混沌振子系统(L-Y)与检测

李 月　杨宝俊 著

科学出版社
www.sciencep.com

混沌振子系统(L-Y)与检测

李　月　杨宝俊　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书主要论述了一个特定的混沌振子系统，并用该系统检测微弱周期、准周期信号方面的内容。全书共7章，综述了非线性科学和混沌理论，比较了不同恢复力项的混沌振子系统的能力，论述了 L-Y 系统的动力学特性，证明了混沌振子系统周期解的适定性；提出频率检测的循环相态技术并研究阻尼比对检测效果的影响，提出 A、ω 同时检测的方案；就勘探地震学、生物医学、雷达监测方面的应用进行探讨；强调加性随机噪声等间隔截断的准周期性表现、系统工作稳定性以及对 L-Y 系统进一步研究的切入点；最后对建立混沌振子检测理论提出比较系统的认识。

本书可供从事和涉及信号分析和处理及相关专业的大专院校师生、科研人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

混沌振子系统(L-Y)与检测/李月，杨宝俊著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018089-6

Ⅰ.混… Ⅱ.①李…②杨… Ⅲ.混沌学-应用-信号检测 Ⅳ.TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 114826 号

责任编辑：鄢德平 张 静 杨 然 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年2月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1—2 000 字数：325 000

定价：43.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<长虹>)

前　　言

混沌振子系统和用该系统检测微弱信号是混沌理论及其应用的一个组成部分，也是信号分析和信号处理的一个分支。其应用领域包括电子对抗、自动控制、地学、生物学、金属探伤等。作者和研究集体在完成国家自然科学基金项目(No. 40374045)和吉林省自然科学基金项目(No. 20020626)的过程中，对混沌振子系统的动力学特性以及检测微弱信号的能力进行了比较多的研究，研究结果先后公布在《科学通报》、《物理学报》、《Chinese Physics》、《地球物理学报》等学术期刊上。本书是对已取得成果的综合和进一步提炼。全书共 7 章。第 1 章综述非线性科学的各主要分支；论述了混沌理论、混沌控制和混沌检测的基本内容，系统地阐述了混沌振子检测的基本进展。第 2 章从一般 Duffing 方程出发经过大量仿真实验，提出一个恢复力项为$(-x^3+x^5)$的混沌振子系统，为叙述方便简称为 L-Y 系统；比较详细地讨论了混沌振子系统周期解的适定性，并且建立了一个新的耦合双振子系统。第 3 章论述了 L-Y 系统的动力学特性，包括用 Melnikov 函数理论由同宿轨道建立系统进入混沌态阈值，尤其是与微弱信号有关的系统大尺度周期态阈值的建立；通过 Lyapunov 指数的稳定表现监测系统稳定周期态，提出求 Lyapunov 指数的改进 RHR 算法和应用 Delaunay 三角剖分到小数据量算法中。第 4 章检测技术着重描述混沌测量与有关时域信号处理技术的混合检测方法，如相关函数、高阶统计量、神经网等。第 5 章检测技术包括对振幅检测、混合检测的简述，重点对频率检测提出一个新技术(循环相态技术)，探讨了阻尼比对频率检测效果的影响，频率混沌振子检测的机理，以及振幅、频率的同时检测方案。第 6 章就一个特殊的应用领域——勘探地震学中同相轴检测提出可行的检测过程，包括水平动校正技术、同相轴的 Ricker 子波波列模拟、同相轴变化对系统相态的影响、双曲滤波技术等。第 7 章在详细论述加性随机噪声等间隔截断的准周期性后对检测系统的周期相态稳定性表现进行了仿真证明研究，同时在混沌振子系统的进一步的理论研究和应用方面提出了基本框架。书中提供了混沌振子系统用于生物医学、雷达检测的一个基本方案。经过有关技术的研究总结，概论混沌振子系统检测的基本理论，包括 L-Y 系统动力学基本特性、L-Y 系统检测微弱信号的基本机理、L-Y 系统检测能力的影响因素(信号畸变、系统参量等)以及加性随机噪声截断性质等。

