

命题目的：巩固应用知识点：在同圆中，相等的圆心角所对的弧相等.

思路点拨：要想把半圆三等分，即要找到半圆的三等分点，则每段弧的度数应为 60°，所以分割线 OE 和 EF、AO 围成的是等边三角形.

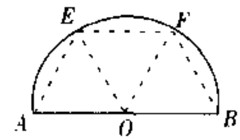


图 27－20

作法：

作法一：如果没有要求尺规作圆，我们可以利用手边的含 30°、60°的三角板的 60°角来确定分割线 OE、OF 的位置，即只需$\angle AOE=\angle BOF=60°$.

作法二：如果要求尺规作圆. 作法如下：

①先确定点 O 位置：(作直线 AB 的中垂线)

②以 OA 为半径，点 A 为圆心画弧，交半圆于点 E，连结 OE. 即为一条分割线.

③以 B 为圆心，OA 为半径，交半圆于 F 点，连结 OF，又得到一条分割线.

证明：∵$OA=AE=OE$，∴$\angle AOE$

$=60^\circ$，

同理可得：$\angle BOF=60^\circ$，$\therefore \angle EOF=60^\circ$，

$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FB}$.

∴半圆面被 OE、OF 三等分.

思维提升：(1) 利用所学知识“平分一段弧”或者按要求“平分扇形、半圆”等，是中考中经常出现的动手操作题．它要求我们不仅会应用知识求解、证明，还能动手去实践这些知识、并能合理解释.

(2) 蕴含的知识点：利用垂径定理或利用等弧对等弦.

能力拓展：如图 27－21，是一个破损的古文物铜镜的一部分，它的残留边缘是圆弧，请作图找出圆弧所在圆的圆心，以帮助考古人员修复古铜镜.

思路点拨：只需在圆弧上任取三点，过三点的圆的圆心的确定已在例 12 中叙述得很清楚，相信你一定能帮他们这个忙！

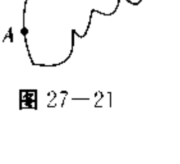


图 27－21

例 15　如图 27—22，在足球比赛中，甲、乙两名队员互相配合向对方球门 MN 进攻，当甲带球冲到 A 点时，乙跟进冲到 B 点，此时，甲直接射门好，还是迅速将球传给乙，让乙射门好？

命题目的：明确圆内角、圆周角和圆外角的概念及数量上的大小关系.

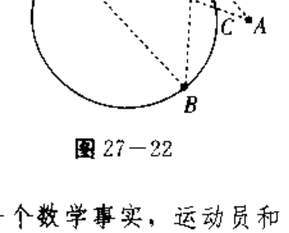


图 27－22

思路点拨：我们都知道一个数学事实，运动员和 M、N 两点围成的 $\angle MBN$ 越大，说明其把球踢入球门的可能性较大．所以此实际问题即转化为比较 $\angle MBN$ 和 $\angle MAN$ 的大小关系.

解：连结 MB、NB、MA、NA，MA 和圆交于点 C．∵点 B、C 共圆，

$\therefore \angle MBN=\angle MCN$，而 $\angle MCN>\angle MAN$.（三角形的一个外角大于与它不相邻的两个内角）

$\therefore \angle MBN>\angle MAN$.

∴甲将球传给乙，让乙射门胜算更大.

思维提升：(1) 这道实际题，我们单纯通过考虑圆上角（$\angle MBN$）和圆外角（$\angle MAN$）的数量关系来解决此题在实战中肯定不行，实际进行中应该还有很多人为因素.

(2) 一般地，若点 D、B、A 分别在圆内、圆上和圆外，$\angle MDN>\angle MBN>\angle MAN$.

例 16　(1) 一条弧所对的圆心角为 72°，半径为 5，那么这条弧长______.

(2) 扇形的圆心角为 60°，半径为 2，则扇形的面积为______.

(3) 已知扇形的圆心角为 150°，弧长为 20π，那么扇形的面积为______.

命题目的：熟练运用弧长公式 $l=\frac{n\pi r}{180}$，及扇形面积公式 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$ 和 $S=\frac{1}{2}lR$.

