

数学解题研究

SHUXUE JIETI YANJIU GAILUN

概论

主编 朱永生 林立军 刘 莉

哈尔滨地图出版社

数学解题研究概论

SHUXUE JIETI YANJIU GAILUN

主 编 朱永生 林立军 刘 莉
副主编 关 琪 王 智 李持磊

哈尔滨地图出版社
·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

数学解题研究概论/朱永生,林立军,刘莉主编.

哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2006.5

ISBN 7-80717-341-6

I. 数… II. ①朱…②林…③刘… III. 数学-
解题-研究 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 050564 号

哈尔滨地图出版社出版发行

(地址:哈尔滨市南岗区测绘路2号 邮编:150086)

哈尔滨庆大印刷厂印刷

开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:13.812 5 字数:385 千字

2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

印数:1~1 000 定价:31.50 元

前 言

现代数学教育要求大力提高学生的数学素养,这不仅要使学生掌握数学知识,而且要使学生掌握渗透于数学知识中的数学思想和数学方法,使他们能用数学知识和数学思想方法解决实际的应用问题。

我国高等师范院校开设传统的初等数学研究或数学方法论方面的课程确实有助于使学习者掌握数学学科的发展规律与宏观的、系统的数学思想方法理论体系。但它对提升数学解题能力的帮助却很有限。而绝大多数中学师生又在埋头解题,往往因缺乏系统的、可操作性的方法理论指导而迷失方向。为改变这种状况,我们尝试从数学思想、数学方法与解题研究两者的结合上进行探讨,试图做到以数学思想方法指导解题研究,从而提升解题能力;反过来通过解题研究充实数学思想方法理论,并使读者较系统地掌握数学思想方法,两者有机结合,相得益彰。本书编写围绕现行中学数学内容与方法,遵循启发思维、培养能力、提高素质的原则,注重理论性、系统性与科学性相结合,材料典型、新颖,便于学习和讲授。

掌握数学思想与数学方法永远离不开解题活动,读者应首先通过阅读学习,把握该数学思想方法的实质及其运用规范,然后建议读者可以尝试解决每节后面安排的相当数量的习题,最好首先用该节的方法进行解决,之后再尝试运用其他方法解决,尽可能做到一题多法解决,从而达到灵活运用数学思想方法的目的。

本书在编写过程中得到了许多老师的帮助与支持,特别是几位主编老师都做了大量工作,其中关琪老师进行了第三章第九节到第十五节的编写工作。

由于作者的水平和经验有限,加之时间仓促,书中缺点、错误之处

在所难免,诚恳希望广大读者批评指正,谨此表示衷心的感谢。如果本书能在提高数学发现与数学解题能力方面对读者有所助益,我们将为之感到欣慰。

编 者

2006 年 5 月

目 录

第一章 问题解决与数学发现	1
第一节 问题与问题解决	1
第二节 解题研究的现状分析	7
第三节 解题过程基本模式的分析	14
第四节 解题中的发现原则	42
第五节 解题后的再发现	77
第六节 在解题教学中优化学生的思维品质	103
第二章 数学解题思想	121
第一节 解题教学中应渗透数学思想	121
第二节 数形结合思想	125
第三节 分类讨论与分步解决思想	142
第四节 函数与方程思想	165
第五节 化归思想	195
第六节 美学思想	229
第三章 数学解题基本方法	237
第一节 配方法	237
第二节 待定系数法	255
第三节 定义法	263
第四节 换元法	269
第五节 消去法	279
第六节 参数法	290
第七节 递推法	305
第八节 交集法	317
第九节 构造法	322
第十节 特殊与一般法	355

第十一节	类比与归纳法·····	365
第十二节	分析与综合法·····	376
第十三节	比较法·····	384
第十四节	反证法·····	392
第十五节	数学归纳法·····	399
第四章	高考热点问题与解题策略·····	407

