知识树考研

2008考研白皮书系

全国硕士研究生入学统一考试

数学综合题解题方法与技巧

（数学三、四）

文登培训学校策划

主编/陈文灯　副主编/陈启浩

- 精选内容新颖、涵盖面广、前瞻性强的综合题
- 贴近考纲、贴近考题、贴近考生，是摘取高分的平台

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

KNOWLEDGE TREE
知识树考研

2008考研白皮书系

全国硕士研究生入学统一考试

数学综合题解题方法与技巧

（数学三、四）

主编／陈文灯　副主编／陈启浩

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学综合题解题方法与技巧. 3、4 / 陈文灯主编. —北京:
北京理工大学出版社,(2007.3 重印)
(考研白皮书系)
ISBN 978-7-5640-1033-1

Ⅰ.数…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学
考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 033435 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 16.25
字　　数 / 380 千字
版　　次 / 2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 2 次印刷
定　　价 / 32.00 元

前　言

“高等数学”、“线性代数”和“概率论与数理统计”是目前大学理工科、经济管理类各专业的重要基础课，是硕士研究生入学考试的最重要科目。

纵观21年的考研试题，发现一个明显的特点：综合题越来越被重视，不仅出现在解答题中，也频频出现在单选、填空题中。因此，提高解综合题的能力成了考生亟待解决的问题。

如何提高解综合题的能力？首先，要夯实基础，把握各知识点；其次，加强解综合题方面的训练。据了解，经过综合题系统训练的考生，无论对基本知识的理解，或是对解题方法的掌握都较一般考生的水平高出许多。为此，我们推出《数学综合题解题方法与技巧(数学一、二)》、《数学综合题解题方法与技巧(数学三、四)》系列丛书，供广大考生复习、练习使用，尽快提高这方面的能力。

全书共分“高等数学”、“线性代数”及“概率论与数理统计”三篇，每篇又分若干章、节，每章(或节)都由“简明提要”和“例题”两部分组成，其中，“简明提要”简单地叙述该章(或节)的最主要内容；“例题”中的例子，不仅内容新颖、涵盖面广，而且前瞻性强，每个例子都通过“分析”、“详解”及“评注”作了精妙的解析和有益的拓展。

我们曾于2005年出版《综合题解析》一书，深受广大考研学子的欢迎。现在出版的这套丛书是在《综合题解析》的基础上，经精心的修订、加工和增补，使其更贴近考纲，更贴近考题，更贴近考生，成为考生摘取高分的又一个平台。

预祝广大考研学子在不久的考试中取得骄人的成绩，并请对本套丛书提出宝贵意见。

编著者

2007年1月于北京

目　录

注　凡书中带有 * 号的章、节和例题，都不在数学四范围内。

第一篇 微积分

第一章 极限与连续

§1.1.1 数列极限

简明提要

数列极限除使用运算法则计算外，还可以借助函数极限及数列极限存在准则等计算：

1. 借助函数极限计算数列极限

设数列 $x_n = f(n), n = 1,2,\cdots$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

这里特别要指出的是以下情形：

设数列 $x_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}, n = 1,2,\cdots$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$(或 ∞)，

此时不能直接对 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$ 应用洛必达法则，而应先考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，对它应用洛必达法则.

2. 两个数列极限存在准则

准则Ⅰ 设数列$\{x_n\}$，如果可以找到另外两个数列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$，它们满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，且 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1,2,\cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

准则Ⅱ 如果数列$\{x_n\}$单调不减(单调不增)，且有上界(有下界)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

本节给出 5 个数列极限与高等数学其他部分结合的综合题例子.

例　题

例 1.1.1 设两条曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt$ 在点(0,0)处的切线相同，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

【分析】由于$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}-0}$，所以只要利用题设条件算出函数极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$即可.

【详解】由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{x=0}$$（利用两条曲线在点(0,0)处切线相同）

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\Bigg|_{x=0}=1,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2\times 1=2.$$

【评注】(Ⅰ)本题是数列极限计算与导数定义及曲线切线等的综合题.

(Ⅱ)顺便指出曲线$y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$有以下两个性质：

(a) 所给曲线在$[0,+\infty)$上单调上升；

(b) 由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{记}}A$，所以，所给曲线有水平渐近线$y=A$.

