

**Linear
Algebra
with
Applications**
(Seventh Edition)

线性代数 (原书第7版)

(美) Steven J. Leon 著
马萨诸塞大学达特茅斯分校

张文博 张丽静 译



机械工业出版社
China Machine Press

31

0151.2

270

2007

Linear Algebra with Applications

(Seventh Edition)

线性代数 (原书第7版)

(美) Steven J. Leon 著
马萨诸塞大学达特茅斯分校

张文博 张丽静 译



机械工业出版社
China Machine Press

本书结合大量应用和实例详细介绍线性代数的基本概念、基本定理与知识点, 主要内容包括: 矩阵与方程组、行列式、向量空间、线性变换、正交性、特征值和数值线性代数等。为巩固所学的基本概念和基本定理, 书中每一节后都配有练习题, 并在每一章后提供了 MATLAB 练习题和测试题。

本书叙述简洁, 通俗易懂, 理论与应用相结合, 适合作为高等院校本科生“线性代数”课程的教材, 同时也可作为工程技术人员的参考书。

Simplified Chinese edition copyright © 2007 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Linear Algebra with Applications, Seventh Edition* (ISBN 0-13-185785-1) by Steven J. Leon, Copyright © 2006, 2002, 1998, 1994, 1990, 1986, 1980.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall.

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签, 无标签者不得销售。

版权所有, 侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号: 图字: 01-2005-4688

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(原书第7版)/(美)利昂(Leon, S., J.)著; 张文博, 张丽静译. —北京: 机械工业出版社, 2007. 2

(华章数学译丛)

书名原文: *Linear Algebra with Applications, Seventh Edition*

ISBN 978-7-111-20845-7

I. 线… II. ①利… ②张… ③张… III. 线性代数 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 014807 号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 迟振春

北京京北制版印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2007 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm·27.75 印张

定价: 58.00 元

凡购本书, 如有倒页、脱页、缺页, 由本社发行部调换
本社购书热线: (010)68326294

译者序

本书译自 Steven J. Leon 所著的《Linear Algebra with Applications, Seventh Edition》一书，是一本既具有理论意义，又有重要应用价值的书籍。本书不仅适合作为本科生学习线性代数知识的教材，同时也可作为一般读者在实践中使用的参考书。

原书作者从事线性代数的教学和研究工作几十年，有着非常丰富的教学和研究经验。本书前六版得到了众多读者的肯定，本版又进行了很多修正和改进。

本书内容十分丰富，除了对线性代数的基本概念进行了必要的阐述和证明外，还给出了大量的应用实例。这些实例均与现代科学技术以及生产生活实践紧密相关。通过这些例子，读者可在学习线性代数基本知识的同时，了解这些基本知识在实践领域中的应用，从而大大提高学习兴趣，并有助于读者理论结合实际掌握线性代数。

本书另外一个重要的特色是，紧密结合数学工具 MATLAB，在每一章的结尾都包含很多计算机操作练习，并在附录中给出了完成这些练习所需要的 MATLAB 软件的基本用法。这些计算机练习为读者进一步理解线性代数基本内容，把握线性代数的实质，灵活运用线性代数的基本方法，提供了十分有益的帮助。

在本书的翻译过程中，得到了机械工业出版社华章分社的支持与帮助，在此表示感谢。最后，感谢我的家人在本书翻译过程中所给予的支持和鼓励。

译者
于北京邮电大学

前 言

随着计算机技术的发展,线性代数的重要性日益凸显,其应用领域也越来越广泛.同时,现代软件技术为改进线性代数课程的教学方法提供了可能.本书作者长期讲授线性代数课程,并在教学过程中不断探索更利于学生理解的新教学方法.本书也随之改进,自1980年第1版出版以来,至今已出版到第7版.本版在以前各版本的基础上,根据读者和审稿人的建议进行了大量的改进.

第7版中的更新内容

1. 新的和扩展的应用实例

本版中增加了下列新的应用问题:

(a)飞机的偏航、俯仰和翻滚用线性变换进行表示.

(b)航天飞机的定位可使用特征值问题求得.

