全国著名特级高级教师联合编写

GAOKAOBIBEI

# 高考必备

## 数学

·全新版·

主编 任勇

中国青年出版社

全国著名特级高级教师联合编写

GAOKAOBIBEI

# 高考必备

## 数学

SHUXUE


总策划 张正武 姬忠勋

主编 任勇

编者 任勇 刘同钦 马永强 董保平 王兴稳 赵瑞琴 李永存 韩清峰 王向光 杨道强 金保华 司海举 郑洪军 于焱 董静敏 董颖 郑兴全 陈增武 董西牢 赵祥枝


中国青年出版社

(京)新登字 083 号

责任编辑:郭 静

封面设计:吴本泓

图书在版编目(CIP)数据

学生实用数学高考必备/任勇主编.-北京:中国青年出版社,2004

ISBN 7-5006-5859-1

Ⅰ.学… Ⅱ.任… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062072 号

(最新修订版)

*

中国青年出版社 出版发行

社址:北京东四 12 条 21 号　邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

安阳市华豫印刷厂印刷　新华书店经销

*

850x1240　1/16　印张 26.5　480 千字

2004 年 7 月北京第 1 版

2006 年 7 月北京第 2 版　2006 年 7 月河南第 2 次印刷

定 价:28.50 元

# PREFACE 前言

《学生实用数学高考必备》一书是专为参加高考数学测试的学生而编写的复习迎考的学习用书。

本书特点如下：

1.实用：一册在手，就有全程展望篇，知识系列篇，专题复习篇，方法能力篇，模拟试题篇，应试技巧篇。从高三总复习开始，一直伴随读者到高考结束，每个阶段都能在书中找到具体的材料。

2.好用：与高三总复习同步进行，“知识系列篇”可一课一节一练同步使用，“专题复习篇”和“方法能力篇”可二课一章一练，选题由浅入深，注意一题多解、一题多变、一题多用。“应试技巧篇”是老师将多年应试经验进行系统整理，精心编选，定能使考生在高考中达到事半功倍的效果。“模拟试题篇”在试题的选材上力求新颖、典型、规范，以能力立意命题，注重创新思维能力的训练，供同学们热身冲刺使用。使考生在高考中发挥卓绝的功能。

3.通用：本书严格依据《数学考试说明》的最新精神和具体要求，参照教育部颁布的《全日制普通高中教学大纲》，深入研究了高考数学测试题的发展趋势，精心编写了《考试大纲》新增内容，适合各种版本的教材使用。

1.覆盖面广：本书所选内容，覆盖数学各章节内容，注重单元过关，辅以高考典型问题，达到考点强化、疑点强化、弱点强化、误点强化、难点强化之功效。

2.突出重点：在注重基础知识的同时，突出对重点知识、常用方法、重要能力的训练，加强知识、方法、能力间的内在联系与应用。

“突出综合创新应用”，是高考数学命题“孜孜以求的目标”。本书在编写中，各章均专列出“应用问题”、“创新问题”和“综合问题”，读者在使用时会有新颖之感。

## 四、作者——一流的、高层次的

我国有一千万教师，教育部在各地推荐师德高尚、业务精良的教师的基础上，再择优选出1万名教师确认为“骨干教师国家级培训学员”，本书所有原作者均为“骨干教师国家级培训北京师范大学数学班学员”，本书今年进行了进一步修改，参与的作者都是全国重点中学的特级、高级教师。可谓国内一流骨干教师。

在本书的编写过程中，我们参考了教育部考试中心的有关材料和部分数学教辅类书籍，在此特表谢意。总策划张正武先生和中国青年出版社的编辑、审订人员也为本书的出版做了大量细致的工作，特此亦表谢意。

本书是全体编撰人员精心设计、用心编写而成的，但由于时间稍紧，编写中恐有差错，恳请广大读者和专家批评指正，以便不断修正和完善。

《学生实用数学高考必备》
编写组

CONTENTS

# 目 录

## 第一篇 全程展望篇


第1章 数学高考的特点/1

第2章 数学高考的启示/1

第3章 学生复习的策略/2

第4章 复习时的注意点/3

第5章 高考数学解题谨防“十不”/5


## 第二篇 知识系列篇


第1章 集合与简易逻辑/7

- 2.1.1 集合/7
- 2.1.2 含绝对值的不等式解法/8
- 2.1.3 一元二次不等式的解法/10
- 2.1.4 逻辑联结词与四种命题/12
- 2.1.5 充分条件与必要条件/13
- 2.1.6 全章综合能力测评/15

第2章 函数/16

- 2.2.1 函数/16
- 2.2.2 函数的表示法/18
- 2.2.3 函数的值域/20
- 2.2.4 函数的单调性/22
- 2.2.5 反函数/23
- 2.2.6 二次函数/25
- 2.2.7 幂、指数式与对数式/27
- 2.2.8 指数函数与对数函数/29
- 2.2.9 函数的图像/30
- 2.2.10 函数的极值与最值/33
- 2.2.11 抽象函数/34
- 2.2.12 函数的综合问题/36
- 2.2.13 全章综合能力测评/38

第3章 数列/40

- 2.3.1 数列的概念、递推数列/40
- 2.3.2 等差数列/42
- 2.3.3 等比数列/45
- 2.3.4 数列求和/47
- 2.3.5 递归数列/50
- 2.3.6 观察、归纳、猜想、证明/52
- 2.3.7 数列综合题/55
- 2.3.8 数列应用问题/57
- 2.3.9 全章综合能力测评/60

第4章 三角函数/61

- 2.4.1 三角函数的有关概念/61
- 2.4.2 同角三角函数的基本关系式与诱导公式/63
- 2.4.3 两角和与差的三角函数/66
- 2.4.4 三角函数式的化简、求值与证明/68
- 2.4.5 三角函数的图像和性质(Ⅰ)/70
- 2.4.6 三角函数的图像和性质(Ⅱ)/73
- 2.4.7 三角函数的综合问题/75
- 2.4.8 已知三角函数值求角/78
- 2.4.9 三角函数的应用/80
- 2.4.10 全章综合能力测评/82

第5章 平面向量/83

- 2.5.1 向量的基本运算/83
- 2.5.2 向量的坐标运算/85
- 2.5.3 平面向量的数量积/87
- 2.5.4 线段的定比分点和平移/89
- 2.5.5 解斜三角形/91
- 2.5.6 全章综合能力测评/93

第6章 不等式/94

- 2.6.1 不等式的性质/94
- 2.6.2 不等式的证明(Ⅰ)/96
- 2.6.3 不等式的证明(Ⅱ)/98
- 2.6.4 不等式的证明(Ⅲ)/99
- 2.6.5 不等式的解法(Ⅰ)/101
- 2.6.6 不等式的解法(Ⅱ)/103
- 2.6.7 不等式的解法(Ⅲ)/105
- 2.6.8 不等式的应用/107
- 2.6.9 不等式应用问题/108
- 2.6.10 全章综合能力测评/111