参加研究工作的人员有林红波博士、赵雪平博士、李亚峻博士、张宾博士、郭华博士、袁野博士、路鹏硕士、刘晓华硕士等。在研究过程中得到中国科学院滕吉文院士、刘光鼎院士、马宗晋院士、陈颙院士、王水院士以及陈佳圭研究员、张中杰研究员、林君教授、石要武教授、刘财教授、孙建国教授、申桂香教授、英国地质调查局的刘恩儒教授、西班牙萨拉戈萨大学的José Badal教授、美国斯坦福大学的Simon Klempere教授的指导和帮助；科学出版社张静编辑为提高书的质量进行了艰辛的工作。作者对上述各位先生、女士表示深深的谢意。

欢迎读者批评指正。

作　者

2005年11月20日

目　录

第1章 绪 论

1.1 引 言

鉴于混沌振子系统与利用该系统检测微弱有效信号是混沌理论与应用的一个分支，而混沌理论又是非线性科学的组成部分，本书在阐述基本内容之前需要综述一下非线性科学与混沌理论。关于非线性科学，本书概述了非线性方程种类，包括常微分方程与偏微分方程；从连续功率谱指数与复杂单变量时间序列分数维间关系出发，得到不同噪声的功率谱特点，以及利用简单的FPE模型导出随机共振的概念；比较详细地综述近年来非线性波研究进展，包括传播介质对非线性波的影响，在界面上波的传播规律，非线性波动方程求解技术和非线性波传播在不同领域中的应用，其中论述了其在勘探地震学中应用的可能性。关于混沌理论，说明了非线性动力学系统同(异)宿轨道与孤立波(冲击波)的对应关系；由于不可积性扰动强度的增加，逐渐由随机层形成随机海这样一个全局性混沌；概述了耗散和保守非线性振子系统的动力学行为、随机混沌的判断方式等。简述了混沌控制技术，从工作内容、不同检测技术间比较诸方面介绍了混沌检测技术。关于混沌振子检测的进展，主要说明检测的出发点和目前研究水平。

1.2 非线性科学与混沌理论

系统完整地综述非线性科学与混沌理论是困难的。混沌理论是非线性科学的组成部分，混沌振子系统与检测是混沌理论的一个分支。这样一个包罗的逻辑使本书又不能不涉及非线性科学与混沌理论。因此，只能尽最大努力而为之。

我国“非线性科学”研究首席科学家谷超豪教授和我国混沌理论研究权威专家、《非线性科学丛书》主编郝柏林教授共同认为(谷超豪 1991；郝柏林 1992)，各门科学如光学、力学、声学等都有各自的非线性问题，非线性科学不是这些非线性学科的总和，非线性科学研究各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法。《非线性科学丛书》(上海科技教育出版社，1995～1997)的书目内容包括非线性系统、孤子理论、混沌动力学、符号动力学、分形几何与物理学、量子混沌、非线性演化方程等几十类。谷超豪教授和黄念宁教授认为(谷超豪 1991；黄念宁 1996)，非线性科学具有三个基本分支：混沌、孤子和分形分维。关于混沌理论的科学价值，一

些学者认为混沌理论是继相对论、量子力学之后物理科学中的第三次大革命(格莱克丁 1990(英文原文 1988))。

1.2.1 非线性方程(刘式适等 2000)

非线性常微分方程:

经典的一阶非线性方程、经典的非线性方程、Logistic 方程、Landau 方程、Lotka-Volterra方程、单摆运动方程、Duffing 方程、Van der Pol 方程、Euler 方程、Yang-Mills 方程等。

非线性偏微分方程:

Liouville 方程、Monge-Ampere 方程、广义热传导方程、非线性平流方程、Burgers 方程、KdV(Korteweg-de Vries)方程、KdV-Burgers 方程、KdV-Burgers-Kuramoto 方程、MKdV 方程、非线性 Klein-Gordon 方程、Fisher 方程、Boussinesq 方程、非线性 Schrödinger 方程、Ginzburg-Landau 方程、BDO(Benjamin-Davis-Ono)方程、Born-Infeld 方程、离子声学方程、Zakharov 方程、Landau-Lifshiz 方程、浅水方程组、KP(Kadomstsev-Petviashvili)方程、准地转位涡度方程等。