(c)Google™是当今网上冲浪中搜索引擎的领头羊.在第6章中,我们将看到搜索引擎如何利用线性代数对网页进行分级和排序.

(d)扩展了对马尔可夫链的讨论,并给出了一个新的定理.

(e)在第6章的最后再次讨论了马尔可夫链.

2. 章测试题和新的练习

以前的版本中,在每一章的末尾仅包括判断正误的测试题.本版在每一章的末尾增加了10~12道测试题.

另外,在各节后的练习中又增加了新练习.

3. 新的图片

本版中添加了七张新的图片.

4. MATLAB 更新

MATLAB®附录已经进行了更新和扩充.本书中的所有MATLAB练习均在MATLAB 7.0中测试通过.另外,还更新了两个MATLAB练习.

5. 专门网站和补充材料

Prentice Hall为本书提供了一个专门的网站.该网站包含很多附加材料.其中包括本书补充的两章,分别为:

- 第8章:迭代方法.
- 第9章:标准型.

也可以通过作者网站(<http://www.umassd.edu/cas/mathematics/people/leon>)下载.

6. 《The ATLAST Companion Computer Manual》第2版

ATLAST(扩展的线性代数教学用软件工具, Augmenting the Teaching of Linear Algebra using Software Tools)是NSF为鼓励和促进线性代数教学中软件的使用而发起的一个项目. 在1992~1997年间, ATLAST项目指导了18个工作组使用MATLAB软件包. 这些工作组为基于软件的线性代数教学设计了上机练习、方案和教学计划. 1997年, 从这些素材中选择了一部分以手册的形式出版. 这本手册已经进行了大量的扩充, 目前的版本为《The ATLAST Companion Computer Manual》第2版(Prentice Hall, 2003). 和ATLAST书籍配套开发的软件工具包(M-文件)可以从ATLAST网站下载. Mathematica用户可以下载由Richard Neidinger开发的《ATLAST Mathematica Notebooks》.

计算机练习

本版每一章的结尾均包含一段计算练习, 这些练习是基于MATLAB软件包的. 本书的MATLAB附录介绍了该软件的基本用法. MATLAB的优势在于, 它是矩阵运算的强大工具, 并且易于学习. 看完附录后, 学生应可以完成计算练习, 而不需要参考其他的软件书籍或手册. 教学时, 建议用一个学时讲授该软件. 这些练习可以作为一般的家庭作业, 也可作为规定的计算机实验课程的一部分.

正如前面提到的, ATLAST书籍可作为本书计算机练习的辅助材料. ATLAST书籍共八章, 每一章均包含一个简短的练习和一段较长的项目.

虽然课程讲解可以不涉及计算机上的应用, 但计算机练习有助于强化学生的学习, 并为他们提供线性代数学习的新手段. 因此, 在初次讲授线性代数的课程中, 建议组成线性代数课程学习小组, 这种观点被越来越多的数学团体所认同.

内容概要

本书不但适用于低年级的学生, 同时也适用于高年级的学生. 学生应熟悉微分和积分的基本知识, 即学过一个学期的微积分课程.

若本书作为低年级课程的教材, 教师应花更多的时间在前面的章节中, 并略去后面的很多章节. 对更为高级的课程, 可以快速浏览前两章中的很多主题, 然后较为完整地讲述后面的章节. 本书内容讲解细致, 初学者在阅读和理解这些材料时不会有什么问题. 为进一步帮助学生, 书中还给出了大量的例子. 每一章后面的计算机练习有助于学生进行数值计算, 学生还可尝试将这些结果进行推广. 另外, 本书中包含很多应用问题, 这些应用问题有助于学生开拓思路并理解学过的相关内容.

本书中包含了美国国家科学基金(NSF)发起的、线性代数课程研究小组(LACSG)推荐的所有内容并有所补充. 尽管有很多材料无法包含在一学期的课程中, 但本书内容相对独立, 教师可以很容易略过不需要的材料. 此外, 学生可以将本书作为参考, 并自学略过的主题.

后面给出了针对不同课程的推荐教学大纲. 为更好地帮助教师选择主题, 书中有三节的内容为可选的, 并在标题前以星号“†”进行标记. 这些内容对本书后续章节的学习没有影响, 因

此可以略过它们.