解：(1) $l=\frac{72\pi\cdot 5}{180}=2\pi$．填 2π.

(2) $S=\frac{60\pi\cdot 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$．填 $\frac{2}{3}\pi$.

(3) 分析：不管用哪个公式求扇形面积，都必须先确定半径 r 的值．所以应先利用弧长公式求出 r.

$\because l=\frac{150\pi\cdot r}{180}=20\pi$.　　$\therefore r=24$.

$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 20\pi\cdot 24=240\pi$

或者：$S=\frac{150\pi\cdot 24^2}{360}=240\pi$.

思维提升： 此类计算题是中考选择或填空中必考的知识点，所以要熟练掌握.

例 17 (1) 如图 27－23 所示，三个圆是同心圆，图中阴影部分的面积为______.

(2) 如图 27－24，AD 是直径，A、B、C、D、E、F 顺次六等分 $\odot O$，已知 $\odot O$ 的半径为 1，P 为直径上任意一点，则图中阴影部分的面积为______.

命题目的： 通过图形的变换，求某些不规则图形的面积.

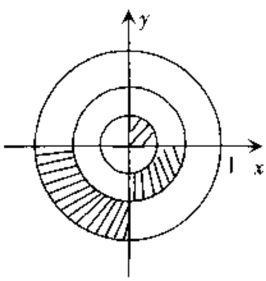


图 27 23

思路点拨： 如图 27－23，很显然，可以通过旋转不同的角度，使阴影部分融合为一个含 90°的扇形.

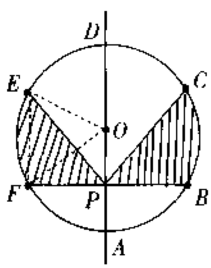


图 27·24

如图 27－24，以点 E、P、F 围成的阴影为例，它不是扇形，但可以转化为扇形. 连结 EF，OE，OF，可以发现，$\triangle OEF$ 和 $\triangle PEF$ 是同底等高的三角形，所以面积自然相等，这就把阴影部分的面积转化为去求扇形 EFO 的面积了.

解： (1) $S_{阴}=\frac{90\pi\cdot 1^2}{360}=\frac{1}{4}\pi$.

(2) 连结 OE、OF，EF.

$\because E$、F 为 $\odot O$ 的六等分点，$\therefore \angle EOF=60°$，

又 $\because OE=OF$，　$\therefore \triangle OEF$ 是等边三角形.

$\therefore EF\parallel PD$.　　$\therefore \triangle OEF$ 与 $\triangle PEF$ 同底等高，即它们的面积相等.

$\therefore S_{阴}=\frac{60\pi\cdot 1^2}{360}\times 2=\frac{\pi}{3}$.

思维提升： (1) 利用图形的平移、旋转把不规则图形转化为规则图形，是中考命题的热点，这类题型在各个实验区的中考题中比比皆是.

(2) 利用"平行线间的距离总是相等"来获得面积上的等量关系，也是各实验区命题的一个方向.

能力拓展： 如图 27－25，四边形 $ABCD$ 的各边长都大于 2，分别以它的顶点为圆心、1 为半径画弧（弧的端点分别在四边形的相邻两边上）. 则这 4 条弧长的和是______.

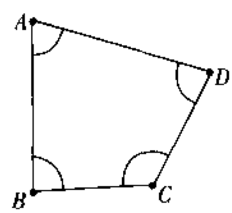


图 27－25

思路点拨： 要求出每条弧长多少，是不可能的. 因为我们不知道 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 到底为多少度. 但求这些弧长的和即求这些角的和. 理由如下：

$$l_{总}=\frac{n_A\pi\cdot 1}{180}+\frac{n_B\pi\cdot 1}{180}+\frac{n_C\pi\cdot 1}{180}+\frac{n_D\pi\cdot 1}{180}$$

$$=\frac{\pi\cdot 1}{180}(n_A+n_B+n_C+n_D)$$

$=\frac{\pi\cdot 360}{180}=2\pi$（其中 n_A、n_B、n_C、n_D 为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的度数）.

答案： 填 2π.

例 18 如图 27－26，实线部分是半