第一章 问题解决与数学发现

美国数学家哈尔莫斯(R.R·Halmos)认为,问题是数学的心脏。数学的发展历史也一再印证了“问题是数学的心脏”这种说法,尤其是1900年,当希尔伯特(D.Hilbert)在巴黎国际数学家代表大会上发表《数学问题》的著名演讲之后,数学问题更加成为激励数学家推进数学发展的一种原动力。问题解决是数学教育和数学学习的核心,从20世纪80年代中期开始,不少国家在中学数学教学改革中,都把问题解决列为学校教育的一个中心内容。这里所说的问题解决,包含两个方面的内容:一是发现问题和提出问题;二是解决问题。就我国的情况来说,对于如何发现问题和提出问题,还没有引起人们足够的重视,这方面的研究工作只能说是刚刚开始起步。在解答问题方面,国内多有研究,但往往是就题论题,限于经验归纳,有待于从一般方法论高度进行系统总结,至今仍有一些学校,沉醉于“题海战术”之中,阻碍着学生创造性思维的发展。数学发展过程实质上就是发现问题和解决问题的过程。因此,数学发现的基本思想,完全可用来指导中学数学解题。法国著名数学家阿达玛曾指出:“数学家们从事数学研究工作,固然已属发明的范畴,数学专业的学生在解决一个几何的或代数的问题时,实际上也与数学家们的发明具有同样的性质,只是两者在程度深浅和水平高低上有着差距而已。”^①只要解题目的明确,教学方法得当,在问题解决教学中同样可以培养学生的数学发现与数学创造能力。

第一节 问题与问题解决

一、什么是问题

对于学校数学来说,问题同样是它的核心。波利亚(G·Polya,1887

^① 阿达玛,《数学领域中的发明心理学》,南京:江苏教育出版社,1989

~1985)曾强调指出:“中学数学教学首要的任务就是加强解题训练。”他有一句名言:“掌握数学就意味着善于解题。”

那么,什么是问题呢?

1988年召开的第六届国际数学教育大会的一份报告指出:“一个(数学)问题是一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境。”

日本哲学家岩奇允倒和物理学家宫原将平说:“问题是基于一定科学知识的完成、积累,为解决某种未知而提出的任务。”

三轮辰郎在《问题解决能力的育成》中认为:问题是指那些对于解答者来说还没有具备直接的解决方法,对于解答者构成认识上挑战的这样一种局面。

我国学者张奠宙在《数学教育学》中认为:所谓有问题,是指一个人面临着某种他所谓认识的东西,而对于这种东西他又不能仅仅应用某种典范的解法去解答。

波利亚在《数学的发现》中指出:“所谓‘问题’,就意味着要去找出让适当的行动,以达到一个可见而不能立即可及的目标。”波利亚从教学的角度对问题作了如下的分类:

1. 鼻子底下就有现成的法则。这类问题只要机械地应用某个法则就可能做出来,而所说的法则又是刚刚讲过的或讨论过的。

2. 带有选择性的应用。这类问题可以应用课堂上先前讲过的某一法则或算法获得解决;然而,究竟应当用哪一条法则或算法却不是一目了然,对此需要学生本人判断。

3. 组合的选择。这类问题需要学生对课堂上讲过的两个或更多的法则或例子进行组合。

4. 接近研究水平。这类问题不仅要対法则或例子进行组合,而且需要更多的创造性。

还可以列出一些提法,但是不管有多少种不同的叙述,都离不开这样一个本质:“问题”反映了现有水平与客观需要的矛盾。从系统论的角度看,如果对某人来说,一个系统的全部元素、元素的性质和元素间

的关系,都是他所知道的,那么这个系统对于他就是稳定系统。如果这个系统中至少有一个元素、性质和关系是他所不知的,那么这个系统就是一个问题。如果这个问题系统的元素、性质和关系都是有关数学的,那么它就是一个数学问题。