理论上讲, 本书内容可在两学期内讲授. 尽管 LACSG 建议线性代数课程要上两个学期, 但这在很多大学中并不现实. 目前对中级课程还没有一个公认的核心教学大纲. 事实上, 如果教师希望中级课程的所有内容能编写在一本书中的话, 则这本书将非常厚重(并十分昂贵). 本书尽力覆盖了现代应用问题中需要的所有线性代数基本主题. 此外, 对中级课程还附加了两个可以从网络上下载的章节.

建议课程教学大纲

I. 两学期课程

在两个学期的教学中, 可以包含本书所有的 39 节. 当然, 可以略去第 2、5 和 6 章中可选的三节. 还可以包含一次额外的课来演示如何使用 MATLAB 软件.

II. 低年级学生的一学期课程

A. 基本的低年级课程

1.1~1.5 节	7 讲
2.1~2.2 节	2 讲
3.1~3.6 节	9 讲
4.1~4.3 节	4 讲
5.1~5.6 节	9 讲
6.1~6.3 节	4 讲

总计 35 讲

B. LACSG 以矩阵为主的课程

线性代数课程研究小组推荐的核心课程中仅包含欧几里得向量空间. 因此, 对该类课程, 可以忽略 3.1 节(这是关于一般向量空间的内容)以及第 3 章到第 6 章中涉及函数空间的所有内容和练习. 本书包含了 LACSG 核心教学大纲中的所有内容, 无需再引入其他的辅助材料. LACSG 建议用 28 讲讲授核心材料. 这可通过采用每周一讲, 并结合复习课来完成. 如果没有复习课, 推荐使用下面的进度表:

1.1~1.5 节	7 讲
2.1~2.2 节	2 讲
3.2~3.6 节	7 讲
4.1~4.3 节	2 讲
5.1~5.6 节	9 讲
6.1、6.3~6.5 节	8 讲

总计 35 讲

Ⅲ. 一学期高级课程

在较为高级的课程中, 覆盖的内容取决于学生的知识背景. 下面是两个 35 讲的课程.

A. 课程 1

1.1~1.5 节	6 讲
2.1~2.2 节	2 讲
3.1~3.6 节	7 讲
5.1~5.6 节	9 讲
6.1~6.7 节(如果时间允许, 可加上 6.8 节)	10 讲
7.4 节	1 讲
	总计 35 讲

B. 课程 2

回顾第 1~3 章各主题	5 讲
4.1~4.3 节	2 讲
5.1~5.6 节	10 讲
6.1~6.7 节(如果时间允许, 可加上 6.8 节)	11 讲
7.4 节(如果时间允许, 可加上 7.1~7.3 节)	7 讲
	总计 35 讲

补充材料

下面给出了本书的配套书籍.

- **ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra.** ISBN 0-13-169817-6.
- **Linear Algebra Labs with MATLAB: 3rd ed.** David Hill 和 David Zitarella 著. ISBN 0-13-169816-8.
- **Visualizing Linear Algebra using Maple.** Sandra Keith 著. ISBN 0-13-169818-4.
- **Maple Supplement for Linear Algebra.** John Maloney 著. ISBN 0-13-169819-2.
- **Understanding Linear Algebra Using MATLAB.** Irwin 和 Margaret Kleinfeld 著. ISBN 0-13-169820-6.
- **Student Guide to Linear Algebra with Applications.** ISBN 0-13-224555-8. 该手册总结了重要的定理、定义和本书中给出的概念, 其中还包含部分练习的答案和提示, 以及对其他练习的建议.

其他补充材料

- **ATLAST Mathematica Notebooks.** 包括很多 ATLAST 书籍中练习和项目的 Mathematica 版本. Mathematica Notebooks 可以从 ATLAST 的网站上免费下载.

www.umassd.edu/specialprograms/atlast

- **Instructor's Solution Manual.** ISBN 0-13-193625-5. 该手册中包含了本书所有非常规的练习的完整答案, 同时也包含了没有在本书的答案一节中列出的很多基本练习的答案.
- **网络资源.** Prentice Hall 网站为本书提供了很多补充材料. 该网站的 URL 为:
www.prenhall.com/leon

致谢

感谢所有对本书的 7 个版本给予了大量帮助的人, 同时对反馈意见、提出建议的读者表示感谢.