第7章 直线和圆的方程/112

2.7.1 直线方程/112
2.7.2 两条直线的位置关系/115
2.7.3 简单的线性规划/118
2.7.4 曲线和方程/120
2.7.5 圆的方程/122
2.7.6 全章综合能力测评/124
第8章 圆锥曲线方程/125
2.8.1 椭圆的标准方程与简单几何性质/125
2.8.2 双曲线的标准方程与简单几何性质/128
2.8.3 抛物线的标准方程与简单几何性质/130
2.8.4 直线与圆锥曲线的位置关系/133
2.8.5 求曲线轨迹方程/136
2.8.6 圆锥曲线的综合应用/138
2.8.7 全章综合能力测评/140
第9章 直线、平面、简单几何体/141
2.9.1 平面的基本性质/142
2.9.2 空间两条直线/144
2.9.3 直线和平面平行与平面和平面平行/147
2.9.4 直线与平面垂直/150
2.9.5 三垂线定理和逆定理/152
2.9.6 空间向量及其运算/155
2.9.7 空间向量的坐标运算/157
2.9.8 棱柱/160
2.9.9 棱锥/163
2.9.10 多面体与欧拉公式/165
2.9.11 球/167
2.9.12 全章综合能力测评/169
第10章 排列、组合和概率/171
2.10.1 两个计数原理/171
2.10.2 排列与组合的简单应用题/173
2.10.3 排列与组合的综合应用/175
2.10.4 二项式定理及其应用/177
2.10.5 随机事件的概率/179
2.10.6 全章综合能力测评/182
第11章 概率与统计/183
2.11.1 离散型随机变量的分布列/183
2.11.2 离散型随机变量的期望与方差/185
2.11.3 抽样方法、总体特征的估计/186
2.11.4 全章综合能力测评/188
第12章 极限/189
2.12.1 数学归纳法/189
2.12.2 数列的极限/193
2.12.3 函数的极限/195
2.12.4 函数的连续性/197
2.12.5 全章综合能力测评/199
第13章 导数/200
2.13.1 导数的概念与运算/200
2.13.2 导数的应用/202
2.13.3 全章综合能力测评/204
第14章 复数/205
2.14.1 复数的有关概念/205
2.14.2 复数的代数形式及其运算/207
2.14.3 复数的向量形式与几何意义/209
2.14.4 全章综合能力测评/210

## 第三篇 专题复习篇

专题一 集合与简易逻辑/212
专题二 函数/214
专题三 数列/217
专题四 三角函数/220
专题五 向量/222
专题六 不等式/225
专题七 直线与圆锥曲线/228
专题八 直线、平面、简单几何体/231
专题九 排列、组合、二项式定理/235
专题十 概率与统计/237
专题十一 极限与导数/240
专题十二 复数/243

## 第四篇 方法能力篇

第1章 数形结合/245
第2章 分类讨论/248
第3章 待定系数/251
第4章 问题转化/254
第5章 换元引参/257
第6章 观察能力/259
第7章 想象能力/261
第8章 思维能力/267
4.8.1 思维的品质/267
4.8.2 思维的基本方法/269
4.8.3 思维的策略/271
4.8.4 全章综合能力测评/272
第9章 运算能力/272

## 第五篇 模拟试题篇

高考全真模拟试题一/276
高考全真模拟试题二/277

## 第六篇 应试技巧篇

第1章 选择题的解法/280
第2章 填空题的解法/283
第3章 综合题的解法/285
第4章 数学应用问题/286
第5章 数学探索问题/290
第6章 数学创新问题/297
第7章 数学考前调整/300
第8章 数学考试技巧/303

## 附录 参考答案与思路点拨

第二篇第1章/305
第二篇第2章/306
第二篇第3章/318
第二篇第4章/326
第二篇第5章/332
第二篇第6章/335
第二篇第7章/343
第二篇第8章/347
第二篇第9章/354
第二篇第10章/369
第二篇第11章/372
第二篇第12章/375
第二篇第13章/383
第二篇第14章/386
第三篇专题一/389
第三篇专题二/389
第三篇专题三/391
第三篇专题四/392
第三篇专题五/393
第三篇专题六/394
第三篇专题七/394
第三篇专题八/394
第三篇专题九/396
第三篇专题十/397
第三篇专题十一/398
第三篇专题十二/399
第四篇第1章/400
第四篇第2章/401
第四篇第3章/402
第四篇第4章/402
第四篇第5章/403
第四篇第6章/404
第四篇第7章/404
第四篇第8章/404
第四篇第9章/406
第五篇模拟试题一/406
第五篇模拟试题二/408
第六篇第1章/411
第六篇第2章/411
第六篇第3章/411
第六篇第4章/412
第六篇第5章/413
第六篇第6章/415

# 第一篇 全程展望篇

## 第 1 章 数学高考的特点

一、遵循考试说明，略调试卷结构．高考试卷充分体现《2004年考试说明》，知识覆盖面广，题型结构不变，概率分值比例高，整卷充分体现"平稳过渡"．

二、重视基础知识，突出重点考查．试题注重考查基础知识、基本技能、基本思想和方法．易、中、难比例稳定在 4∶4∶2 左右．许多基础题中均可"一望而解"，解答题也比较重基础．函数、不等式、解几、立几等重点知识"重点考"．

三、注重"联系""综合"，突出能力考查．试题十分重视学科知识的内在联系，有一定的综合性．在知识的交汇处命题，"小题综合化"适度得到体现；"知识交汇"大多在两处以上，解答题多在三处以上，且有机结合．试题坚持在考查传统数学中"四种能力"（即运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力）的同时，加强了综合能力的考查．此外，试卷有一定的计算量，这与近年"多思少算"的命题风格略有不同．

四、重视思想方法，题型设计平实．数学中的变换思想、转化思想、数形结合、分类讨论等，在试题中得到一定的体现．试卷典型题型多，新题型不多，体现稳过渡，体现平实．

五、强调应用意识，考察实践能力．近年数学高考卷的应用题稳定在"一大二小"格局上，而本试卷却出现"二大三小"应用题，加大应用题的考察力度，试题贴近生活，贴近实际，注重考查实践能力，体现课改理念．

六、注重新增内容，促进课改发展．数学新增内容，除了线性规划问题外，其余均有涉及，而且概率分值高，突出向量、导数的工具作用，新增内容与传统内容有较好的结合，对课改有良好的促进作用．

## 第 2 章 数学高考的启示

一、在抓好数学基本素养的同时强化解题规范训练．由于试题的逻辑性强，综合性高，对答题就有严格的要求，高考复习时，应重视学生基本数学素养特别是解题规范的训练，运算尽量做到"一次成功"；学会正确表达过程；答题严密、规范、不重不漏；准确阅读理解题给文字材料；解立体几何题"一作二证三算"；尽量准确书写答案，尽量做到不在解题规范上失分．

二、在抓好"三基"的同时重视"综合""联系"．"三基"指基础知识、基本技能和基本思想方法．"三基"仍是高考的基调之一，复习时还要"狠抓三基"，系统复习，形成知识网络结构，以不变应万变，但随着高考的发展，即使是基础题，也表现了一定程度上的灵活性，并注意知识的内在联系与综合，常常在知识的交汇点上设计试题．因此，抓基础，既要常抓不懈，更要常抓常新；既要"各个击破"，更要"融会贯通"；既要熟练掌握，更要灵活运用．特别提醒，要特别注意新增内容与传统内容的有机结合的题型的训练．

三、在全面复习的同时坚持多角度、多层次复习重点内容．不论高考怎么改，"全面考查"是不会改变的，因此，高考复习特别是第一阶段的复习原则之一就是全面性，在"三基"方面不留死角，但高考又不可能"面面俱到"、"平均使用力量"，只能提出考查重点，"重点知识重考点"，所谓重点内容，一是高中数学教学中的重点内容，二是升入大学后继续学习所必备的重点内容（特别提醒：新增内容大多与大学后续学习有关）．因此，要坚持多角度、多层次复习重点内容，提高复习效益，对于重点内容，要注意与别的数学知识的联系的同时，有意识地应用这些重点知识，在解决其它内容的数学问题的过程中，深化认识，提高解题水平．