因此,一个系统能否算一个问题,与接触它的人有关。一个系统对甲可能是一个问题,对乙就可能不是一个问题。例如,“歌德巴赫猜想”对试图解决它的所有人而言都是一个问题。下面的解方程问题:

$$x^2 - 5x^2 + 4x = 0 \quad (1)$$

$$y^3 - 6y^2 - 4y = 6 \quad (2)$$

对于某些学生来说,它们都是问题,而对于另一些学生它们则不成为问题;也可能(2)是问题,而(1)不是问题。一个问题一旦可以使用以前学会的算法轻易地解答出来,那么它就不再被认为是一个问题了。

对于学生来说,数学问题是运用已有的数学概念、理论或方法,经过积极探索、思考才能解决的问题。而这样的问题应满足下述三个特性:

(1)接受性。学生愿意接受这个问题,并且具有解决它的知识基础和能力基础。这里,个人对问题的接受是有着各自的状况的,包括内部的动因和外部的动因,也可能仅仅产生于经受解答问题的欢乐愿望。

(2)障碍性。学生不能直接看出它的解法和答案,而必须经过思考才能解决,也许最初解答尝试没有结果。

(3)探究性。学生不能按照现成的公式或常规的套路去解,需要进行探索和研究,寻找新的处理方法。

二、问题解决

我们说过,波利亚有句脍炙人口的名言:“掌握数学就意味着善于解题”,在这里,“解题”近于“掌握数学”的同义语了。确实,数学工作者每日每时都离不开解题。

解题是数学工作者数学活动的基本形式;解题是数学工作者数学活动的主要内容;解题是数学工作者的一个存在目的;解题是数学工作者的一个兴奋中心。

不过需要指出的是,现代兴起的“问题解决”(problem solving)比传

统意义上的“解题”有了很大的发展,传统意义的“解题”注重结果、注重答案,而现代意义的“问题解决”则更注重解决问题的过程、策略以及思维的方法。

一个学生拿到一道题之后,通过翻看习题集的答案得到了解决,当然这个答案是正确的,但能否认为他解决了问题呢?从“问题解决”的观点看来,回答是否定的。同样,一个教师讲解一条几何定理时,没有任何知识的发生过程,小黑板一挂,辅助线作好了,证明和盘托出了,也是一个不成功的“解题”。

“问题解决”的含义是什么?比较典型的观点可归纳为以下五种:

1. 问题解决是心理活动

指的是“人们在日常生活和社会实践中,面临新情境、新课题,发现它与主客观需要的矛盾而自己却没有现成对策时,所引起的寻求处理问题办法的一种心理活动。”(邵瑞珍,1982)

2. 问题解决是一个过程

美国数学管理者大会(NCSM)在《21 世纪的数学基础》(1988)中,把“问题解决”定义为“将先前已获得的知识用于新的,不熟悉的情境的过程”。这就是说,问题解决是一个发现的过程、探索的过程、创新的过程。

3. 问题解决是一个目的

美国数学管理者大会(NCSM)在《21 世纪的数学基础》(1988)中认为“学习数学的主要目的在于问题解决”。因而,学习怎样解决问题就成为学习数学的根本目的。此时问题解决就独立于特殊的问题,独立于一般过程或方法,也独立于数学的具体内容,“20 世纪 80 年代以来,世界上几乎所有的国家都把提高学生的问题解决的能力作为数学教学的主要目的之一”(E. A. Silver)。

4. 问题解决是一种能力

“那种把数学用之于各种情况的能力,叫做问题解决。”(英国 cockcroft 报告,1982)美国全国数学管理者大会(NGM)把解决问题的能力列为 10 项基本技能之首。重视问题解决能力的培养,发展问题解决的能力,其目的之一,是在这个充满疑问、有时连问题和答案都不确定的

世界里,学习生存的本领。

5. 问题解决是一种教学类型

“在英国,教师还远没有将‘问题解决’的活动形式看做教或学的类型。他们倾向于将其看成课程附加的东西。应将‘问题解决’作为课程论的重要组成部分。”(cookcroft 报告,1982)