特别感谢第 7 版的审阅人:

Jeffrey I. Brown, 北加利福尼亚大学威尔明顿分校

Barbara Cortzen, DePaul 大学

Mark J. DeBonis, 加利福尼亚大学欧文分校

William W. Hager, 佛罗里达大学

Lisa Mantini, 俄克拉何马州立大学

Katie Kolossa, 亚利桑那州立大学

Roger Kraft, 普度大学卡柳梅特分校

Ed Overman, 俄亥俄州立大学

Mark Ronan, 伊利诺伊大学芝加哥分校

Paul M. Weichsel, 伊利诺伊大学厄巴纳—尚佩恩分校

Mu-Tao Wang, 哥伦比亚大学

Bruno Wichnoski, 北加利福尼亚大学夏洛特分校

本版中的很多修正和练习都基于他们的意见和建议.

感谢 Diego Casadei 为第 6 章新的应用问题提供航天飞机的图片. 特别感谢数学编辑 George Lobell 对新版本的策划给予的帮助, 出版商 Bob Walters 在本书出版过程中提供的帮助. 感谢 Prentice Hall 的所有编辑、生产和销售人员.

感谢 Gene Colub 和 Jim Wilkinson. 本书第 1 版中的绝大多数内容写于 1977~1978 年, 那时作者正在斯坦福大学做访问学者. 在此期间, 作者听取了由 Gene Colub 和 J. H. Wilkinson 讲授的数值线性代数的课程, 这些课程对本书有着深刻的影响. 最后, 感谢 Germund Dahlquist 对本书早期版本的建议. 尽管 Germund Dahlquist 和 Jim Wilkinson 已经辞世, 但他们仍然活在大家的记忆中.

Steven J. Leon
sleon@umassd.edu

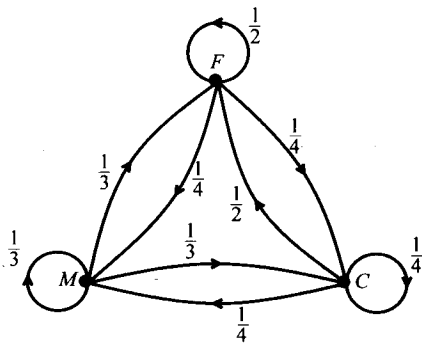
目 录

译者序		MATLAB®练习	166
前言		测试题 A——判断正误	167
		测试题 B	168
第 1 章 矩阵与方程组	1	第 5 章 正交性	170
1.1 线性方程组	1	5.1 R^n 中的标量积	170
1.2 行阶梯形	10	5.2 正交子空间	181
1.3 矩阵代数	24	5.3 最小二乘问题	188
1.4 初等矩阵	50	5.4 内积空间	196
1.5 分块矩阵	59	5.5 正交集	204
MATLAB®练习	69	5.6 格拉姆-施密特正交化过程	220
测试题 A——判断正误	73	5.7 正交多项式	227
测试题 B	73	MATLAB®练习	235
第 2 章 行列式	75	测试题 A——判断正误	237
2.1 矩阵的行列式	75	测试题 B	238
2.2 行列式的性质	81	第 6 章 特征值	240
2.3 克拉默法则	87	6.1 特征值和特征向量	241
MATLAB®练习	91	6.2 线性微分方程组	252
测试题 A——判断正误	93	6.3 对角化	262
测试题 B	93	6.4 埃尔米特矩阵	277
第 3 章 向量空间	95	6.5 奇异值分解	286
3.1 定义和例子	95	6.6 二次型	298
3.2 子空间	101	6.7 正定矩阵	309
3.3 线性无关	109	6.8 非负矩阵	316
3.4 基和维数	118	MATLAB®练习	321
3.5 基变换	123	测试题 A——判断正误	327
3.6 行空间和列空间	131	测试题 B	327
MATLAB®练习	138	第 7 章 数值线性代数	330
测试题 A——判断正误	140	7.1 浮点数	330
测试题 B	140	7.2 高斯消元法	334
第 4 章 线性变换	142	7.3 主元选择策略	340
4.1 定义和例子	142	7.4 矩阵范数和条件数	345
4.2 线性变换的矩阵表示	149	7.5 正交变换	358
4.3 相似性	161		

7.6 特征值问题	368	附录 MATLAB®	396
7.7 最小二乘问题	377	参考文献	406
MATLAB®练习	387	部分练习参考答案	408
测试题 A——判断正误	393	索引	426
测试题 B	394		

第 1 章

矩阵与方程组



求解线性方程组或许是数学问题中最重要的问题。超过 75% 的科学研究和工程应用中的数学问题，在某个阶段都涉及求解线性方程组。利用新的数学方法，通常可将较为复杂的问题化为线性方程组。线性方程组广泛应用于商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域。因此，本书从讨论线性方程组开始。

1.1 线性方程组

形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

的方程称为含有 n 个未知量的方程，其中 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b 为实数， x_1, x_2, \dots, x_n 称为变量。含有 m 个方程和 n 个未知量的方程组定义为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (1)$$

其中 a_{ij} 及 b_i 均为实数。(1)称为 $m \times n$ 的线性方程组。下面是几个线性方程组的例子：

(a) $x_1 + 2x_2 = 5$	(b) $x_1 - x_2 + x_3 = 2$	(c) $x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 + 3x_2 = 8$	$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$	$x_1 - x_2 = 1$
		$x_1 = 4$

方程组(a)称为 2×2 的方程组，(b)称为 2×3 的方程组，(c)称为 3×2 的方程组。

若有序 n 元数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 满足方程组中的所有方程，则称其为该方程组的解。例如，有序数对 $(1, 2)$ 为方程组(a)的解，因为

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1) + 2 \cdot (2) &= 5 \\ 2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) &= 8 \end{aligned}$$

有序三元组 $(2, 0, 0)$ 为方程组(b)的解，因为

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2) - 1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) &= 2 \\ 2 \cdot (2) + 1 \cdot (0) - 1 \cdot (0) &= 4 \end{aligned}$$

事实上，方程组(b)有很多解。易见，对任意的实数 α ，有序三元组 $(2, \alpha, \alpha)$ 均为(b)的解。

方程组(c)无解, 由(c)中的第 3 个方程知, 第一个变量的取值应为 4. 将 $x_1=4$ 代入其前两个方程, 可以看出, 第二个变量必须满足

$$4 + x_2 = 2$$

$$4 - x_2 = 1$$

由于不存在实数能同时满足上述两个方程, 因此, 方程组(c)无解. 如果线性方程组无解, 则称该方程组是不相容的(inconsistent). 如果线性方程组至少存在一个解, 则称该方程组是相容的(consistent). 由此, 方程组(c)为不相容的, 而方程组(a)和(b)均为相容的.

线性方程组的所有解的集合称为方程组的解集(solution set). 如果线性方程组不相容, 则其解集为空集. 相容的线性方程组的解集必非空. 因此, 求解线性方程组, 即寻找其解集.

2×2 的方程组

让我们从几何的角度考虑方程组

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

每一个方程均可对应于平面上的一条直线. 有序对 (x_1, x_2) 为上述方程组解的充分必要条件是, 两条直线均过该实数对对应的平面上的点. 例如, 考虑三个方程组

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & x_1 + x_2 = 2 & \text{(ii)} & x_1 + x_2 = 2 & \text{(iii)} & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 - x_2 = 2 & & x_1 + x_2 = 1 & & -x_1 - x_2 = -2 \end{array}$$

方程组(i)对应的两条直线的交点为 $(2, 0)$. 因此 $\{(2, 0)\}$ 为方程组(i)的解集. 方程组(ii)对应的两条直线是平行的, 因此, 方程组(ii)为不相容的, 即它的解集为空集. 方程组(iii)对应的两条直线相互重合, 因此, 直线上任一点的坐标均为方程组(iii)的解(参见图 1.1.1).