四、在抓好能力培养的同时要树立新的"能力观"．考查能力是数学高考的重点和永恒主题，因此，着力培养学生的能力成了当务之急，抓数学能力培养，先抓好运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力和分析问题解决问题能力（即"四能"），勿需置疑，但随着高考改革的发展，有些能力需要"细化"，如收集处理信息能力、语言文字表达能力、抽象能力等；有些能力需要"组合"，如建模能力、创新能力、综合能力等，只有树立新的能力观，才能成为高质量的学生．

五、在各个阶段的复习中都要重视数学思想方法的学习．数学思想方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴涵于数学知识发生、发展和应用的过程中，也是高考数学命题凸显的特点之一．不少学者认为，仅"传授知识"的数学是一种境界，加上"能力培养"是稍高的境界，再加上"方法渗透"（指渗透数学思想的方法）是较高的境界，而再加上"提高修养"（指数学文化及非智力因素的介入等），则是数学教学的更高境界．这是很有道理的．作为学生，就一定要深刻领会数学思想方法，数学思想方法是数学的精髓，只有运用数学思想方法，才能把数学的知识与技能转化为分析问题和解决问题的能力，才能体现数学的学科特点，才能形成数学素质．因此，在各个阶段的复习中都要重视数学思想方法的学习，以适应高考的要求．

六、由浅入深、适当搞好应用题的学习．自从华东师大张奠

宙教授撰文《高考喜见应用题》以来，数学高考考查应用题的力度逐年加大．因为"应用性问题，没有固定的背景与题型，难于分类模拟训练，因此，是考查学生创新意识的有效题型，对于高校选拔有潜能的学生，及对中学加强素质教育的导向，都起着良好的作用"，从学生学习角度来说，就应该让学生多接触实际，多观察生活，由浅入深地逐步学会数学建模，增强应用意识，学会用数学方法解决实际问题，提高应用能力．但在《2005 年普通高等学校招生全国统一考试大纲》中，删除了"增加应用性和能力型的试题，如强素质的考查"．是否说明应用题并不一定要在每年的试题中体现，因此应用题的训练要"适当"．

七、在掌握常规题型的同时适当注意新颖题型的训练．高考数学命题的总思路是"稳中求进，注重考查能力"，高考要"稳"，就是说有许多"常规题"，复习时应按"样题"进行常规训练，选题尽意贴近高考题型，明确"强化什么、淡化什么，回避什么"，力争在拿到试卷时对大多题目有"熟悉感"；高考要"进"，就是说有一些"新题型"，同时在深、广、难、综上有一定要求，复习时就应适当注意新题型的训练．

八、在重视检测的同时注重加强应试能力的训练，复习阶段的检测是十分必要的，同学们在检测中暴露出来的问题，如判断能力差、应变能力差、速度过慢、方法不当、考试焦虑、不会"跳过拦路虎"等问题，应得到有效的纠正和指导，同学们应自觉地将每次检测当成一次很好的训练应试能力的机会，逐步提高应试水平．

九、在强化思维的基础上，努力提高学生的理性思维能力．数学基础知识的学习要充分重视知识的形成过程，解数学题要着重研究解题的思维过程，弄清基本数学方法和基本数学思想解题中意义和作用，研究运用不同的思维方法解决同一个数学问题的多途径，注意培养直觉猜想，归纳抽象，逻辑推理，演绎证明，运算求解等理性思维能力．

十、在倡导主动学习的同时注意营造自主探索和合作交流的环境．学校和教师要为学生营造自主探索和合作交流的空间，善于从教材实际和社会生活中提出问题，开设研究性课程，让学生自主学习、讨论、交流，在解决问题的过程中，激发兴趣，树立信心，培养钻研精神，同时提高数学表达能力和数学交流能力．

## 第 3 章　学生复习的策略

一、以纲为纲，明晰考试要求

所谓"纲"，主要指《考试说明》和《教学大纲》．简单地说，《考试说明》就是对考什么、考多难、怎样考这 3 个问题的具体规定和解说．《教学大纲》则是编写教科书和进行教学的主要依据，也是检查和评定学生学业成绩、衡量教师教学质量的重要标准．研究《考试说明》和《教学大纲》，既要关心《考试说明》中调整的内容，又要重视今年数学 5 种版本《考试说明》的比较．我们可以结合上一年的高考数学评价报告，对《考试说明》进行横向和纵向的分析，发现命题的变化规律．

今后数学命题应该更加关注高中数学课程改革的进程，了解使用新课程考生的实际情况；吸收新课程中的新思想、新理念，使高考数学科考查更加反映数学教育改革的发展方向．因此，我们要把好方向，就必须吃透《考试说明》，才能少做无用功．

二、以本为本，把握通性通法

近几年高考数学试题坚持新题不难、难题不怪的命题方向，强调"注意通性通法，淡化特殊技巧"．正如教育部考试中心命题处处长任子朝所说的，"不能借口能力考查和理论联系实际而弱化、淡化基础知识、基本理论"．有的知识点看起来在课本中没有出现过，但它属于"一捅就破"的情况，出现的可能也是有的．"注意通性通法，淡化特殊技巧"，就是说高考最重视的是具有普遍意义的方法和相关的知识．例如，将直线方程代入圆锥曲线方程，整理成一元二次方程，再利用根的判别式、求根方式、韦达定理、两点间距离公式等可以编制出很多精彩的试题．这些问题考查了解析几何的基本方法，也体现了考试中心提出的"应更多地从知识网络的交汇点上设计题目，从学科的整体意义、思想含义上考虑问题"的思想．尽管剩下的复习时间已经不多，但我们仍然要注意回归课本．只有吃透课本上的例题、习题，才能全面、系统地掌握基础知识和基本方法，构建数学的知识网络，以不变应万变．在求活、求新、求变的命题的指导思想下，高考数学试题虽然不可能考查单纯背诵、记忆的内容，也不会考查课本上的原题，但对高考试卷进行分析就不难发现，许多题目都能在课本上找到"影子"，不少高考题就是对课本原题的变型、改造及综合．回归课本，不是要强记题型、死背结论，而是要抓纲悟本，对着课本目录回忆和梳理知识，把重点放在掌握例题涵盖的知识及解题方法上，选择一些针对性很强的题目进行强化训练，复习才有实效．

三、以"错"纠错，查漏补缺

这里说的"错"，是指把平时做作业中的错误收集起来．高三复习，各类试题要做几十套，甚至上百套．有人把试卷看成一张一张的网，每时次考试都相当于在捕鱼．如果发现有鱼从漏网上能掉，就要及时修好渔网，下次捕鱼时才不至于有鱼再从这个洞里漏掉．学习知识也是这样．有的同学做题只重数量不重质量，做过之后不问对错就放到一边．这种做法很不科学．做题的目的是培养能力，是寻找自己的弱点和不足的有效途径．俗话说"吃一堑，长一智"，多数有用的经验都是从错误中总结出来的，因此，发现了错误及时研究改正．并总结经验以免再犯，时间长了就知道做题的时候有哪些方面应引起注意，出错的机会就大大减少了．如果平时做题出错较多，就只需在试卷上把错题做上标记，在旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把"错题笔记"或标记错题的试卷看一看．在看参考书时，也可以把精彩之处或做错的题目做上标记，以后再看这本书时就会有所侧重．查漏补缺的过程就是反思的过程．除了把不同的问题弄懂以外，还要学会"举一反三"，及时归纳．做一道题你从不同角度想出 5 种方法，与做 5 道同类潜的题用的时间可能差不多，前者的效果肯定比后者要好得多．高考碰到平时做过的陈题可能性不大，而解题所需的知识、方法和能力要求都不会超出大纲，都会在平对复习中遇到，关键是要能触类旁通．