上述各种解释,在形成上似乎并不一致,但它们所强调的共有的东西,即:(1)问题解决不应仅仅理解为一种具体的技能,它是所有学生必须具备的一种能力,人们无论从事何种实践活动都离不开它。(2)在问题解决的过程中,需要用到分析、综合、抽象、概括、想像等多种对于人的发展有着重要作用的智力活动。(3)“问题解决”在教学中为学生提供了一个发现、创新的环境和机会,为教师提供了一条培养学生解题能力、自控能力和应用数学知识能力的有效途径。所以,它应该是数学教育所体现的一条主线。

而对于学生来说,问题解决是指综合地、创造性地运用各种数学知识和方法去解决那种并非单纯练习题式的问题,包括实际问题 and 源于数学内部的问题。在进行问题解决时,学生必须综合所学得的知识,并把它用到新的、困难的状况中去,这就需要学生使用恰当的方法和策略,需要探索和猜想。

因此,问题解决比传统意义上的“解题”有了很大的发展。传统意义的解题只注重结果,注重答案,而现代意义的问题解决更注重解决问题的过程、策略以及思维的方法。问题解决的过程是发现的过程,问题解决能力提高的基础是虚心,是好奇和探究精神,是进行试验和猜测的意向。因此,在数学教学中应该注意:(1)给学生提供一种轻松愉快的气氛和生动活泼的问题情境;(2)从学生的已有经验出发提出问题,引起学生对结论的迫切研究的愿望,将学生置于一种主动参与的位置;(3)大胆鼓励学生运用直觉去寻求解题策略,必要时可给一些提示,并适当延长时间;(4)讨论各种成功的解法,如果可能的话,和以前的问题联系起来,对问题进行推广,概括出一般原理。

三、解答数学题的基本要求

解答数学题,有一定的规格要求。基本要求是:正确、合理、完满、简捷、清楚、熟悉并实践这些要求,对于增强解题能力,养成良好的解题习惯,具有十分重要的作用。

1. 解题要正确

解题的正确性,是指在解题过程中,运算、推理、作图和所得的结果都正确无误。这是最基本的解题要求,如果把题目解错了,那么整个解答也就失去意义了。

要做到解题正确,首先要认真审题,弄清楚题目的已知、未知和条件;其次要仔细分析题中的各种数量关系,利用学过的基础知识,寻求正确的解题方法,并在解题过程中做到每一步运算、推理、作图都没有差错。如果以上各步都正确的话,那么所得结果一般说来是正确的。

正确的东西总是在不断克服错误的过程中确立起来的。因此,经常地、不知疲倦地分析解题中的错误现象,找出产生错误的原因,对于提高解题的正确性是很有帮助的,一般说来,解题中产生错误的原因,大致有三个方面:一是粗心大意,如看错题目,抄错数据,画错图形等;二是对于所应用的概念、定理或公式,缺乏深刻的认识,忽视了有关限制条件;三是在推理过程中没有遵守相应的逻辑规则。

2. 解题要合理

解题的合理性,是指列式、运算、推理、作图都有充足的理由。也就是说,解题的每一步都有已知的定义、规律、真实命题或已知条件为依据,而且遵循正确的思维形式和思维规律。这一要求直接关系到解题的正确性。

要做到解题合理,关键在于不断提高逻辑思维能力,重视数学基础知识对解题的指导作用。此外,在解题时还要防止简单模仿,防止生搬硬套公式、定理。

3. 解题要完满

解题完满是指周密地考虑题目所指出的全部问题,详尽无遗地求出全部结果。题目无解时,要说明其理由;不合题意的解,要予以剔除;