例 1.1.2　设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geqslant 0)$，

(1) 求$f(x)(x\geqslant 0)$的表达式；

(2) 求$f'(x)(x\geqslant 0)$的表达式.

【分析】(1) 分$0\leqslant x\leqslant 1$，$1<x<2$和$x\geqslant 2$三种情形计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$，即得$f(x)$的表达式.

(2) 由(1)算得的$f(x)$计算$f'(x)$.

【详解】(1) 当$0\leqslant x\leqslant 1$时，由于

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3},$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以由数列极限存在准则Ⅰ得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

当　$1<x<2$时，由于

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3}x$$

及$\lim\limits_{n\to\infty}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x=x$，所以由数列极限存在准则Ⅰ得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+x^n}{x^2}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x$.

当$x\geqslant 2$时，由于

$$\frac{x^2}{2} < \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1} < \sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}$，所以由数列极限存在准则Ⅰ得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}$.

从而
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(2) 显然，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f'(x)=0$，当 $1<x<2$ 时，$f'(x)=1$；当 $x>2$ 时，$f(x)=x$. 下面计算在 $x=1$ 与 $x=2$ 处的导数：

由于
$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

所以，$f'(1)$ 不存在.

由于
$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}=1,$$
$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{x^2}{2}-2}{x-2}=2,$$

所以，$f'(2)$ 不存在.

从而
$$f'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ 1, & 1<x<2,\\ x, & x>2.\end{cases}$$

【评注】(Ⅰ) 本题是数列极限与导数概念等的综合题.

(Ⅱ) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件为 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. 这一结论对判断分段函数在分段点处是否可导或计算分段函数在分段点处的导数是很有用的.

例 1.1.3　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】(1) 由于数列 $\{x_n\}$ 是由递推公式定义的，因此利用数列极限存在准则 Ⅱ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出它的值.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且令 $t=x_n$，则要计算的极限成为

$$\lim_{t\to a}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}.$$

【详解】(1) 由数列 $\{x_n\}$ 的定义知，对 $n=1,2,\cdots$，有

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n,$$

即$\{x_n\}$是单调减少有下界数列，因此由极限存在准则 Ⅱ 知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \in [0,\pi)$，对

$$x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$$

的两边令$n\to\infty$得 $a = \sin a$. 在$[0,\pi)$上该方程有唯一解$a = 0$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} \xlongequal{令 t = x_n} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}}. \qquad ①$$

将 ① 中的t看作连续变量，则有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\right]}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t - t}{t^3} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t - 1}{3t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = -\frac{1}{6}. \qquad ②$$

将 ② 代入 ① 得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是数列极限与函数极限(未定式)计算的综合题.

(Ⅱ) 当数列$\{x_n\}$由递推公式定义时，一般总是利用数列极限存在准则 Ⅱ 确定$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的存在，有时还能通过对递推公式两边求极限得到$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的值.

(Ⅲ) 本题(2) 最后归结为计算“1^∞”型未定式极限. 在计算过程中，以下三点值得注意：

(a) 利用$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}}$将计算“$1^\infty$”型未定式的极限转化为计算“$\frac{0}{0}$”型未定式极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^2}.$$

(b) 两次利用等价无穷小代替：$t\to 0^+$时

$$\ln\left[1+\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\right] \sim \frac{\sin t}{t}-1, \cos t - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$$

使得计算简化.

(c) 对“$\frac{0}{0}$”型未定式极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t - t}{t^3}$使用洛必达法则.

例 1.1.4 (1) 证明不等式$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$对一切$x\in(0,+\infty)$成立；

(2) 计算定积分$\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$；

(3) 利用(1)(2) 计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right]$.

【分析】(1) 利用导数证明所给的不等式.

(2) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 计算 $\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x$.

(3) 由于和式 $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$ 与 $\frac{1}{2+\cos x}$ 在$[0,\pi]$上的积分和式 $\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$ 相似,所以利用(1) 的不等式对 $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos x}$ 作适当的放大与缩小,然后利用数列极限存在准则计算所给的数列极限.

【详解】(1) 对 $x\in(0,+\infty)$,$\sin x<x$ 显然成立,下面证明 $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x$.

记　$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$,则由

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2=-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x^2$$

$$>-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2}x^2=0$$

知　$f(x)>f(0)=0$,即

$$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x(x>0).$$

(2)
$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }t=\tan\frac{x}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2}{3+t^2}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 由(1) 知对 $n=1,2,\cdots$ 有

$$\left[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}<\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}<\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

由于　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right\}$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{2+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

所以,由数列极限存在准则 Ⅱ 得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是数列极限与导数应用、定积分计算等的综合题.

（Ⅱ）设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad ①$$

但题中(3)的和式 $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$ 不具有①中和式的形式，因此利用(1)的不等式对其作适当的放大与缩小，再由数列极限存在准则 Ⅰ 求得数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)$. 这种解题思路是值得学习的.

（Ⅲ）这里要指出的是，(3)还有更便捷的计算方法：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=1\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

例 1.1.5 设函数列 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n=2,3,\cdots)$.

(1) 证明方程 $f_n(x)=1$ 在$(0,+\infty)$上有唯一的实根 x_n；

(2) 证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值(记为 a)；

(3) 求函数 $f(x)=\int_{-a}^{x}t\mid t\mid\mathrm{d}t$ 的表达式.

【分析】(1) 利用连续函数零点定理证明方程 $f_n(x)=1$ 在$(0,+\infty)$上有实根，再用 $f_n(x)-1$ 的单调性证明上述实根是唯一的.

(2) 利用数列极限存在准则 Ⅱ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并对 $f_n(x_n)=1$ 两边取极限求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的值.

(3) 利用分段函数 $t\mid t\mid$ 的积分确定 $f(x)$ 的表达式.

【详解】(1) 对 $n=2,3,\cdots$，记 $\varphi_n(x)=f_n(x)-1$，则 $\varphi_n(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $\varphi_n(0)=-1<0$，$\varphi_n(1)=n-1>0$. 所以由连续函数的零点定理知方程 $\varphi_n(x)=0$ 在$(0,1)\subset(0,+\infty)$内有实根. 由

$$\varphi_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0(x\in(0,+\infty)),$$

即 $\varphi_n(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调增加，所以方程 $\varphi_n(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上有且只有一个实根. 即方程 $f_n(x)=1$ 在$(0,+\infty)$上只有唯一的实根，记为 x_n.

(2) 由于 $x_n>0(n=2,3,\cdots)$，所以数列$\{x_n\}$有下界. 下面证明$\{x_n\}$是单调减少的. 事实上，对 $n=2,3,\cdots$ 有

$$0=f(x_n)-f_{n+1}(x_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n) - (x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1}) \\
&= (x_n - x_{n+1}) + (x_n^2 - x_{n+1}^2) + \cdots + (x_n^n - x_{n+1}^n) - x_{n+1}^{n+1} \\
&= (x_n - x_{n+1})[1 + (x_n + x_{n+1}) + \cdots + (x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1})] - x_{n+1}^{n+1},
\end{aligned}
$$

即　$(x_n - x_{n+1})[1 + (x_n + x_{n+1}) + \cdots + (x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1})] = x_{n+1}^{n+1} > 0.$

所以 $x_n > x_{n+1}(n = 2,3,\cdots)$，即$\{x_n\}$ 单调减少. 于是，由数列极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a.

由 $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 < 1$ 得 $0 \leqslant x_n^n \leqslant x_2^n(n = 2,3,\cdots)$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n = 0$.

对 $f_n(x_n) = 1$，即$\dfrac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} = 1$ 的两边令 $n \to \infty$ 取极限得

$$\frac{a}{1-a} = 1, \text{即 } a = \frac{1}{2}.$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \dfrac{1}{2}$.

(3)$f(x) = \int_{-a}^{x} t\,|\,t\,|\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} t\,|\,t\,|\,dt$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{x} -t^2\,dt, & x \leqslant 0, \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} -t^2\,dt + \int_{0}^{x} t^2\,dt, & x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{24} - \dfrac{1}{3}x^3, & x \leqslant 0, \\ -\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{3}x^3, & x > 0 \end{cases} \\
&= -\frac{1}{24} + \frac{1}{3}|\,x\,|^3.
\end{aligned}
$$

【评注】(1) 本题是数列极限与闭区间上连续函数性质及分段函数积分等的综合题.