四、以考学考，提高应试技能

考试是一门学问，高考要想取得好成绩，不仅取决于扎实的基础知识、熟练的基本技能和过硬的解题能力，而且取决于临场的发挥．我们要把平常的考试看成是积累考试经验的重要途径，把平时考试当做高考，从心理调节、时间分配、节奏的掌握以及整个考试的运筹诸方面不断调试，逐步适应．平时考试的试题要精选，要注意试题的新颖性、典型性，难度、梯度和计算量适中．一般说来，考试时首先要调整好心态，不能让试题的难度、分量、熟悉程度影响自己的情绪，力争让会做的题不扣分，不会做的题尽量得分．然后认真、仔细读题、审题，细心算题，规范答题．其次，应在规定的时间内完成，讲究快速、准确．平时做题应做到：想明白、说清楚、算准确，即注意思路的清晰性、思维的严密性、叙述的条理性、结果的准确性．当然应试的策略要因人而异，比

如基础好的学生做填空、选择题可以控制在 45 分钟左右，基础较差的可能需要 1 小时甚至更多时间，主要是看怎样处理效果最好. 每次考完后，学生自己都应认真总结，最好能包括四个方面的内容：本题考查了哪些知识点？怎样审题？怎样打开解题思路？本题主要运用了哪些方法和技巧？关键步骤在哪里？针对目前存在的问题调整复习策略，使复习更有重点、有针对性.

# 第 4 章　复习时的注意点

一、注意复习的阶段性

数学高考复习，一般分为四个阶段.

第一阶段（n 年 9 月 1 日——n+1 年 3 月初）为“全面复习打基础”阶段，要求“抓纲务本，夯实三基；全面复习，单元过关.”按惯例，这一阶段结束后，将参加当地教研部门（地市级）组织的测试.

第二阶段（n+1 年 3 月初——n+1 年 4 月初）为“重点复习上台阶”阶段，要求“构建网络，重点复习；归纳迁移，发展能力.”按惯例，这一阶段结束后，将参加当地教研部门（省级）组织的测试.

第三阶段（n+1 年 4 月初——n+1 年 5 月中旬）为“综合训练攀高峰”阶段，要求“纵横联系，综合攀登；强化训练，全面提高.”许多学校，这一阶段结束后，会选用一份综合卷（外地试卷，或参考外地试卷的自拟卷，或当地教研部门的试卷）进行考查.

第四阶段（n+1 年 5 月中旬——n+1 年 6 月 6 日）为“考前调整稳心态”阶段，要求“自学为主，个辅为辅；适度训练，轻装上阵.”许多学校在这一阶段会有一些热身小测.

虽说各阶段没有严格的时间界定，各阶段也可能有相互内容的穿插、渗透，但为了使复习有序高效进行，我以为同学们还是要注意各阶段复习的层次要求，逐步提高数学复习质量.

二、注意复习的针对性

第一阶段的复习，通常是以单元复习进行的. 就像本书的第二篇“知识系列篇”那样，分十三章进行学习. 针对高考强调对基础知识与基本技能的考查，在总复习的第一阶段就要全面、系统地复习高中数学的基础知识，正确理解基本概念，正确掌握定理、原理、法则、公式，并形成记忆，形成技能，力争做到在广度上不留死角，做到单元过关.

第二阶段的复习，通常是以专题进行的. 老师在选定专题时，一是根据学生薄弱环节来编写；二是根据知识块来编写；三是根握热点问题来编写；四是根据题型来编写；五是根据数学思想方法来编写. 本书第二篇、第三篇都是专题复习的内容. 复习时，特别要注意掌握数学内容、思想方法、各类题型的内在联系，力争做到能把相关的知识榕互连接，融会贯通，着眼联系，灵活应用.

第三阶段的复习，要注意前一阶段存在的问题有针对性地组织，将需解决的问题溶入新的复习系列之中. 第三阶段的复习，应注重掌键知识的内在联系与综合，选择知识交汇点多的典型问题进行分析与探索. 与此同时，要有针对性地进行强化训练，包括重点、难点、疑点、误点、弱点、考点的强化训练.

具体看几个例子：

**例 2**　(1)（重点强化）对 $a>b>0$，作集合 $M=\left\{x|b<x<\frac{a+b}{2}\right\}\subset \mathbf{R}$，$N=\{x|\sqrt{ab}<x<a\}\subset \mathbf{R}$，则集合 $\{x|b<x\leqslant\sqrt{ab}\}$ 可表示为　（　）

A. $M\cup N$　B. $M\cap N$　C. $\complement_{R}M\cap N$　D. $M\cap\complement_{R}N$

(2)（难点强化）若曲线 $C$ 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解，则下面判断正确的是　（　）

A. 曲线 $C$ 的方程是 $f(x,y)=0$

B. 以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 $C$ 上

C. 方程 $f(x,y)=0$ 的曲线是 $C$

D. 方程 $f(x,y)=0$ 的曲线不一定是 $C$

(3)（疑点强化）设命题 $P$：的未知数范围扩大；命题 $Q$：方程产生增根. 则命题 $P$ 是 $Q$ 的条件　（　）

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

(4)（误点强化）设 $M=\{z|z=\cos^2\theta+i\cdot\sin^2\theta,\theta\in\mathbf{R}\}$，$N=\{z|z=(1+\cos\theta)+i\cdot\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$________.

(5)（弱点强化）函数 $y=-f(x)$ 的图像经过第三、四象限，则 $y=-f^{-1}(x)$ 的图像经过第________象限.

(6)（考点强化）关于二项式 $(x-1)^{1999}$ 有下列四个命题：①该二项式展开式中非常数项的系数和是 1；②该二项展开式中系数最大的项是第 1000 项；③该二项展开式中第六项为 $C_{1999}^{6}x^{1993}$；④当 $x=2000$ 时，$(x-1)^{1999}$ 除以 2000 的系数是 1999. 其中正确命题的序号是________________.

（注：把你认为正确的命题的序号都填上）

[答案] (1)D；(2)D；(3)D；(4)$\left\{1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$；(5)一、四；(6)①、④.

第四阶段的复习，老师往往是进行“套题训练”和“个别辅导”. 作为学生，应学会考后总结. 总结自己答卷时间的安排是否合适？失误丢分在何处？在失误处找出自己在知识、能力、方法和心理上有什么缺陷，今后如何弥补这些缺陷？同时还应学会将自己存在的问题记下，找机会向同学、向老师请教.

三、注意复习的综合性

鉴于高考命题有“综合化”的趋势，老师在选例和训练时，会注意问题的综合性，即在知识的交汇点处选题. 其类型有“小题综合化”（即选择、填空题的综合），某一专题的综合，涉及数学多领域的综合. 同学们应抓住时机，克服困难，掌握好综合性问题的训练.

**例 2**　（小题综合化）如图1－4－1，正四面体 $ABCD$ 中，$E$ 在棱 $AB$ 上，$F$ 在棱 $CD$ 上，使得

$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda(0<\lambda<+\infty)$

记 $f(\lambda)=\alpha_\lambda+\beta_\lambda$，其中 $\alpha_\lambda$ 表示 $EF$ 与 $AC$ 所成的角，$\beta_\lambda$ 表示 $EF$ 与 $BD$ 所成的角. 则　（　）

A. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加

B. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少

C. $f(\lambda)$ 在 $(0,+\infty)$ 为常做

D. $f(\lambda)$ 在 $(0,1)$ 单调增加，而在 $(0,+\infty)$ 单调减少

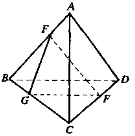


图 1—4—1

[答案] C

**例 3**　（解析几何综合题）以 $O$ 为原点，$\overrightarrow{OF}$ 所在直线为 $x$ 轴，建立如图所示的直角坐标系. 设 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FG}=1$，点 $F$ 的坐标为 $(t,0)$，$t\in[3,+\infty]$，点 $G$ 的坐标为 $(x_0,y_0)$.

