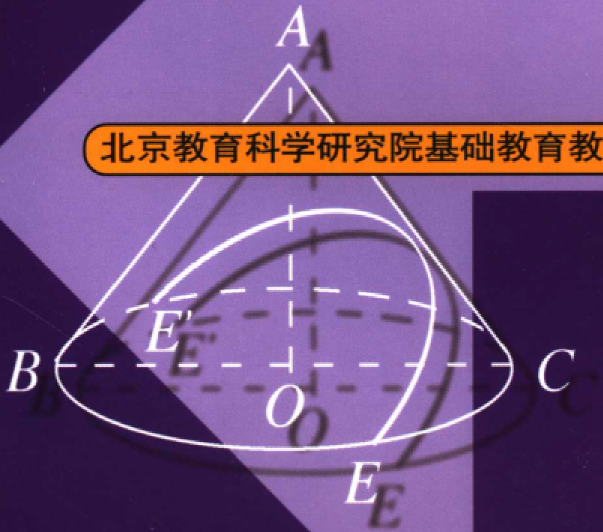
北京市高中数学补充教材

圆锥曲线

SHUXUE



北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

封面设计：李　梅

ISBN 7-81064-578-1

9 787810 645782 >

ISBN 7 - 81064 - 578 - 1/G · 411
定价：5.10元

北京市高中数学补充教材

圆锥曲线

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材

YUANZHUI QUXIAN

圆锥曲线

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社出版发行

地　　址　北京西三环北路 105 号

邮　　编　100037

电　　话　68418523(总编室)　68982468(发行部)

网　　址　www.cnup.cnu.cn

E-mail　cnup@mail.cnu.edu.cn

北京飞达印刷有限责任公司印刷

全国新华书店发行

版　次　2006 年 6 月第 1 版

印　次　2006 年 6 月第 1 次印刷

开　本　890mm×1240mm　1/32

印　张　4.25

字　数　100 千

定　价　5.10 元

前　　言

高中数学是义务教育后普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神.

为全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用.

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求. 教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用.

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦.《圆锥曲线》一册的编者有：王建民、段云鑫、乔荣凝、刘美伦（兼统稿）.

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学. 由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师与学生提出宝贵意见.

编　者

2003 年 3 月

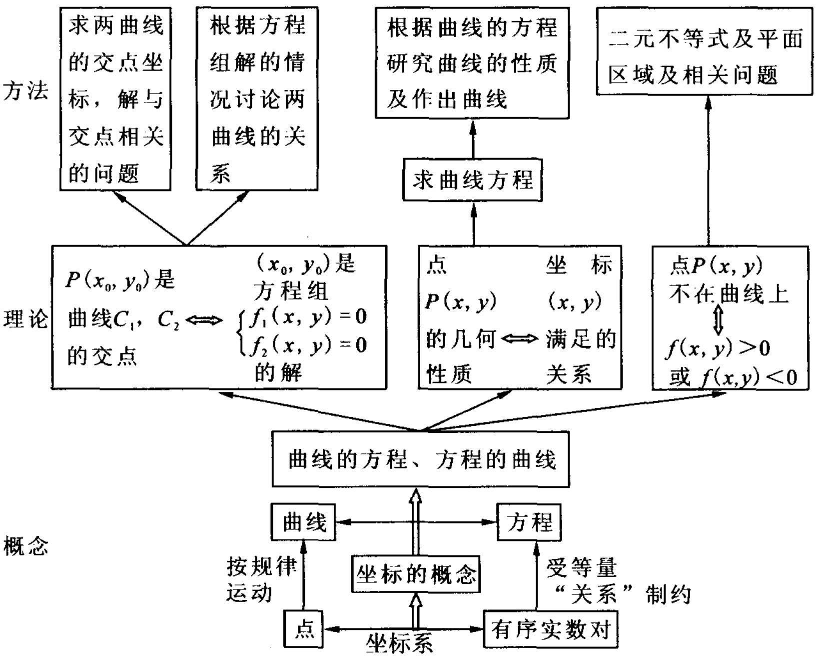
目　　录

第一章 绪 论

曲线的方程、方程的曲线

这个概念是解析几何的理论基石，是建立数与形的联系，达到数形结合与统一的理论依据. 这个概念中蕴含着解析几何的基本思想与基本方法.

解析几何的概念、理论与方法可用如下的框图展现之：



例 1 设到定点 $F(0, 1)$的距离与到直线 l：$y=-1$ 的距离相等的动点的轨迹为曲线 C. 求证：曲线 C 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$.

证明：(1)C 上任意点的坐标是方程 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的解.

设 $P(x, y)$是曲线 C 上任意一点，

则 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，

平方，得 $x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1$，

整理，得 $y=\frac{1}{4}x^2$，

这就是说，曲线上任意点的坐标都是方程的解；

(2)以方程的解为坐标的点在曲线上.

设 $M(x, y)$的坐标适合方程 $y=\frac{1}{4}x^2$，

则 $x^2=4y$，

$x^2+y^2-2y+1=y^2+2y+1$，

即 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$.

这就是说，点 M 到定点 $F(0, 1)$的距离等于到直线 $y=-1$ 的距离，因此点 M 在曲线 C 上.

综合以上两点，知曲线 C 的方程是 $y=\frac{1}{4}x^2$.

说明：(1)实际上是求轨迹的方程. 从理论上讲，求出的方程是否满足(2)还需要证明. 如果方程化简的过程是同解变形，这个证明可以略去. 对于(2)今后不做要求.

例 2 设 $P(a, b)$是圆 $x^2+y^2=r^2$ 外的定点，过 P 作圆的两条切线 PA 和 PB，切点分别是 A、B. 求直线 AB 的方程.

解：设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$x_1\neq a$，$x_2\neq a$.

$\because$ PA 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 切于点 A，

$\therefore$ $PA\perp OA$.

于是 $\left(\frac{b-y_1}{a-x_1}\right)\cdot\left(\frac{y_1}{x_1}\right)=-1$，

$\therefore$ $ax_1+by_1=x_1^2+y_1^2=r^2$. ①

同法有　$ax_2+by_2=r^2$.　②

①、②表明点 A、点 B 的坐标同时适合方程

$$ax+by=r^2. \quad ③$$

当 $x_1=a$ 或 $x_2=a$ 时，则 $A(r, 0)$或 $B(r, 0)$，且 $a=r$. 当然这时 A、B 的坐标适合方程③.

由于方程③表示直线 l，且 A、B 均在 l 上，故直线 l 就是直线 AB. 所以直线 AB 的方程为 $ax+by=r^2$.

例 3　已知曲线 C_1：$f_1(x, y)=0$，C_2：$f_2(x, y)=0$ 且 C_1 和 C_2 相交.

求证：不论 a 取什么实数值，方程

$$f_1(x, y)+a \cdot f_2(x, y)=0 \quad *$$

的曲线一定经过 C_1 和 C_2 的交点.

证明：设 C_1 和 C_2 的一个交点是 $P(x_0, y_0)$，

则　$f_1(x_0, y_0)=f_2(x_0, y_0)=0$，

于是，不论 a 取什么实数，

$f_1(x_0, y_0)+a \cdot f_2(x_0, y_0)=0$ 成立.

这说明点 $P(x_0, y_0)$的坐标是方程 * 的解.

因此，不论 a 取什么实数值方程 * 的曲线一定过 C_1 和 C_2 的交点.

例 4　求证：不论 a 取什么实数，方程 $x(2x-a)-(1+a)y+a=0$ 的曲线总过定点，并求出定点坐标.

证法 1：　当 $a=0$ 时，方程为

$$2x^2-y=0. \quad ①$$

当 $a=-1$ 时，方程为

$$2x^2+x-1=0. \quad ②$$

①、②联立，解之，得两个定点

$$P_1(-1, +2), P_2\left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right).$$

把 P_1 点坐标代入方程，得

$$-1 \cdot (-2-a)-2(1+a)+a=0,$$

即　$2+a-2-2a+a=0$.

显然不论 a 取什么实数，P_1 的坐标都是方程的解；

把 P_2 点坐标代入方程，得

$$\frac{1}{2}(1-a)-(1+a)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)+a=0,$$

即 $\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+a=0.$

显然，不论 a 取什么实数，P_2 的坐标都是方程的解.

因此，不论 a 取什么实数值，方程的曲线总过两个定点 $P_1(-1,\ 2)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

证法 2： 把方程整理为关于 a 的一元一次方程

$$(x+y-1)a=2x^2-y.$$

该方程的解集为 **R** 的充要条件是

$$\begin{cases}x+y-1=0,\\2x^2-y=0.\end{cases}$$

解之，$P_1(-1,\ 2)$，$P_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

可以证明，不论 a 取什么实数，点 P_1 和 P_2 的坐标都是方程(已知的关于 x，y 的二次方程)的解(见证法 1)，因此，不论 a 取什么实数，方程的曲线总过定点 $P_1(-1,\ 2)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

证法 3： 把方程整理为

$$(2x^2-y)+a(1-x-y)=0,$$

则方程的曲线一定经两条曲线 C_1：$2x^2-y=0$，C_2：$1-x-y=0$ 的交点(例 3 给出的真命题).

由方程组 $\begin{cases}2x^2-y=0\\1-x-y=0\end{cases}$ 得 C_1、C_2 的交点 $P_1(-1,\ 2)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

故不论 a 取什么实数值，方程的曲线总过两个定点 $P_1(-1,\ 2)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

习 题 一

1. 如果命题"坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点都在曲线上"是错的，那么下列各命题中正确的是 ( )

   A. 坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点都不在曲线上

   B. 坐标满足方程 $F(x, y)=0$ 的点有些在曲线上，有些不在曲线上

   C. 曲线上的点的坐标不都满足方程 $F(x, y)=0$

   D. 一定有不在曲线上的点，其坐标满足方程 $F(x, y)=0$

2. 到两个坐标轴的距离相等，且位于上半平面的动点的轨迹方程是 ( )

   A. $y=|x|$　　　　B. $|y|=x$

   C. $y=x(x>0)$　　　　D. $y=|x|(x\neq 0)$

3. 曲线 C 的方程是 $F(x, y)=0$，那么 C 关于点 $M(-1, 3)$ 对称的曲线的方程是________；C 关于直线 $x-y-1=0$ 对称的曲线的方程是________.

4. 设两个圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 交于 P_1、P_2 两点. 求证：直线 P_1P_2 的方程是 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0$.

5. 已知直线 l：$(2m+1)\cdot x+(m+1)y=7m+4$，圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

   (1)求证：不论 m 取什么实数，直线 l 总过定点；

   (2)求证：不论 m 取什么实数，l 和 C 的公共点中，总有一个是定点.

第二章　椭　　圆

2.1 椭圆及其标准方程

椭圆是一种常见的曲线．如汽车油罐横截面的轮廓，天体中的一些行星和卫星运行的轨道等．

让我们先动手画一个椭圆：

取一条具有定长的细绳，把它的两端固定在画板上的 F_1 和 F_2 两点（图 2-1），当细绳长度大于 F_1 和 F_2 的距离时，用铅笔尖把细绳拉紧，使笔尖在图板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆．

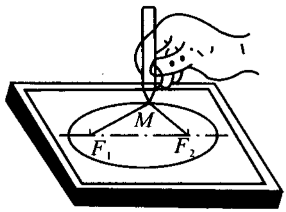


图 2-1

如果细绳的长度不变，而改变两定点 F_1、F_2 之间的距离，我们可以看到：当 F_1 和 F_2 的距离越大，画出的椭圆越扁平；而当 F_1 和 F_2 的距离越小时，画出的椭圆越接近于圆．同学们想一想：当细绳长度恰等于 F_1 和 F_2 的距离时，会画出什么样的图形？当 F_1 和 F_2 两点重合时，又会画出什么样的图形？

从上面的画图过程，我们可以看出：椭圆是到点 F_1、F_2 的距离之和等于定长（细绳的长度）的点的集合．

定义：平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做**椭圆**，这两个定点叫做椭圆的焦点，两个焦点之间的距离叫做椭圆的焦距．

例 1　已知半径为 R_1 的小圆 O_1 内含于半径为 R_2 的大圆 O_2 内．求和大圆内切同时又与小圆外切的圆的圆心轨迹．（O_1 与 O_2 不

重合）

解：设动圆圆心为 O，半径为 r，由已知有(图 2-2)

$$|OO_1|=R_1+r,$$

$$|OO_2|=R_2-r,$$

$$\therefore \quad |OO_1|+|OO_2|=R_1+R_2.$$

即圆心 O 到两个定点 O_1、O_2 的距离之和为常数 R_1+R_2，且 $R_1+R_2>|O_1O_2|\neq 0$，可知满足条件的动圆圆心的轨迹是以 O_1、O_2 为焦点的椭圆.

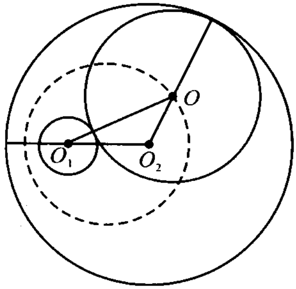


图 2-2

根据椭圆的定义，我们来求椭圆的方程.

从椭圆的定义和画椭圆的过程，容易看出，椭圆是一个轴对称图形，它有两条对称轴：一条是过焦点 F_1、F_2 的直线，另一条是线段 F_1F_2 的垂直平分线，而这两条对称轴的交点，是椭圆的对称中心.

由于椭圆有以上的特点，我们可以如图 2-3，建立直角坐标系 xOy，使 x 轴经过点 F_1、F_2，y 轴为线段 F_1F_2 的垂直平分线，线段 F_1F_2 的中点即为坐标原点 O.

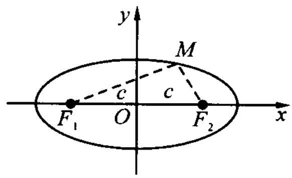


图 2-3

设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，那么焦点 F_1 和 F_2 的坐标分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$.

设 $M(x,y)$是椭圆上任意一点，它到两个焦点的距离之和为常数 $2a(a>c>0)$，由椭圆定义，椭圆就是集合

$$P=\{M\,|\,|MF_1|+|MF_2|=2a\}.$$

$$\because \quad |MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

由 $\quad |MF_1|+|MF_2|=2a$,

得方程：

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

把这个方程移项后两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理，可得：

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

上式两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理得：

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由 $a>c>0$，有 $a^2-c^2>0$.

为了使方程形式简洁，作变量代换：

令 $b^2=a^2-c^2>0(b>0)$，代入方程 * 得：

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

方程两边同除以 a^2b^2，得：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0). \qquad ①$$

这就是说，椭圆上任意一点的坐标一定满足方程①；反过来，若点 $M_1(x_1, y_1)$ 的坐标满足方程①，可以证明 M_1 点在椭圆上.（这里证明过程从略）

我们把方程①叫做**椭圆的标准方程**，它所表示的椭圆的焦点在 x 轴上，焦点是 $F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$. 椭圆上的点到两个焦点的距离之和为 $2a$，其中 a、b、c 的关系是 $c^2=a^2-b^2$.

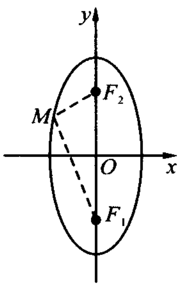


图 2-4

如果椭圆的焦点在 y 轴上，即焦点 F_1、F_2 的坐标分别为：$(0, -c)$、$(0, c)$（图 2-4）. 只要将方程①中的 x，y 互换，就可以得到它的方程，此时方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0) \qquad ②$$

方程②也是**椭圆的标准方程**.

例 2 平面内有两个定点 A、B，若 $|AB|=4$，P 为平面内一个动点，求满足：

$$|PA|+|PB|=6$$

的动点 P 的轨迹方程.

解： 如图 2-5，以定点 A、B 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点为原点 O，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系.

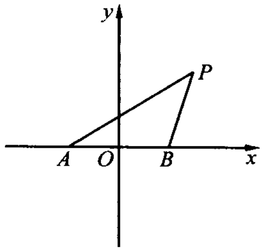


图 2-5

则 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，即 $c=2$.

由 $|PA|+|PB|=6$，即 $a=3$.

由椭圆定义可知，点 P 的轨迹是椭圆，其标准方程应该是.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),$$

其中 $a=3$，$a^2=9$；$c=2$，$c^2=4$，

$\therefore$ $b^2=a^2-c^2=5$，

$\therefore$ 所求轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

例 3 求满足下列条件的椭圆的标准方程：

(1)两个焦点的坐标分别为 $F_1(-5,\ 0)$，$F_2(5,\ 0)$，椭圆上一点 $P(x,\ y)$到两个焦点的距离之和为 26；

(2)两个焦点的坐标分别为 $F_1(0,\ -2)$，$F_2(0,\ 2)$，并且椭圆过点 $Q\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$.

解： (1)因为椭圆焦点在 x 轴上，且关于原点对称，所以设它的标准方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由椭圆上一点到两个焦点的距离之和为 26，又两个焦点坐标为 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$，可知：

$$2a=26,\ 2c=10,$$

即 $a=13$，$c=5$，

$\therefore\quad b^2=a^2-c^2=13^2-5^2=12^2,$

$\therefore$ 所求方程为 $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1.$

(2)因为椭圆焦点在 y 轴上且关于原点对称，所以可设它的标准方程为：

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad(a>b>0).$$

由已知两个焦点坐标为(0，−2)，(0，2)，即

$$2c=4,\ c=2,\ c^2=4.$$

则 $b^2=a^2-c^2=a^2-4.$

标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2-4}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

代入点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ 的坐标，得

$$\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{a^2-4}+\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2}=1.$$

解这个关于 a^2 的方程，可得 $a^2=10.$

$\therefore\quad b^2=a^2-4=10-4=6.$

$\therefore$ 所求椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{10}+\dfrac{x^2}{6}=1.$

例 4 已知两圆：

C_1：$(x+2)^2+y^2=9$；

C_2：$(x-2)^2+y^2=9$.

动圆 P 与圆 C_1 外切，与圆 C_2 内切. 求动圆圆心 $P(x,\ y)$ 的轨迹.

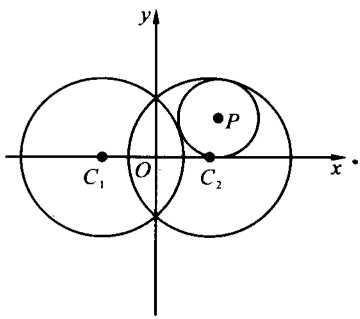


图 2-6

解：如图 2-6，

设动圆圆心 $P(x,\ y)$，动圆半径为 R.

由圆 P 与圆 C_1 外切，有 $|PC_1|=3+R$,