上述的非线性常微分方程之一 Duffing 方程为(无阻尼无强迫)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \tag{1-1}$$

初始条件 $x(0)=a_0$,$\dot{x}(0)=0$。用正规摄动法,即令

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t) \equiv x(t,\varepsilon) \tag{1-2}$$

可得到级数解

$$x(t) = a_0 \cos t + \varepsilon a_0^3 \left[-\frac{3t}{8} \sin t + \frac{1}{32}(\cos(3t) - \cos t) \right] + O(\varepsilon^2) \tag{1-3}$$

该解含永年项(久期项),使解不收敛。然后可采用诸如多尺度法、Poincaré-Lighthill-Kuo(即 Poincaré-Lindstedt)法、平均值法、Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky 法(KBM 或者渐近法)等方法求解。例如,PLK 方法,引入新变量 τ

$$\tau = \omega t \tag{1-4}$$

将原方程转换成对 τ 的导数,并求对 τ 的周期解。将 ω 和 x 展开为对小参数 ε 的幂级数,经过一定推导和 ε 幂比较,可得到不同级近似方程,引进非永年条件

$$\omega_1 = \frac{3}{8} a^2 \tag{1-5}$$

最后得到方程(1-1)的解为

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32} \cos 3(\omega t + \varphi) + O(\varepsilon^2) \tag{1-6}$$

其中

$$\omega = 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8} + O(\varepsilon^2) \tag{1-7}$$

上面结果表明，非线性振动周期解中有高次谐波存在，其振动频率与振幅有关。

对于 Boussinesq 非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\beta\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0,\quad \alpha,\beta>0 \tag{1-8}$$

利用行波解法

$$\begin{cases}u=u(\xi)\\ \xi=x-Ct\end{cases},\quad C\text{为常波速} \tag{1-9}$$

可得到

$$(C^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}\xi^4}-\beta\frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}\xi^2}=0 \tag{1-10}$$

并可解得方程(1-8)的 Jacobi 椭圆余弦解

$$u=u_2+(u_1-u_2)Cn^2\left[\sqrt{\frac{\beta(u_1-u_3)}{6\alpha}}\xi\right] \tag{1-11}$$

其中，u_1、u_2、u_3 为 $F(u)=u^3-\frac{3(C^2-c_0^2)}{2\beta}u^2-Au-B$ 的三个实零点，可设 $u_3<u_2<u_1$，A、B 为两个积分常数。

当 $u_2=u_3$ 时，式(1-11)退化为孤立波(solitory wave)解

$$u=u_2+(u_1-u_2)\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\beta(u_1-u_3)}{6\alpha}}\xi\right] \tag{1-12}$$

在式(1-12)中，若 $u_2=0$、$u_1=2a^2$、$\alpha=\frac{\beta}{3}=1$，得到特解

$$u=2a^2\mathrm{sech}^2 a(x-ct) \tag{1-13}$$

该孤子(soliton)的峰点位于($x=Ct,2a^2$)，且以动坐标轴 ξ 为双向极限。特例解(1-13)也可由 Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换求得(刘式适等 1996)。

上述的非线性方程在一定实际(物理、化学、生物、地学等)问题中还可能出现耦合系统。用非线性方程描述的实际问题很多，有的问题难以划分它的学科门类，并且有着广泛的应用。如耗散结构(dissipative structure)，这是物理学中近来讨论时空中自组织的结构形态所用的概念(库比切克等著，刘式达等译 1990)，这种自组织的结构消耗化解外部流进系统的能量，描述该系统所构造出的数学模式通常是非线性结构。耗散结构或具有相干性质或具有混沌状态，通常研究远离平衡的系统。耗散结构有三种研究方法。第一种是拓扑方法；第二种是近似分析方法，得到耗散结构的局部形态；第三种是数值方法，它常用来直接求模型方程的数值解。耗散结构理论是比利时学者 Prigogine L 于 1967 年提出，并于 1968 年进一步补充的(Prigogine Lefever 1968；Prigogine Stengers 1984)。耗散结构的研究内容属于非线性科学，非线性科学不是从提出耗散结构理论开始逐渐形成的。