(1)求 $x_0$ 关于 $t$ 的函数 $x_0=f(t)$ 的表达式，判断函数 $f(t)$

的单调性，并证明你的判断.

(2)设△$OFG$的面积$S=\frac{\sqrt{31}}{6}t$，若以$O$为中心，$F$为焦点的椭圆经过点$G$，求当$|\overrightarrow{OG}|$取得最小值时椭圆的方程.

(3)在(2)的条件下，若点$P$的坐标为$(0,\frac{9}{2})$，$C$、$D$是椭圆上的两点，且$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PD}(\lambda\neq1)$，求实数$\lambda$的取值范围.

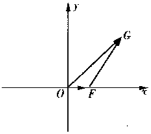


图 1-4-2

[解](1)由题意知：

$\overrightarrow{FG}=(x_0-t,y_0)$，$OF=(t,0)$，则$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{FG}=t(x_0-t)=1$.

解得$x_0=f(t)=t+\frac{1}{t}$

设$t_1>t_2\geqslant3$，则$f(t_1)-f(t_2)=(t_1+\frac{1}{t_1})-(t_2+\frac{1}{t_2})$

$=(t_1-t_2)-\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}=(t_1-t_2)\frac{t_1t_2-1}{t_1t_2}$.

$\because t_1-t_2>0,t_1t_2-1>0,t_1t_2>0$,

$\therefore f(t_1)-f(t_2)>0,f(t_1)>f(t_2)$，函数$f(t)$在区间$[3,+\infty]$上单调递增.

(2)由$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OF}||y_0|=\frac{1}{2}\times t\times|y_0|=\frac{\sqrt{31}}{6}t$，得$y_0=\pm\frac{\sqrt{31}}{3}$.

∴点$G$的坐标为$(t_1+\frac{1}{t},\pm\frac{\sqrt{31}}{3})$，$|\overrightarrow{OG}|^2=(t+\frac{1}{t})^2+\frac{31}{9}$.

∵函数$f(t)$在区间$[3,+\infty]$上单调递增，∴当$t=3$时，$|\overrightarrow{OG}|$取得最小值，此时点$F$、$G$的坐标分别为$(3,0)$、$(\frac{10}{3},\pm\frac{\sqrt{31}}{3})$.

由题意设椭圆方程为$\frac{x^2}{b^2+9}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 由点$G$在椭圆上，得$\frac{100}{9(b^2+9)}+\frac{31}{9b^2}=1$. 解得$b^2=9$.

∴所求椭圆方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

(3)解答一：设$C$、$D$的坐标分别为$(x,y)$、$(m,n)$，则$\overrightarrow{PC}=(x,y-\frac{9}{2})$，$\overrightarrow{PD}=(m,n-\frac{9}{2})$.

由$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PD}$，得$(x-y-\frac{9}{2})=\lambda(m,n-\frac{9}{2})$，$x=\lambda m$，$y=\lambda n-\frac{9}{2}\lambda+\frac{9}{2}$.

∵点$C$、$D$在椭圆上，$\therefore\frac{m^2}{18}+\frac{n^2}{9}=1$,

$\frac{\lambda^2m^2}{18}+\frac{(\lambda n-\frac{9}{2}\lambda+\frac{9}{2})^2}{9}=1$.

消去$m$，得$n=\frac{13\lambda-5}{4\lambda}$. 又$\because|n|\leqslant3$,

$\therefore\left|\frac{13\lambda-5}{4\lambda}\right|\leqslant3$，解得$\frac{1}{5}\leqslant\lambda\leqslant5$.

∴实数$\lambda$的取值范围是$[\frac{1}{5},1)\cup(1,5]$.

解答二：设点$A$、$B$的坐标分别为$(0,3)$、$(0,-3)$，过点$A$、$B$分别作$y$轴的垂线，交直线$PC$于点$M$、$N$.

若$|\overrightarrow{PC}|<|\overrightarrow{PD}|$，则$|\overrightarrow{PN}|\leqslant|\overrightarrow{PC}|$,

$\therefore1<\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PC}|}\leqslant\frac{|\overrightarrow{PN}|}{|\overrightarrow{PM}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=5$. 则$1<\frac{1}{\lambda}\leqslant5$，$\frac{1}{5}\leqslant\lambda<1$.

若$|\overrightarrow{PC}|>|\overrightarrow{PD}|$，同理可得

$1<\frac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PD}|}\leqslant\frac{|\overrightarrow{PN}|}{|\overrightarrow{PM}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=5$，则$1<\lambda\leqslant5$.

综上，实数$\lambda$的取值范围是$[\frac{1}{5},1)\cup(1,5]$.

**例4** (多领域综合题)已知函数$y=f(x)$的图像是自原点出发的一条折线. 当$n\leqslant y\leqslant n+1(n=0,1,2\cdots\cdots)$时，该图像是斜率为$b^n$的线段(其中正常数$b\neq1$)，设数列$\{x_n\}$由$f(x_n)=n(n=1,2,\cdots\cdots)$定义.(1)求$x_1$、$x_2$和$x_n$的表达式；(2)求$f(x)$的表达式，并写出其定义域；(3)证明：$y=f(x)$的图像与$y=x$的图像没有横坐标大于1的交点.

值得注意的是，高考前夕的"综合"体现了从单一到组合、从分割到整体，从记忆到应用、从慢速模仿到快速反应、从纵向联系到横向联系等特点，同学们在训练时应有所注意. 重点中学某些数学水平较高的学生，还可以适当选些我国高中数学竞赛某些一试训练题进行练习，进一步提高解答综合性问题的水平.

四、注意复习的创新性

数学高考注重考查学生的创新意识是近年来的趋势，今后仍将是高考命题"孜孜以求的目标"之一. 复习时，应注意两个问题：一是注意选择一定数量的新颖情境的问题进行训练，以增强适应性，培养创新能力；二是注意选择一定数量的能力型问题进行训练，逐步提高创新水平.

**例5** (创新题型)我们平常用的数是十进制数，如$2745=2\times10^3+7\times10^2+4\times10^1+5\times10^0$，表示十进制的数要用10个数码(又叫数字)：0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

在电子数字计算机中用的是二进制，只要两个数码：0和1，如二进制中

$110101=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$，等于十进制的数53.

用6个数码1和4个数码0组成一个二进制的十位数.(1)其中的奇数有________个；(2)恰有2个0连在一起，其他0不连在一起的偶数有________个.

[答案](1)70 (2)30

**例6** (能力型题)已知$a>b>c>0$，$t$是方程$ax^2+bx+c=0$的实根，则$t$的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)$ B. $(-1,0)$ C. $(0,1)$ D. $(1,+\infty)$

[分析]题干是抽象的，选择支是具体的，需从条件$a>b>c>0$作出推理判断.

$\because a,b,c>0$，$\therefore t<0$，排除C、D.

若$t<-1$，则$|t|>1$，$|t|^2>|t|$，$at^2>b|t|$,

$\therefore at^2+c>b|t|=-bt$，$\therefore at^2+bt+c>0$，与已知矛盾，又排除A. 故选B.

注：若构造满足$a>b>c>0$且$b^2-4ac>0$的特殊方程，亦可获解.

如令$a=6,b=5,c=1,\Delta=1>0$，此时方程为$6x^2+5x+1=0$，两根为$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{1}{3}$. 应选B.