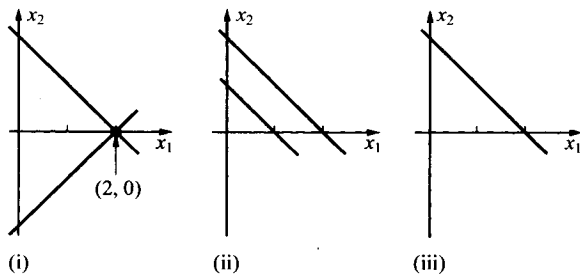


图 1.1.1

一般地, 两条直线间有三种情况: 相交、平行或重合, 相应的解集中分别含有一个、零个或无穷多个元素.

$m \times n$ 的方程组与此类似. $m \times n$ 的方程组可能相容, 也可能不相容. 如果它们相容, 则方程组只能是有且只有一个解, 或有无穷多个解. 事实上, 这就是所有的可能性. 其原因将在 1.2 节中学习行阶梯形方程组时予以讲解. 下面关注的问题是求所给方程组的所有解. 为处理这个问题, 首先引入等价方程组(equivalent systems)的概念.

等价方程组

考虑两个方程组

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \quad \quad x_2 = 3 \\ \quad \quad 2x_3 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{(b)} \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \quad \quad -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ \quad \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

显然, 方程组(a)容易求解. 因为, 由后两个方程容易得到 $x_2=3$ 和 $x_3=2$. 将这些值代入第一个方程, 可得

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 3 - 2 &= -2 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

3

于是, 方程组(a)的解为 $(-2, 3, 2)$. 求解方程组(b)似乎不是很容易. 其实, 方程组(b)与方程组(a)有相同的解. 为看清这一点, 首先将其前两个方程相加:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ \hline x_2 = 3 \end{array}$$

若 (x_1, x_2, x_3) 为(b)的解, 则它必满足方程组中的所有方程. 因此, 它必然满足任意两个方程相加后得到的新方程. 因此, x_2 必为 3. 类似地, (x_1, x_2, x_3) 必满足第三个方程减去第一个方程后得到的新方程:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \hline 2x_3 = 4 \end{array}$$

因此, 方程组(b)的解必为方程组(a)的解. 通过类似的讨论, 可以证明方程组(a)的解也是方程组(b)的解. 由(a)中的第二个方程减去第一个方程得

$$\begin{array}{r} x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{array}$$

然后, 将其第一个方程与第三个方程相加:

$$\begin{array}{r} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_3 = 4 \\ \hline 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{array}$$

因此, (x_1, x_2, x_3) 为(b)的解的充要条件是, 它是方程组(a)的解. 即方程组(a)和方程组(b)有相同的解集 $\{(-2, 3, 2)\}$.

定义 若两个含有相同变量的方程组具有相同的解集, 则称它们是等价的(equivalent).

显然, 交换方程组中任意两个方程的位置, 不会影响方程组的解集. 重新排列后的方程组将等价于原方程组. 例如, 方程组

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 4 \qquad 4x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \quad \text{和} \quad 3x_1 - x_2 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \qquad x_1 + 2x_2 = 4 \end{array}$$

4

含有三个相同的方程, 因此, 它们必有相同的解集.

若将方程组中的某一方程两端同乘一非零实数, 则不改变方程组的解集, 并且新方程组等价于原方程组. 例如, 方程组

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 & \text{和} & -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{array}$$

是等价的.

若将方程组中某一方程的倍数加到另一方程上, 新的方程组将与原方程组等价. 由此可得, n 元组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 满足两个方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned}$$

的充要条件是, 它满足方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + \dots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n &= b_j + \alpha b_i \end{aligned}$$

综上所述, 有三种运算可得到一个等价的方程组:

- I. 交换任意两个方程的顺序.
- II. 任一方程两边同乘一个非零的实数.
- III. 任一方程的倍数加到另一方程上.

对给定的方程组, 可以使用这些运算得到一个容易求解的等价方程组.

$n \times n$ 的方程组

我们在本节中仅讨论 $n \times n$ 的方程组. 我们将证明, 若 $n \times n$ 的方程组仅有一个解, 则利用上面的运算 I 和运算 III 可得到一个等价的“严格三角形方程组”.