1.2.2 分形分维与随机噪声(刘式达等 1993,1994;胡岗 1994)

有关分形分维的基本概念已有大量文献论及,其中很重要的一个著作是美国《纽约时报》编辑、记者 J Gleick 的《混沌开创新科学》(Chaos Making a New Science 1988)。我们不去评论作者完成该著作的学术工作量等方面的困难,也不讨论不同分支内容的深度,仅强调作者和译校者提供给我们的关于混沌这一极为重要的科学理论的发生和发展过程,从而为许多科学工作者明确了学术水准。

连续功率谱指数 β 与复杂单变量时间序列分数维 D 满足

$$\beta = 5 - 2D \tag{1-14}$$

随机噪声如高斯白噪声($\beta=0, D=2.5$)、$\frac{1}{f}$噪声($\beta=1.2, 0<\beta<2, D=1.9$)、褐色噪声(布朗运动)($\beta=2.0, D=1.5$)相应的功率谱差别较大。高斯白噪声的功率谱与横轴($\lg f$)平行,另外两种噪声在($\lg f, \lg S(f)$)坐标系中具有负斜率,并且褐色噪声 $S(f)$的斜率更大。自然界中$\frac{1}{f}$噪声相当普遍,例如,许多东、西方乐曲旋律具有与$\frac{1}{f}$噪声类似的功率谱。对于$\frac{1}{f}$噪声,相应的功率谱是 $S(f)=f^{-\beta}$,对于 $\beta>1$或 $\beta<1$, $S(f)$存在由足够低频引起的发散结果,所以不能使用式(1-14)。褐色噪声布朗运动粒子位置 $x(t)$的概率分布服从正态分布

$$p(x(t)) = \frac{1}{2\sqrt{2kt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \tag{1-15}$$

经过尺度变换 $x \to \lambda^{\frac{1}{2}} x, t \to \lambda t$,则式(1-15)满足标度律

$$p(\lambda^{\frac{1}{2}} x, \lambda t) = \lambda^{-\frac{1}{2}} p(x,t) \tag{1-16}$$

式(1-16)表明 $x(t)$和$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x(\lambda t)$有相同的概率分布,此即统计自相似。另外,布朗粒子运动的问题还可用 FPE(Fokker-Planck equation)进行讨论。在实际中白噪声是不存在的,所以任何噪声都带“色”。下面简述 FPE 处理方法。

从连续随机变量的概率密度、概率分布函数出发,计算若干关联矩函数,对于用线性或非线性微分方程描述的褐色噪声(如布朗运动),外力是加性的,可得到马尔可夫过程的 Kramers-Moyal 展开,即把概率分布函数的时间偏导数转换为随机变量的不同级跃迁矩的空间偏导数。该展开对空间二阶偏导数的自然截断即为 Fokker-Planck 方程(FPE)。

加性噪声与随机变量无关,反之称为乘性噪声。系统的内噪声常常是加性的,外噪声常常表现为乘性噪声。把有效信号和加性噪声同时输入一系统,研究系统输出信息与输入信息间的关系,对信息理论、光电理论、生命科学等许多领域中的

信号处理问题都有重要作用。例如，在一定条件下增加输入的噪声，可以导致增加输出有效信号和减少输出的噪声，即增加输入的无序导致有序输出的增加，此即随机共振。为说明随机共振现象，建立数学模型

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + A\cos(\Omega t) + \Gamma(t) \tag{1-17}$$

其中，$\mu>0$。方程(1-17)可改写成随机变量 $x(t)$ 的概率分布函数 $p(x,t)$ 所满足的FPE

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(\mu x - x^3 + A\cos(\Omega t))p(x,t)] + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x,t) \tag{1-18}$$

若输入信号和噪声强度都很小，$A\ll1$，$D\ll1$，则可认为系统主要由 $\dot{x}=\mu x-x^3$ 控制。利用浸渐消去法或微扰理论，都可得到系统(1-18)的输出信噪比近似为 $\frac{\sqrt{2}\mu^2A^2\mathrm{e}^{-\frac{\mu^2}{4D}}}{4D^2}$(胡岗 1994)。当 D 较小时，增加输入噪声(减少输入信噪比)将增大输出信噪比，以至达到极大值，然后逐渐降低。可以证明，系统输出总功率为 $2\pi\mu$，与 A、D 无关。在其他许多系统，如 $\ddot{x}+k\dot{x}+f(x)=\gamma\cos(\Omega t)+\Gamma(t)$ 中也观察到了随机共振现象。

天然地震是很复杂的自然现象，可给人类造成巨大的损失。利用天然地震波动的成像结果能得到地球内部结构。天然地震的成因和预测是重要的科学问题，其中关于天然地震的一些规律认识也尚在研究之中。震级 m 和频数 N 之间有关系(Gutenberg et al. 1944)

$$\lg N(>m) = a - bm \tag{1-19}$$

$0<a<1$，$0.5<b<1.5$(关于 b 值的确定尚无统一公式)。断裂带尺寸 r 和震级 m 的关系为

$$\lg r = m - 3.7 \tag{1-20}$$

由式(1-19)、式(1-20)可得

$$N(>r) \propto r^{-b} \tag{1-21}$$

地震能量 E 与震级的关系为(曾融生 1984)

$$\lg E = c + dm \tag{1-22}$$

所以有

$$N \propto E^{-\frac{b}{d}} \tag{1-23}$$

若 d 取 2.57(曾融生 1984)，则 $0.19<\frac{b}{d}<0.58$。式(1-23)满足 $\frac{1}{f}$ 噪声规律。如取 $\frac{b}{d}=0.5$，则有 $N\propto E^{-0.5}=\frac{1}{\sqrt{E}}$，表明能量越强，相应的震次越少。实际上，$N$ 与 E 都是具有概率分布的随机变量函数，如 $N_i(r,t,E_i)$、$E_i(N_i,r,t)$，使讨论成因与预测地震都带有统计意义。

1.2.3　非线性波研究进展

近年来，国内外对非线性波的研究主要包括传播介质的变化、在界面上波的传播规律、非线性波动方程求解技术、非线性波传播在不同领域中的应用等方面(Cleveland et al. 1996;Das et al. 2000;Denardo et al. 1990;Helal 2002;Hokstad 2004;Isidore 1996;Naranmandula et al. 2004,2005;Tutunca et al. 1998;Winkler et al. 1996;Zheng et al. 2004;郭华等 2002)。

那仁满都拉先生(2004,2005)利用图形分析方法，把得到的 Burgers 方程严格解可视化，并认识到在黏热流体介质中，由于非线性作用与耗散作用的共同存在、相互平衡，使非线性波既有衰减又有畸变，不产生多值间断现象，而形成一个连续的冲击波。利用齐次平衡法求出 Burgers 方程的冲击波解和多冲击波解，发现不同幅度(不同速度)的冲击波迎面碰撞之后，合并成一个幅度为原来两个冲击波的幅度之和、速度为原来两个冲击波的速度之差的冲击波；相同幅度(相同速度)的冲击波迎面碰撞之后，合并成一个幅度为原来两个冲击波的幅度之和的一种不传播冲击波；两个不同幅度(不同速度)的冲击波追赶碰撞之后，合并成幅度为原来两个冲击波的幅度之和、速度为原来速度大的冲击波的速度的一种冲击波。对弛豫流体介质中非线性波动方程进行数值求解，研究弛豫流体介质中有限振幅波的传播特性。结果表明，初始输入的正弦波在非线性效应较强的弛豫介质中传播时，波形逐渐陡峭并产生多值，最终形成间断冲击波，同时原来对称的波形慢慢变成不对称。弛豫吸收最强时，冲击波的形成不推迟，而弛豫吸收变弱时冲击波的形成发生推迟。用齐次平衡法研究无限大弛豫流体介质中 KdV 方程，得到双孤子解。分析发现，KdV 方程的钟形孤子间的相互作用不仅具有粒子弹性散射的性质，还具有奇异孤子之间的相互作用也具有的性质。孤子和奇异孤子间的相互作用表现为：速度比较快的钟形孤子追赶较慢的奇异孤子，它们碰撞之后虽然能够保持原有的波形和速度，但碰撞时出现钟形孤子幅度突然增大的现象；而快奇异孤子追赶慢钟形孤子，碰撞之后既能保持原有的波形和速度，又不出现钟形孤子幅度增大。满足不同 Boussinesq 方程的双孤子碰撞将发生岩石介质不同的影响。“good” Boussinesq 方程的双孤子迎面碰撞所产生的最大应力可能会对一般岩石介质造成损坏；而“bad” Boussinesq 方程的双孤子迎面碰撞产生的最大应力，在小应变幅度的限制下，一般不能对岩石介质造成损坏；对于修正的 Boussinesq 方程的双孤子解，即使孤子应变幅度较小，由孤子与反孤子的追赶碰撞产生的最大拉应力也可达到某些岩石抗拉强度极限，因此有可能造成岩石的损坏，而孤子与反孤子追赶产生的最大压应力一般远小于岩石的抗压强度，不会对岩石造成损坏。又利用新的函数变换，进一步寻找被积多项式的等根，来退化超椭圆积分为一般积分，去求解 KdV 方程，得到多种新的孤立波解，包括钟形孤立波解、扭结孤立波解、尖型孤立波解以及奇异孤立波解。