解答需要检验时,必须进行验算;含有参数的问题,应根据参数的取值范围作全面的讨论。

要做到解答完满,关键在于细心审题,精心联想有关的基础知识,充分利用题目的条件,特别要发掘隐于题中的已知条件。

4. 解题要简捷

解题简捷是指采用简单迅速的解题方法。同一个数学题,解答方法往往不只一种,其中有的较为简捷,有的则较为复杂。在解题时,要力求选择能够最快达到解目标的方法和途径。

要做到解题简捷,在解题时应瞻前顾后,正确处理运算的各个环节之间的关系;通观全局,正确处理整体和局部的关系;从多方面看问题,正确处理正面和侧面、直路和弯路的关系。

5. 解题要清楚

解题清楚是指题解条理清晰,书写合乎规范。一般说来,解题格式应以教科书为标准,在书写时要字迹清楚,疏密合度,行款得体,既不遗漏,也不重复。

同时,还要根据学习阶段的不同,做到详略适度。例如,初学某种运算时,每步运算都应当清楚地写出来;在熟练地掌握了这种运算之后,就可以省略其中比较明显的步骤。又如,在初学几何证明时,每一步推理都要写明理由,而在熟练掌握证明方法后,就不必步步详细写出,只要把关键步骤的论据写清楚就可以了。

要做到解题清楚,首先要增强自己的逻辑表达能力,重视数学语言的训练,弄清数学名词、术语、符号的具体内容、意义、读法、写法和用法。同时,还要不断克服字迹潦草、绘图马虎等不良习惯。

第二节 解题研究的现状分析

解题是初等数学中一个极有生命力、极富独创性和充满诗情画意的工作。因此,数学解题的研究从来就是一个十分激动人心的课题,从基层工作者到前沿数学家都情不自禁地参与其中。尽管许多盲目的、

重复性的工作能否称为研究很值得怀疑,但依然表现出健康的主流。

一、解题研究的健康主流

主要表现为七个方面:

1. 数学方法论的理论研究受到了重视,得到了发展

1980年出版的《中学数学教材教法》(总论)在指出“一些基本的数学思想和数学方法”也是“基本知识”时,批评说:“中学数学内容中的这些基本方法从来没有受到足够的重视,甚至连基本的总结也做得很不够……”这些权威教学法专家们的意见,基本上反映了1980年以前的情况。

但是,进入20世纪80年代以后,情况有了很大的改变。特别是在徐利治教授的倡导下,数学方法论的研究已经形成了一个影响全国的气候,郑毓信教授在《数学方法论》一书中有一段意味深长的开头:“数学方法论”现今对于我国数学界、特别是数学教育界已不是一个陌生的名称;然而,大多数人却未必知道,这只是一个在中国学术界得到广泛应用的名词,或者说,这在很大程度上即是一个由我国学者首先加以应用的名词。从有关材料看,徐利治教授在1980年出版的《浅谈数学方法论》中首先采用了这样一个名词。

如今,数学方法论的研究已经得到了很大的发展,既诞生有高层次的专著,更出现了大批普及型的书籍与文章。数学方法论或中学数学方法论已经成为师范院校研究生、本科生、专科生和教师进修的一门时髦课程,同时也成为中国学者在世界同行中引以为自豪的一个学术特色。

2. 波利亚学说的研究和传播

波利亚的《怎样解题》,早在20世纪40年代就曾有过中译本(周佐严译、中华书局出版)。60年代初我国曾有人翻译《数学的发现》,但由于种种原因未能完成。现在,波利亚的名著《怎样解题》(1945年)、《数学与似真推理》(1954年)、《数学的发现》(1962年)等已经翻译发行。其中的解题观点正在成为许多同行研究解题的指导思想;国内一些学者还召开了波利亚数学思想的讨论会;关于波利亚解题观的研究正在深入;一批波利亚型的数学工作者在成长。所有这一切,使得数学解题的研究,摆脱了就题论题的狭窄天地,进入到规律探索的较高层次。

3. 数学奥林匹克的异军突起

数学竞赛也是一种解题竞赛,这种活动的开展一方面为初等数学源源不断地输入具有大学性质的、体现现代数学的思维方式,另一方面又调动和活化了初等数学潜在的方法与技巧。这两方面的结合,就为解题研究输入了新鲜的血液。