(2) 当函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ 时，由连续函数的零点定理知 $f(x)$ 在(a,b)内实根；如果 $f(x)$ 在(a,b) 内还具有 $f'(x) > 0$(或 $f'(x) < 0$) 的性质，则可以进一步推断方程 $f(x) = 0$ 在(a,b) 内只有唯一的实根.

(3) 在(2) 中，为了计算 $a = \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值，需先求数列$\{x_n^n\}$ 的极限. 题解中，这一极限，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n$ 是利用极限存在准则 Ⅰ 来计算的.

§1.1.2　函数极限

简明提要

函数极限中最主要的是未定式极限的计算. 未定式共有七种：

$$“\frac{0}{0}”, “\frac{\infty}{\infty}”, “\infty - \infty”, “0 \cdot \infty”, “1^{\infty}”, “0^0” \text{ 以及 } “\infty^0”.$$

1. “$\dfrac{0}{0}$”型未定式极限有三种常用计算方法

(1) 利用重要极限. 重要极限有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right).$$

此外,以下三个极限也是常用的.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$$

(2) 等价无穷小代替.这一方法的理论基础是:

设 $\alpha(x),\beta(x),\alpha_1(x),\beta_1(x)$ 都是在自变量 x 的某个变化过程中的无穷小,且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$.如果在自变量 x 的这个变化过程中,$\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或无穷大,则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

常用的等价无穷小有:$x\to 0$ 时

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$

$\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^{x}-1\sim x,(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\neq 0),1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}.$

注 当函数 $f(x)$ 比较复杂,它的等价无穷小不易找到时,可以利用泰勒公式.

(3) 使用洛必达法则."$\frac{0}{0}$"型洛必达法则简述如下:

设在自变量 x 的某个变化过程中有 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$,如果在 x 的这个变化过程中有 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2."$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限有两种计算方法

(1) 将"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限转化为"$\frac{0}{0}$"型未定式极限.

(2) 使用洛必达法则."$\frac{\infty}{\infty}$"型洛必达法则简述如下:

设在自变量 x 的某个变化过程中有 $\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$,如果在 x 的这个变化过程中有 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3.其他五种的未定式极限都可通过函数的恒等变形或变量代换转化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限,然后按"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式极限计算方法计算.

本节给出 7 个未定式极限计算与高等数学其他部分相结合的综合题例子.

例 题

例 1.1.6 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0,f'(0)=1$,求极限 $\lim_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

【分析】 由题设知 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$,所以 $x\to 0$ 时,

$$\ln[1+2f(x)]\sim 2f(x).$$

由此即可算得所求的极限.

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+2f(x)]}{\ln(1+x)}}$,

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+2f(x)]}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x}$（由于$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$,所以 $\ln[1+f(x)]\sim f(x)(x\to 0)$)

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=2\times 1=2,$$

所以,$\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e^2$.

【评注】(Ⅰ) 本题是函数极限与导数定义等的综合题.

(Ⅱ) 本题的极限计算有以下两点值得注意:

(a) 利用 $f(x)$ 连续和 $f(0)=0$ 得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,即 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小,从而有

$$\ln[1+2f(x)]\sim 2f(x)(x\to 0).$$

(b) 由于 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导,所以对极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x}$不能使用洛必达法则,而要利用导数定义计算.

例 1.1.7 设二元函数 $f(x,t)=\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^2dy}{\left[\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}(x>0,t>0)$.

(1) 求函数 $I(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)(t>0)$ 的表达式;

(2) 求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)$.

【分析】(1) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)$ 时应注意的是,$f(x,t)$ 中只有分母与 x 有关.

(2) 为了计算$\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)$,应通过交换积分次序将它的分子部分$\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^2dy$ 的 t 集中到外层积分的上限,以便使用洛必达法则.

【详解】(1) 由于对 $t>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)},$$

其中,
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{t^2}\right)\right]}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{t^2}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\frac{1}{t^2}}{1+\left(\frac{x}{t^2}\right)^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}t^2,$$

所以， $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}t^2}\ (t>0)$，从而

$$I(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x,t)=\frac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy}{(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) 由于 $\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy=\iint\limits_D\sin y^2dy$（其中 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant t,0\leqslant x\leqslant\sqrt{t}\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant t\}$）

$$=\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{y}}\sin y^2dx=\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy.$$

此外， $(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}\sim-\dfrac{2}{\pi}t^2\cdot t^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}\ (t\to0^+)$，

所以，
$$\lim_{t\to0^+}I(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy}{(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{-\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t}\sin t^2}{-\frac{7}{\pi}t^{\frac{5}{2}}}=-\frac{\pi}{7}.$$

【评注】(Ⅰ)本题是未定式极限计算、积分上限函数求导及二次积分交换积分次序等的综合题.

(Ⅱ)本题的核心问题是计算未定式的极限，在题解中运用了计算未定式极限的两个常用技巧：

(a) 计算“1^∞”，“0^0”和“∞^0”型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$，按以下方法转化成计算“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式极限：

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}};$$

(b) 计算“$\dfrac{0}{0}$”型未定式极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，一般先对 $f(x)$ 或 $g(x)$ 用等价无穷小代替，然后再考虑用洛必达法则.

本题解答中有两处使用了等价无穷小代替：

$\ln\left[1-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)\right]\sim-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)(x\to+\infty)$， $(e^{-\frac{2}{\pi}t^2-1})\arctan t^{\frac{3}{2}}\sim-\dfrac{2}{\pi}t^2\cdot t^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}\ (t\to0^+)$.

但是，当 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是积分上限函数时，则应首先使用洛必达法则，目的是消去 $f(x)$ 或 $g(x)$ 中的积分运算.

例 1.1.7* 　设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{2^n(2n+1)!}t^{2n+1}$ 的和函数为 $s(t)$，求

(1) $s(t)$ 的表达式；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-\dfrac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}$.

【分析】(1) 利用 $\sin t$ 的麦克劳林展开式求 $s(t)$ 的表达式.

(2) 利用等价无穷小代替洛必达法则计算所给的"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限.

【详解】(1) 由于 $\sin t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1}(-\infty<t<+\infty)$，所以

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n+1)!}t^{2n+1}=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}(-\infty<t<+\infty).$$

(2) 由于在点 $x=0$ 的充分小邻域内有

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x&=\left[1+\frac{1}{3}x+o(x^2)\right]-[1+x+o(x^2)]\\&=-\frac{2}{3}x+o(x^2),\end{aligned}$$

即 $\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x\sim-\dfrac{2}{3}x(x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{s(x)-x}{-\frac{8}{3}x^3}=-\frac{3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{x^3}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{3x^2}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{32}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是未定式极限计算与幂级数求和等的综合题.

(Ⅱ)(2) 的极限也可如下计算：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}.\end{aligned}$$

由于在点 $x=0$ 的充分小邻域内有

$$-2\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)-\frac{x^2}{2}=-2\left[\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4+o(x^5)\right)-1\right]-\frac{x^2}{2}$$

$$=-\frac{1}{48}x^4+o(x^5),$$

所以，$-2\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)-\frac{x^2}{2}\sim-\frac{1}{48}x^4(x\to0)$. 从而

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{48}x^4}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x)}=-\frac{1}{48}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\mathrm{e}^x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{1}{48}\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}-\mathrm{e}^x}=-\frac{1}{48}\times\frac{1}{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{32}.$$

例 1.1.8 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，求

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；

(2) 二阶导数 $f''(0)$.

【分析】(1) 由题设 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，因此由

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}$$

知只要算出极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$ 即可.

(2) 对(1)算得的极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$，由洛必达法则可得 $f''(0)$ 的值.

【详解】(1) 由于 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$ 知 $\lim\limits_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，所以

$$\mathrm{e}^3=\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}}=\mathrm{e}^{1+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}.$$

由此得到 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2. \qquad ①$$

从而 $$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2.$$

(2) 由(1)推得的 $\lim\limits_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可以得到

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0,f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

于是由 ① 得

$$2=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0),$$

即 $f''(0)=4$.

【评注】(Ⅰ) 本题是关于抽象函数 $f(x)$ 的未定式极限计算和二阶导数计算的综合题.