限于篇幅，不能一一列出非线性波动方程的求解技术，仅对于非线性波动方程的 Cauchy 问题探讨它的求解过程（李大潜等 1997；郭华等 2002）。n 维非线性波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = F(\boldsymbol{Du}, \boldsymbol{DxDu}) \\ t = 0: u = \varphi(x), u_t = \psi(x) \end{cases} \tag{1-24}$$

其中，$\boldsymbol{Du}=(u_t, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$，$\boldsymbol{DxDu}=(u_x, x_j, i, j=0,1,\cdots,n, i+j\geqslant 1)$。该问题可以等价地化为拟线性波动方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_n - a^2\Delta u = F(\boldsymbol{Du}) \triangleq F(Du, Du_1, \cdots, Du_n) \\ (u_i)_n - a^2\Delta u_i = \boldsymbol{\nabla} F(\boldsymbol{Du}) \cdot \dfrac{\partial(\boldsymbol{Du})}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ t = 0: u_i = \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, u_i = \dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1-25}$$

其中，$u_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{u}=(u,u_1,\cdots,u_n)$，$\boldsymbol{\nabla}F(\boldsymbol{Du})$是对所含变量 $\boldsymbol{Du}$ 的梯度。

该方程组的求解可借助于同类拟线性波动方程 Cauchy 问题求解的不动点原理。而拟线性波动方程 Cauchy 问题的迭代求解又以下列 n 维线性波动方程 Cauchy 问题的适定解为基础。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{Du}) u_{x_ix_j} + 2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}(\boldsymbol{Du}) u_{tx_j} + F(\boldsymbol{Du}) \\ \qquad t = 0: u = \varphi(x), u_t = \psi(x) \end{cases} \tag{1-26}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) u_{x_ix_j} - 2\sum\limits_{j=1}^{n} a_{0j}(t,x) u_{tx_j} = F(t,x) \\ \qquad t = 0: u = \varphi(x), u_t = \psi(x) \end{cases} \tag{1-27}$$

上述求解过程虽然比较繁杂，但可得到一个适定性的解。

对于非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\mid u\mid^2 u = 0, \quad \alpha,\beta > 0 \tag{1-28}$$

已得到它的包络（亮）孤立波解。反号的非线性 Schrödinger 方程（NLS+方程）为

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\mid u\mid^2 u = 0 \tag{1-29}$$

利用反散射方法得到它的暗孤子解，如 $\gamma(\lambda)=0$（无反射）、$\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\alpha\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta|u|^2u=0$。$N=0$ 时

$$\mid u_1(x)\mid^2 = \rho^2 - k_1^2\operatorname{sech}^2\theta_1 \tag{1-30}$$

其中，设 $K_1=\mathrm{i}k_1, k_1>0, K_1=\sqrt{\lambda^2-\rho^2}$，$|u|\to\rho(x\to\pm\infty)$，$\theta_1=k_1(x-x_1-2\lambda_1 t)$，