# 第 5 章 高考数学解题谨防“十不”

数学解题，尤其是高考时的数学解题，对考生要求较高，在解题时要谨防“十不”.

一、审题不清：这是造成解题失误的首要因素.

**例 1** 设集合 $P=\{y|y=x,x\in R\}$，$M=\{y|y=x^2,x\in R\}$，则 $P\cap M$ 等于________.

A. $\{0,1\}$ B. $\{(0,0),(1,1)\}$ C. $P$ D. $M$

一班 50 人中，10 人选 B，8 人选 A. 前者将集合看成点集，后者从图像求得交点的纵坐标之值，事实上，$P=R$，$M=[0,+\infty)$，易知 $P\cap M=M$，应选 D.

二、概念不清：重解题技巧，不重视概念的学生不少，“吃了亏”时才知道概念之重要.

**例 1** 设 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，给出下列 4 个图形，其中能表示集合 $M$ 到集合 $N$ 的函数关系的有____.

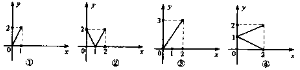


图 1-5-1

这是一道概念很强的题，多数学生答②④，问题出在④，函数定义中“…$y$ 有惟一确定的值和它对应”，④不符合，故仅有②.

三、辨析不明：数学中有不少易混知识，在解题中应注意加以区别，认真辨析.

**例 1** 关于函数 $f(x)=\lg\frac{x^2+1}{|x|}(x\neq 0,x\in R)$，有下列命题：

①函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $y$ 轴对称；②当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是增函数；当 $x<0$ 时，$f(x)$ 是减函数；③函数 $y=f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$；④当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时，$f(x)$ 是增函数；⑤$f(x)$ 无最大值，也无最小像. 其中，正确命题的序号是________.

本题融函数的对称性、单调性、最像于一题，宜细心辨析，可发现正确命题为①③④.

四、“细节”不清：解题不重视“细节”是失分的重要原因，一些好学生也不例外.

**例 8** 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax$ 的解集为 $\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，则实数 $a$ 的取值范围为 （ ）

A. $a<0$ B. $a\geqslant 0$ C. $a<4$ D. $a\leqslant 0$

利用数形结合，分别作出 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 和 $y=ax$ 的图像，大方向已明，问题出在选 A 还是选 D 上，注意“细节”，若 $a=0$，则解集为 $\{x|0<x<4\}$ 不合题意，故选 A.

五、功底不实：功底扎实是解题的基础，否则到手的解法也难以继续下去.

**例 1** 已知锐角 $\alpha$、$\beta$ 满足 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=2$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

本题虽有多种巧妙解法，但比较容易想到的是“求差化积”：

$$0=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}-2=\frac{\cos\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta-\sin\alpha}{\sin\alpha}=\cdots\cdots$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\sin\beta}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\alpha}\right]$$

没有扎实的功底，是得不到最后这一步的. 然后只须证方括号内的三角式不等于 0，而这是不难的.

六、速度不快：当今的数学考试，二小时内完成 14 道选择题、4 道填空题、6 道解答题，速度不快，怎能做完.

**例 6** 如图：在多面体 $EF-ABCD$ 中已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，$EF$ 与面 $AC$ 的距离为 2，则该多面体的体积为 （ ）

A. $\frac{9}{2}$ B. 5 C. 6 D. $\frac{15}{2}$

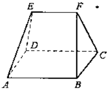



图 1-5-2

这是 1999 年高考题，被认为是“不拘泥于大纲”的好考题，不少考生解答此题“颇费周折”. 事实上，若直接计算 $V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times 3^2\times 2=6$，便知答案为 D.

同学们想一想，快在哪里呢？总结一下，平时解题的“可快之处”.

七、过程不明：数学解题强调过程清晰、简洁、明了，过程不明也是考试失分的原因之一.

**例 7** 复数 $z$ 满足 $|z|=1$，求 $|z^3-3z-2|$ 的最值.

[解]设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，……

过程不明，应写成：

$\because |z|=1$，$\therefore$ 可设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$

$\therefore |z^3-3z-2|=\cdots\cdots$

$=(2\cos\theta+2)\sqrt{5-4\cos\theta}$

$=\sqrt{(2\cos\theta+2)(2\cos\theta+2)(5-4\cos\theta)}$ (＊)，

又“不明”了，应交待：$\because -1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$，

$\therefore 2\cos\theta+2\geqslant 0$. 这样方可得到(＊)式，

$\therefore |z^3-3z-2|_{max}=3\sqrt{3}$

再次“不明”了：应交待等号成立的条件.

八、观察不够：数学解题，“观察”极为重要，不少题可“一望而解”.

**例 8** 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，与直线 $4x+3y-12=0$ 的距离最小的点的坐标是 （ ）

A. $(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ B. $(\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$

C. $(-\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ D. $(-\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$

通过观察，此点必在第一象限，故选 A.

九、思路不畅：面对数学问题，思路展不开，原因是不善于观察、联想、转化.

**例 9** 设 $a>2$，$b>2$，求证：$ab>a+b$.

这是一道不难的证明题，有些同学面对此题却无从下手. 其实，从对称入手，有：$a>0$，$b>0$，$\therefore ab>2b$，同理 $ab>2a$，相加即可.

从“不防设”入手，有：不妨设 $a\geqslant b$，则 $ab>2a=a+a\geqslant a+b$.

从“增量”入手，有：令 $a=2+\alpha$，$b=2+\beta$，$\alpha$、$\beta>0$，

则 $ab=4+2(\alpha+\beta)+\alpha\beta>4+(\alpha+\beta)=(2+\alpha)+(2+\beta)=a+b$.

从“构造正项”入手，有：$2ab-2(a+b)=(ab-2a)+(ab-2b)=a(b-2)+b(a-2)>0$.

从“倒数”入手，有：$0<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$0<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，相加，得 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，两边同乘 $ab$ 即证.

十、考虑不周："入题易，解全难"是当今部分数学题的特征，解题应追求“对而又全”.

**例 10** 求过点(0,1)点的直线，使它与抛物线 $y^2=2x$ 仅有一个交点.

[解]设过(0,1)的直线方程为 $y=kx+1$，与 $y^2=2x$ 联立，消去 $y$，得 $k^2x^2+(2k-2)x+1=0$，令 $\Delta=0$，得 $k=\frac{1}{2}$，

∴所求直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

这是一道典型的漏解题，问题有三：(1)未考虑 $k=0$、$k$ 不存在的情形；(2)“一个交点”包括相切、相交两种情况，上述解法未考虑相交的情况；(3) $k\neq0$ 时，才可用判别式，本题是考察思维严谨性的较佳选题.

正确答案为：$y=1$，$x=0$，$y=\frac{1}{2}x+1$，读者画个图便一目了然.

# 第二篇 知识系列篇

## 第1章 集合与简易逻辑

### 考试内容

集合.子集.补集.交集.并集

逻辑联结词.四种命题.充分条件和必要条件.

### 考试要求

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

## 2.1.1 集 合

### 知识要点

集合是数学最基本的概念之一,集合思想是一种重要的数学思想,它渗透于中学数学内容的各个方面.集合作为工具在函数、方程、不等式、排列组合、曲线及轨迹等知识中都有广泛的运用.

集合是每年高考必考的知识点之一,一般考查两方面的内容:一是集合自身的知识;二是集合语言与集合思想的应用.