定义 若方程组中, 第 k 个方程的前 $k-1$ 个变量的系数均为零, 且 $x_k (k=1, \dots, n)$ 前的系数不为零, 则称该方程组为**严格三角形的**(strict triangular form).

▶例 1 方程组

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

为严格三角形的, 因为第二个方程中的系数分别为 0, 1, -1, 且第三个方程的系数分别为 0, 0, 2. 由于该方程组为严格三角形的, 因此容易求解. 由第三个方程可得 $x_3 = 2$. 将其代入第二个方程, 有

$$x_2 - 2 = 2 \quad \text{或} \quad x_2 = 4$$

将 $x_2 = 4, x_3 = 2$ 代入第一个方程, 最终可得

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2 \cdot 4 + 2 &= 1 \\ x_1 &= -3 \end{aligned}$$

因此, 方程组的解为 $(-3, 4, 2)$.

任何 $n \times n$ 的严格三角形方程组均可采用和上例相同的方法求解. 首先, 从第 n 个方程解

得 x_n , 将其代入第 $n-1$ 个方程解得 x_{n-1} , 将 x_n 和 x_{n-1} 的值代入第 $n-2$ 个方程解得 x_{n-2} , 以此类推. 称这种求解严格三角形方程组的方法为回代(back substitution).

▶例 2 解方程组

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2$$

$$4x_3 + 3x_4 = 3$$

$$4x_4 = 4$$

解 利用回代法, 得到

$$4x_4 = 4 \quad x_4 = 1$$

$$4x_3 + 3 \cdot 1 = 3 \quad x_3 = 0$$

$$x_2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 \quad x_2 = -1$$

$$2x_1 - (-1) + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 1 \quad x_1 = 1$$

因此, 方程组的解为 $(1, -1, 0, 1)$. ◀

一般地, 给定一个 n 个方程 n 个未知量的线性方程组, 可用运算 I 和 III 尽可能将其转化为等价的严格三角形方程组. (我们将在下一节中看到, 当方程组不是唯一解时, 不可能将其化简为严格三角形式.)

6

▶例 3 解方程组

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

解 第二式减去第一式的 3 倍, 可得

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

第三式减去第一式的 2 倍, 可得

$$-x_2 - x_3 = -2$$

若将方程组中的第二和第三个方程, 分别用上面两个新方程替换后, 则得到等价的方程组

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

$$-x_2 - x_3 = -2$$

若该方程组的第三个方程替换为它与第二个方程的 $-\frac{1}{7}$ 倍的和, 最终可得严格三角形方程组:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-7x_2 - 6x_3 = -10$$

$$-\frac{1}{7}x_3 = -\frac{4}{7}$$

利用回代法, 得到

$$x_3 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 3$$

◀

回顾上例中的方程组，可以把方程组同一个以 x_i 的系数为元的 3×3 的数字阵列联系起来。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

称这个阵列为方程组的系数矩阵(coefficient matrix)。简单地说，矩阵(matrix)就是一个矩形的数字阵列。一个 m 行和 n 列的矩阵称为 $m \times n$ 矩阵。

如果在系数矩阵右侧添加一列方程组的右端项，可得到一个新的矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

7

称这个矩阵为方程组的增广矩阵(augmented matrix)。一般地，当一个 $m \times r$ 的矩阵 B 采用上述方法附加到一个 $m \times n$ 的矩阵 A 上时，相应的增广矩阵记为 $(A | B)$ 。若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

则

$$(A | B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array} \right]$$

对每一方程组，均对应于一个增广矩阵，形如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

方程组求解可以通过对增广矩阵进行运算得到。 x_i 作为位置标志符，在计算结束前，可以省略。用于得到等价方程组的三个运算，可对应于下列增广矩阵的行运算。

初等行运算

- I. 交换两行.
- II. 以非零实数乘以某行.
- III. 将某行替换为它与其他行的倍数的和.

注意到前面的例子，是用第一行将其他各行中的第一列元素消去。称第一行为主行(pivotal row)。为明显起见，主行中的元素均加黑表示并为整行添加阴影。主行的第一个非零元素称为主元(pivot)。