数学竞赛里充满着眼花缭乱的“技巧”:构造、映射、递推、区分、染色、极端、对称、配对、特殊化、一般化、数字化、有序化、不变量、整体处理、变换还原、逐步调整、奇偶分析、优化假设、计算两次、辅助图表……值得注意的是,这些“技巧”不是个别孤立的一招一式或妙手偶得的雕虫小技,而是一种高思维层次、高智力水平的策略思想。这一切,又为解题研究提供了新鲜而丰富的素材。

数学竞赛所造就的教练员队伍,除个别为徒有虚名之外,其主力全是出类拔萃的解题专家或炉火纯青的技巧大师,这是解题研究的一支生力军。

就是说,数学竞赛的内容、方法和队伍正以排山倒海之势推动解题研究的发展(也推动初等数学研究的发展)。中国中学生在国际数学奥林匹克(IMO)中的成绩与优势,从一个侧面反映了我国解题研究的兴旺发达。

4. 数学解题的研究正与思维科学的成果相结合

数学思维问题是数学教育的核心问题。斯托利亚尔在《数学教育书》一书中指出:数学教学是数学(思维)活动的教学。他在列举数学教育目的时,把发展学生的数学思维放在第一位。

由于钱学森教授的大力倡导,“思维科学”在我国已经发展为一门独立的学科,它给数学思维的研究提供了方向性的启示。近年来,关于数学思维的模式,数学非逻辑思维(包括形象思维、直觉思维),数学思维的指向性(如定向思维、逆向思维、收敛思维、发散思维等),数学思维品质的培养(如广阔性、深刻性、灵活性、敏捷性、批判性、创造性等)等方面的研究,正在揭示数学发现的秘密,同时,也为解题能力的提高指明了途径。这不仅深化了数学解题的研究,而且也促进了解题教学的发展。

5. 解题研究的层次已经深入到策略思想的高度

我国的数学解题研究终于从一招一式的归类中摆脱出来,解题教学中的策略意识已经受到了重视,也提出了许多解题策略,在戴再平著的《数学习题理论》中列举了8条,在任樟辉著《数学思维论》里又列举了10条。有些策略思维,如化归、RMI原理、以退求进、正难则反等还讨论得很深入、很细致,也很有数学特征,而不仅仅是“逻辑+数学例子”。

6. 初等数学学术研究形成高潮

以初等数学为基本内容的中国解题研究,从20世纪80年代起,逐渐把初等数学的学术研究推向高潮,1991年8月在天津召开了首届全国初等数学学术交流会是一个重要的标志。之后,若干省市相继成立了初等数学研究会,多家刊物开辟了初等数学研究新成果专栏,多本初等数学研究著作陆续出版。研究初等数学已经成为许多数学家和数学教育家共同关心的一大课题。目前这种研究主要集中在3个方面。其一是继续搜寻初等数学的新结论,为初等数学的理论宝库增添新的财富;其二是阐述代数学与初等数学的联系,为现代数学的发展提供深刻的背景;其三是既作为解题理论提炼的基本素材,又作为解题理论检测的实验园地。这三方面的工作,使得解题理论研究不再是一株只开花不结果的绿树。

7. 解题学派初步形成

方法研究、竞赛研究、高考研究、思维研究、教法研究等各路大军都在“解题”的结合点上汇聚,组成一支浩浩荡荡的解题研究实干家群体,这是解题研究的一个极为壮观的成果。各路大军各有自己的目的和方向,但都离不开解题活动,这就为解题研究带来了多角度、多层次的贡献,同时也为解题研究带来了多角度、多层次的应用,使得解题研究更加五彩缤纷,充满朝气与活力。

二、解题研究的存在问题

解题研究中的主要问题是还存在着一些片面的认识与盲目的实践,我们指出四点。

1. 取消论

认为随着数学内容的学习,数学知识的丰富,解题方法可以自然而