复习集合时要抓住元素这个关键,遇到集合问题,首先要弄清集合里的元素是什么,集合的元素具有确定性、互异性、无序性,掌握集合的表示法(列举法、描述法、字母表示法)和集合的分类(有限集、无限集).注意区分元素对集合的隶属关系与集合之间的包含交系,正确地使用符号$\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\nsubseteq$,$\subsetneqq$,$=$等等,能熟练地进行集合的交、并、补等运算,在运算时,应首先化简给定的集合.

### 经典例题

例1 设集合$M=\{x|x^2-x<0\}$,$N=\{x||x|<2\}$,则

A. $M\cap N=\varnothing$  B. $M\cap N=M$  C. $M\cup N=M$  D. $M\cup N=R$

【解】$M=\{x|0<x<1\}$,$N=\{x|-2<x<2\}$  $\therefore M\in N$

$\therefore M\cap N=M\Rightarrow B$.

变式1

已知数集$M$满足条件:若$a\in m$,则$\frac{1+a}{1-a}\in M$,$(a\neq 0,a\neq 0)$.已知$3\in M$,试把由此确定的$M$的其他元素全都求出来.

例2 设$U$为全集,$M$、$N$、$P$都是它的子集,则图中阴影部分表示的集合是 ( )

A. $M\cap(N\cup P)$

B. $M\cap[(\complement_U N)\cap P]$

C. $[(\complement_U M)\cap(\complement_U N)]\cap P$

D. $(M\cap N)\cup(M\cap P)$

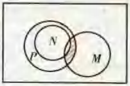



图 2-1-1

【解】由集合运算知识可知选D.

变式2

已知$U=\{x|x^2<50x\in\pi\}$,$(\complement_U M)\cap L=\{1,6\}$,$M\cap(\complement_U L)=\{2,3\}$,$\complement_U(M\cup L)=\{0,5\}$,求$M$,$L$

例3 若已知$B=\{a,b,c,d,e\}$,$C=\{a,c,e,f\}$,且集合$A$满足$A\subseteq B$,$A\subseteq C$,则集合$A$的个数是________.

【解】$\because B\cap C=\{a,c,e\}$,

据题意,$\{a,c,e\}$以及它的所有子集均可作集合$A$,所以$A$的个数是$2^3=8$.

变式3

已知集合$M$满足$\{1,2\}\subseteq M\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$写出集合$M$.

### 走出误区

例1 (2002高考题)设集合$M=\left\{x|x=\frac{k}{z}+\frac{1}{4},k\in z\right\}N=\left\{x|\frac{k}{2}+\frac{1}{2},k\in z\right\}$则

A. $M=N$  B. $M\subsetneqq N$  C. $N\subsetneqq M$  D. $M\cap N=\varnothing$

【误区】不能对$K$取有限值,然后去观察两集合的关系,这种手法直观,但不能写尽所有元素,如果对$K$分类讨论,较为繁杂.

【走出误区】$M$中$x=\frac{2k+1}{4}$,从中$x=\frac{k+2}{4}$易知,$M\subsetneqq N$选B

例2 设$A=\{x|x^2+px+q=0,x\in R\}$

$M=\{1,3,5,7,9\}$ $N=\{1,4,7,10\}$若$A\cap M=\varnothing$,$A\cap N$

$=A$

求 $p$、$q$ 的值

[误区]忽视 $A=4$，导致漏解，当 $A\neq 4$，考虑不周，$A$ 应有 $\{4\}$、$\{10\}$、$\{4,10\}$三种情况. 正确解法：

若 $A=\varnothing$，$\because A\cap M=\varnothing$，$A\cap N=A$

$\therefore \varnothing^2-4q<0$

若 $A\neq\varnothing$，$\because A\cap M=\varnothing$，$A\cap N=A$

$\therefore 4$ 或 $10\in A$

(1)若 $A=\{4\}$，则 $x^2+px+q=0$ 是 $(x-4)^2=0$ 即 $x^2-8x+16=0$ $\therefore p=-8, q=16$

(2)若 $A=\{10\}$，则同理可得 $p=-20, q=100$

(3)若 $A=\{4,10\}$，则 $(x-4)(x-10)=0$ 即 $x^2-14x+40=0$

$\therefore p=-14, q=40$

综上得 $\begin{cases}P=-8\\q=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}P=-20\\q=100\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=-14\\q=40\end{cases}$ 或 $p^2-4q<0$

## 发散思维

**例 1** 下面一组集合中，各个集合的意义是否相同？为什么？

$\{1,5\}$ $\{(1,5)\}$ $\{5,1\}$ $\{(5,1)\}$

[分析]这个问题，只有明确集合中元素的具体意义才能作出正确解答

[解] $\{1,5\}$与$\{5,1\}$均为两元素集合，依元素的互异性知，这两个集合与是同一集合 $\{(1,5)\}$ $\{(5,1)\}$ 是两个单元素集，由于$(1,5)$ $(5,1)$ 表示两个不同的点，所以它们不表示同一集合

**例 2** 已知 $A=\{x|x^2-px+15=0\}$ $B=\{x|x^2-ax-b=0\}$ 又 $A\cup B=\{2,3,5\}$ $A\cap B=\{3\}$ 求 $p,a,b$ 的值

[解]由 $A\cap B=\{3\}$，将 3 代入方程式 $x^2-px+15=0$，可求得 $p$，然后求出集合 $A$，再根据 $A\cap B=\{3\}$ $A\cup B=\{2,3,5\}$

$\therefore B=\{2,3\}$ 即 2,3 为方程 $x^2-ax-b=0$ 的两根

$\therefore \begin{cases}a^2+4b>0\\2+3=a\\2\times3=-b\end{cases} \Rightarrow a=5, b=-6$

$\therefore$所求 $p,a,b$ 的值分别为：$p=8, a_1=5, b=-6$

[分析]本题涉及交集并集及集合之间的关系，由 $A\cap B=\{3\}$，知 $3\in A$ 求出 $p$，由 $A\cup B=\{2,3,5\}$求出 $B=\{2,3\}$最后根据 2,3 是方程 $x^2-ax-b\geqslant 0$ 的两根求出 $a,b$ 的值.

## 高考预测

高考试题中，考查对集合的概念的认识及理解水平，以及交、并、补的定理和集合知识的应用，主要以选择题，填空题的小型综合形式出现.

## 题型设计

1. 满足$\{a\}\subseteq M\subsetneqq\{a,b,c,d\}$的集合 $M$ 共有 ( )
   A. 6 个　B. 7 个　C. 8 个　D. 15 个

2. $a_1$、$b_1$、$c_1$、$a_2$、$b_2$、$c_2$、均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 $M$ 和 $N$，那么“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的 ( )
   A. 充分非必要条件　B. 必要非充分条件
   C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

3. 若集合 $M=\{y|y=2^x, x\in R\}$，$N=\{y|y=x^2, x\in R\}$，则有 ( )
   A. $M\cap N=\{2,4\}$　B. $M\cap N=\{4,16\}$
   C. $M=N$　D. $M\subsetneqq N$

4. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$，$B=\{x|x-a<0\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则 $a$ 的取值范围为 ( )
   A. $a\geqslant 4$　B. $a>-2$
   C. $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 4$　D. $a\leqslant -2$

5. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+b\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，则 $b$ 应满足 ( )
   A. $|b|\geqslant 3\sqrt{2}$　B. $0<b<\sqrt{2}$
   C. $-3\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$　D. $b>3\sqrt{2}$或 $b<-3$

6. 设全集 $U=\{$小于 8 的非负整数$\}$，集合 $M=\{$6 的正约数$\}$，$N=\{x|x^3-5x^2+4x=0\}$，则 $M\cap N=$______，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$______.

7. $u=\{x|x=\frac{1}{2^n}, n\in N_+\}$，$A=\{x|x=\frac{1}{4^n}, n\in N_+\}$，则 $\complement_u A=\{$______$\}$.

8. 集合 $A$ 含有 10 个元素，集合 $B$ 含有 8 个元素，集合 $A\cap B$ 含有 3 个元素，则集合 $A\cup B$ 有____个元素.

9. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$，$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$，则集合$\{x|x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$______.

10. $A=\{x|(x+2)(x+1)\leqslant 0\}$，$B=\{x|(ax-1)(x+a)>0\}$ 且 $A\subseteq B$，求 $a$ 的范围.

11. 已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$a,b\in R$，集合 $A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.
    (1)求证：$A\subseteq B$；(2)当 $A=\{-1,3\}$时，求集合 $B$.

12. 设集合$\{1,2,3,4,5\}$，共有 $k$ 个子集 $A_i(i=1,2,\cdots\cdots k)$，记集合 $A_i$ 的元素之和为 $S_i(i=1,2\cdots\cdots k)$. 试求 $S_1+S_2+\cdots\cdots S_k$.

# 2.1.2 含绝对值的不等式解法

## 知识要点

**1. 不等式的四个基本性质**

(1)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；　(2)$a>b, b>c\Rightarrow a>c$；

(3)$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$；　(4)$a>c, c<0\Rightarrow ac<bc$.

**2. 绝对值不等式$|x|>a$ 或$|x|<a(a>0)$的解法**

(1)若$|x|=a\Rightarrow x=\pm a$；

(2)若$|x|<a\Rightarrow -a<x<a$；

(3)若$|x|>a\Rightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

**3. $|ax+b|<c$. $|ax+b|>c(c>0)$型不等式的解法**

若$|ax+b|>c(c>0)\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$，

若$|ax+b|<c(c>0)\Leftrightarrow -c<ax+b<c$. 再进一步即可解出 $x$.

## 经典考题

**例1** 解不等式 $1\leqslant|\frac{2}{5}x-1|<4$.

[解]可化为 $1\leqslant\frac{2}{5}x-1<4$ 或 $-4<\frac{2}{5}x-1\leqslant-1$

即 $2\leqslant\frac{2}{5}x<5$ 或 $-3<\frac{2}{5}x\leqslant0$

解得 $5\leqslant x<\frac{25}{2}$ 或 $-\frac{15}{2}<x\leqslant0$

∴原不等式的解集为 $\{x|5\leqslant x<\frac{25}{2}$ 或 $-\frac{25}{2}<x\leqslant0\}$

**说明**:(1)去掉绝对值号的依据是 $a\leqslant|x|\leqslant b\Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$ 或 $-b\leqslant x\leqslant-a$,而此规律可在理解的基础上加以记忆.

例如 $1<|x|<4$ 可化为 $\begin{cases}|x|<4\\|x|>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<4\\x>1\text{ 或 }x<-1\end{cases}$ 画数轴找公共部分.

(2)要注意结果是否包括端点.

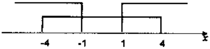



图 2-1-2

**·变式·**

解不等式 $|(x-1)-4|<2$.

**例2** 已知 $|x-1|\leqslant2$,且 $|x-a|\leqslant2$,求:

(1)当 $a<0$ 时,求 $x$ 的范围;

(2)若 $x$ 的范围在实数上无解,求 $a$ 的范围.

[解](1)在数轴上由数形结合,①$-3\leqslant a<0$ 时,$\{x|-1\leqslant x\leqslant2+a\}$;②$a<-3$ 时,$x$ 无解;

(2)在数轴上由数形结合,$a<-3$ 或 $a>5$

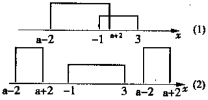



图 2-1-3

**·变式·**

设 $|x-2|<a$,不等式 $|x^2-4|<1$ 成立.求正实数 $a$ 的取值范围.

**例1** 解不等式 $|ax+3|<2$ $a\neq0$

[分析]关键在于绝对值符号里有字母,涉及到去系数时的讨论。

[解]原不等式可化为 $-2<ax+3<2$

即 $-5<ax<-1$

当 $a>0$ 时 解集为 $\{x|-\frac{5}{a}<x<-\frac{1}{a}\}$

当 $a<0$ 时 解集为 $\{x|-\frac{5}{a}>x>-\frac{1}{a}\}$

**说明**:遇到字母系数要合理进行讨论.

尤其是字母系数为负数时,去分母要改变不等号的方向.

**·变式·**

若不等式 $(ax+2)<6$ 的解集为 $(-1,2)$.则实数 $a$ 等于.

A. 8　B. 2　C. $-4$　D. $-8$

## 走出误区

**例1** 解不等式:$|3x-4|>1+2x$

[误区]由 $|3x-4|>1+2x$ 得 $3x-4>1+2x\Rightarrow x>5$ 去掉绝对值符号时未考虑绝对值内是大于零不是小于零

正确作法:原不等式可化为:$\begin{cases}3x-4>0\\3x-4>1+2x\end{cases}$ ① $\begin{cases}3x-4<0\\-(3x-4)>1+2x\end{cases}$

由①得 $x<\frac{3}{5}$　　由②得 $x>5$

∴原不等式的解集为 $\left\{x<\frac{3}{5}\text{或 }x>5\right\}$

**例2** 解不等式 $|ax+2|<6$

[误区]原不等式可化为 $-6<ax+2<6$.即 $-8<ax<6$

$a>0$ 时 $-\frac{8}{a}<x<\frac{6}{a}$.

$a<0$ 时 $-6<-ax<8$ ∴$\frac{6}{a}<x<\frac{8}{a}$

∴原不等式的解集是 $\left\{x|-\frac{8}{a}<x<\frac{6}{a}\text{或}\frac{6}{a}<x<-\frac{8}{a}\right\}$

分类讨论时不等式的解集表示不清.

[正确解法]原不等式可化为 $-6<ax+2<6$

①$a=0$ 时,原不等式的解集为 $\{x|x\in R\}$

当 $a>0$ 时原不等式的解集为 $\left\{x|-\frac{8}{a}<x<\frac{6}{a}\right\}$

当 $a<0$ 时,原不等式的解集为 $\left\{x|\frac{6}{a}<x<-\frac{8}{a}\right\}$

## 发散思维

**例1** 已知 $A=\{x|(x-2)|<5\}$,$B=\{x||x+a|\geqslant3\}$

且 $A\cup B=R$,求 $a$ 的取值范围.

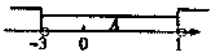
[分析]找 $a$ 的范围时,可通过数形结合,结合数轴分析.

[解]∵ $|x-2|<5$ ∴ $-3<x<7$ 即 $A=\{x|-3<x<7\}$

又 $|x+a|\geqslant3$∴$x\leqslant-3-a$ 或 $x\geqslant3-a$

即 $B=\{x|x\leqslant-3-a$ 或 $x\geqslant3-a\}$

如图 2-1-4




2-1-4

∵$A\cup B=R$ ∴须且只须 $\begin{cases}-3-a\geqslant-3\\3-a\leqslant7\end{cases}$ ∴$-4\leqslant a\leqslant7$

**例2** 关于实数 $x$ 的不等式 $|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $|x-a-1|\leqslant a$ 的解集记为 $A$ 与 $B$,求使 $A\subseteq B$ 的 $a$ 的取值范围

[分析]先解两不等式分别求出 $A$ 与 $B$,再由 $A\subseteq B$ 列出 $a$ 满足的条件,从而求出 $a$ 的取值范围

由 $|x-\frac{(a+1)^2}{2}|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 得 $-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant$