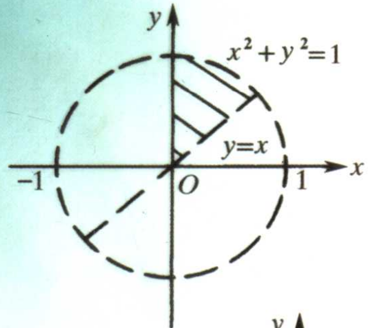
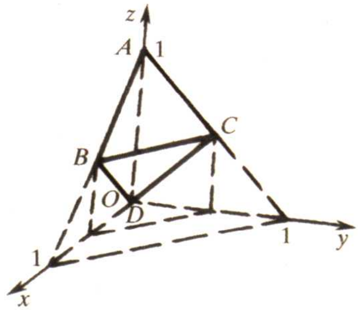
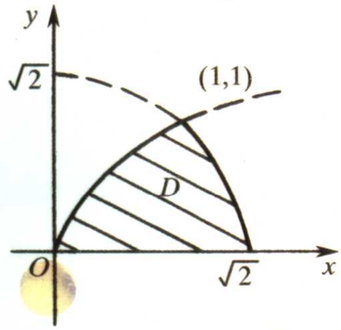
高等数学(第2版)

(下册)

邱忠文　李君湘　主编







国防工業出版社
National Defense Industry Press

高等数学

（第2版）

下　册

邱忠文　李君湘　主编

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本版《高等数学》上、下册系高等院校“新高职”或“一般本科”高等数学课程使用的教材，本教材基本保留了“高等数学”课程内容的传统风格，编写时参照了《高等数学课程教学基本要求》.本书上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及向量代数与空间解析几何等7章；下册包括多元函数微分学、重积分、级数、微分方程及附录中的曲线积分与曲面积分等5章。全书基本上覆盖了现行理工科类院校《高等数学》课程(本科生)的全部教学内容.

本书既适用于全日制普通高等理工科院校及经济、管理类院校的本科生作为高等数学课程的教材，又可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育的大专生作高等数学课程的教科书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册／邱忠文，李君湘主编．—2版．
北京：国防工业出版社，2006.1
ISBN 7-118-04013-4

Ⅰ．高… Ⅱ.①邱… ②李… Ⅲ．高等数学－高等学校:技术学校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第074331号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 710×960 1/16 印张 18¼ 328千字
2006年1月第2版 2006年1月北京第1次印刷
印数:1—4000册 定价:24.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

我们编写的《高等数学》(上、下册)教材,自2001年9月由国防工业出版社出版以来,经过了4年的教学实践,深感尚有多处不尽如意之处.为了进一步提高《高等数学》课程的教学质量,本书的主编对第1版的教材进行了适当的修改.吸收了使用本书师生的意见,编写了与本书配套的《高等数学习题解答与自我测试》教学辅导参考书.

第2版的教材在内容的编排上做了一些变动:“微分方程”的内容从上册的第7章,移到了下册的第11章;下册中“曲线积分与曲面积分”的内容,由正文部分移到了附录之中.

本书仍分上、下两册,上册的内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及向量代数与空间解析几何等7章;下册的内容包括多元函数微分学、重积分、级数、微分方程及附录中的曲线积分与曲面积分等5章的内容.全书基本上覆盖了现行理工科类院校《高等数学》课程(本科生)的全部教学内容,因此,本书既适用于全日制普通高等理工科院校及经济、管理类院校的本科生作高等数学课程的教材,又可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育的大专生(书中有 * 的内容不学)作高等数学课程的教科书.

与本书配套的《高等数学习题解答与自我测试》一书,是应学生们的要求编写的,它可以辅导和帮助同学们更好地学习高等数学,进一步地提高解题的能力.书中的自我测试题基本上是为本科生准备的.

本书的编写得到了天津大学网络教育学院、天津大学职业教育学院和天津大学继续教育学院的大力支持和帮助,编者在此深表感谢.天津大学精仪学院的部分同学在2005年研究生入学考试(数学1)的准备中试用了本书,他们取得的成绩令我们高兴.

参加本书编写工作的有邱忠文、李君湘、于桂贞、李彩英、严丽、韩健、孙秀萍、韩月丽等.限于编者的水平,书中不免仍有疏误,恳请读者指正.

编　者

2005年6月于天津大学

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 8 章　多元函数微分学

到目前为止,本书讨论的函数都是只有一个自变量的函数,这种函数叫做一元函数或单元函数.

在自然科学与工程技术中,很多的问题反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的关系,即多元函数的概念.

本章将在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分学.多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上发展起来的,它的一些基本概念及研究问题的方法虽然大体上与一元函数相仿,但是,由于自变量个数的增加,会产生一些新的问题.在学习本章的内容时,应当注意与一元函数相对照,比较它们的异同,以利于多元函数微分学的学习.

8.1　多元函数的概念

8.1.1　平面点集与区域

在讨论一元函数的有关概念时,要考虑变量的变化范围,经常要用到区间与邻域的概念,在讨论二元函数的有关概念时,需要用到平面点集与区域的概念.我们首先介绍平面点集与区域的基本知识,并把邻域的概念推广到平面上.

考虑两个变量 x 与 y,它们的一组值 (x,y) 可以看作 xOy 平面上点 P 的直角坐标,于是 x 与 y 的变化范围就是平面上的某个点集.邻域和区域都是符合一定条件的点集.通常用大写英文字母 $D,E,F,\cdots$ 等表示平面点集.

例如,点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$,这里 E 表示平面上所有满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点 (x,y) 所组成的集合,即由圆心在原点的单位圆内及圆周上的一切点所组成的集合.而 D 表示平面上所有满足 $x>0,y>0$ 的点 (x,y) 所组成的集合,即由平面直角坐标系中第一象限的一切点所组成的集合.

1. 邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一点,δ 是某一正数,则点集

$$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $N(P_0,\delta)$，即

$$N(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}.$$

在几何学上，邻域 $N(P_0,\delta)$是平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为圆心，$\delta>0$ 为半径的圆内的点 $P(x,y)$的全体. $\delta>0$ 称为邻域 $N(P_0,\delta)$的半径. 如果不需要特别强调邻域的半径 δ，就用 $N(P_0)$来表示点 P_0 的某一邻域.

2. 区域

设 E 为平面点集，点 $P\in E$. 如果存在点 P 的某个邻域$N(P)$，使 $N(P)$内的点都属于 E，则称 P 为E 的一个内点(图 8－1). 若点集 E 的所有的点都是内点，则称 E 为开集.

例如：点集

$$E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

中的每一个点都是 E_1 的内点，因此，E_1 为开集.

设 E 为平面点集，如果点 P 的任意邻域内既有属于E 的点，也有不属于 E 的点，则称点 P 为E 的一个边界点(图 8－2). 至于点 P 本身，它可以属于 E，也可以不属于 E. 点集 E 的边界点的全体称为E 的边界.

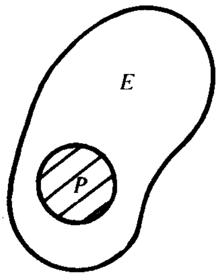


图 8－1

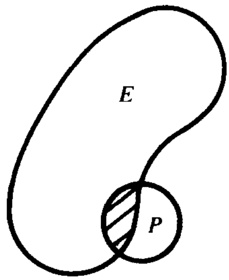


图 8－2

上面提到的点集 E_1，圆周 $x^2+y^2=1$ 上每一点都是 E_1 的边界点，此圆周即是 E_1 的边界.

设 E 是开集，如果对 E 内的任意两点 P_1 与 P_2，都能用全属于 E 的一条折线将它们连接起来，则称开集 E 是连通的. 连通的开集称为区域或开区域. 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如：

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\},\{(x,y)\mid x-y>0\}$$

都是开区域(图 8－3)，而

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

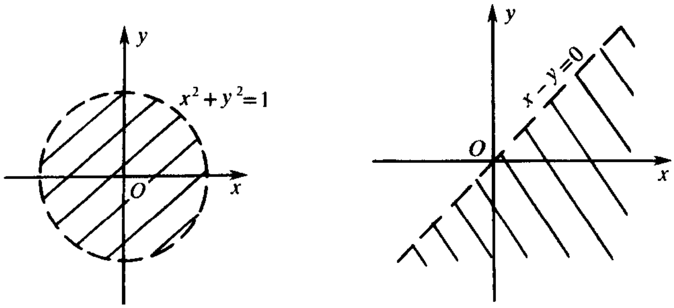


图 8－3

则为闭区域(图 8－4).

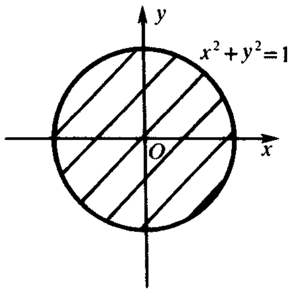


图 8－4

如果存在 $M>0$,使得对于区域 D 中任何点 $P(x,y)$,皆有

$$|x|\leqslant M,\ |y|\leqslant M.$$

则称区域 D 是有界的,否则称区域 D 为无界.

例如:

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

是有界区域,而

$$\{(x,y)\mid x-y>0\}$$

是无界区域.

3. n 维空间

数轴上的点 M 与实数 x 是一一对应的,那么实数的全体就表示数轴上一切点的集合,记为 $\mathbf{R}^1$,叫做一维空间.

平面上的点 M 与二元有序数组 (x,y) 是一一对应的,那么,二元有序数组的全体就表示平面上一切点的集合,记为 $\mathbf{R}^2$,叫做二维空间.

空间中的点 M 与三元有序数组 (x,y,z) 是一一对应的,那么三元有序数组 (x,y,z) 的全体就表示空间中一切点的集合,记为 $\mathbf{R}^3$,叫做三维空间.

如此加以推广,我们把 n 元有序数组

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的全体组成的集合记为 R^n,并叫做 n 维空间.而每一个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 维空间中一个点 M,记为 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.而数 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 叫做点 M 的第 i 个坐标.

设点 $M(x_1,x_2,\cdots,x_n),N(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,我们规定 M,N 两点间的距离为

$$|MN|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

显然,当 $n=1,2,3$ 时,上式就是解析几何中在直线上、平面上和空间中两点间的距离公式.

有了两点间的距离规定之后,就可以把平面点集中邻域的概念推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.设 $P_0\in\mathbf{R}^n$,δ 为某一正数,那么 $\mathbf{R}^n$ 中点集

$$N(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta,P\in\mathbf{R}^n\}$$

就称为 P_0 的 δ 邻域.

8.1.2 多元函数的概念

我们着重介绍二元函数的概念,三元及三元以上的多元函数的概念,可以作类似的推广.

定义 1.1 设有平面点集 D 和数集 B,如果对于 D 中每一点 $P(x,y)$,通过确定的规律 f,总有惟一的实数 $z\in B$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的二元函数,记为

$$z=f(x,y),\text{或 } z=f(P).$$

其中 x,y 称为自变量;z 称为因变量.也称 z 是 x,y 的函数.平面点集 D 称为函数 $z=f(x,y)$ 的定义域,习惯上记为 D_f.而集合 $V_f=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的值域.

我们曾经利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$ 的图形,一般说来,它是平面上一条曲线.对于二元函数 $z=f(x,y)$,可以利用空间直角坐标系来表示它的图形.

设 $z=f(x,y)$,其定义域为 D_f.对于任意取定的点 $P_0(x_0,y_0)\in D_f$,对应的函数值记为 $z_0=f(x_0,y_0)$,在空间直角坐标系中就确定了一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$.在一般情况下,当点 $P(x,y)$ 取遍定义域 D_f 的一切点时,对应的点 $M(x,y,z)$ 的全体组成一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D_f\}$,这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形.二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形一般是一张曲面(图 8-5).

例如二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是球心在原点,半径为 1 的上半球面(图 8-6).

例 1.1 求二元函数

$$z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义域 D_f.

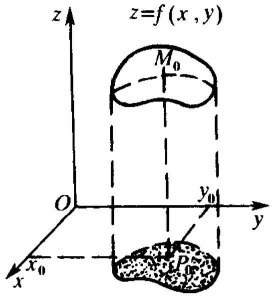


图 8－5

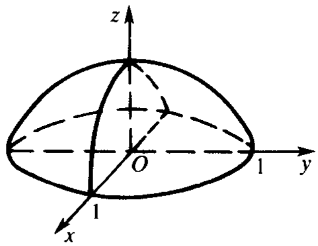


图 8－6

解 由于在对数函数中，要除去使真数小于或等于零的值，故 $y-x>0$. 而在开偶次方的根式中，要除去被开方数为负数的值及在分式中要求分母不能等于零，从而要求$x\geqslant 0, 1-x^2-y^2>0$，即

$$\begin{cases} y-x>0, \\ x\geqslant 0, \\ 1-x^2-y^2>0. \end{cases}$$

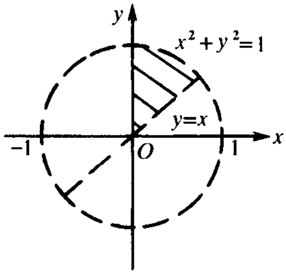


图 8－7

同时成立. 故所求的二元函数的定义域为

$$D_f=\{(x,y)\mid y>x, x\geqslant 0, x^2+y^2<1\}.$$

如图 8－7 所示.

例 1.2 设 $f(x+y,x-y)=xy+y^2$，试求 $f(x,y)$.

解 设 $x+y=u, x-y=v$，则有

$$x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \\ &= \frac{u^2-v^2}{4}+\frac{u^2-2uv+v^2}{4} \\ &= \frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}uv=\frac{1}{2}u(u-v), \end{aligned}$$

故

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x(x-y).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

8.1.3 二元函数的极限

我们来讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$，即点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义(点 P_0 可除外)，$P(x,y)$ 为该邻域内异于 P_0 的任意一点，如果当 $P(x,y)$ 以任意方式趋近于点 P_0 时，函数的对应值 $f(x,y)$ 趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数

$$z = f(x,y)$$

当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限.

在这里，我们注意到点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 就是点 P 与 P_0 之间的距离趋近于零，即

$$|P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

下面仿照一元函数极限的定义，用“$\varepsilon-\delta$”的语言方式来描述二元函数的极限.

定义 1.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义(点 P_0 可以除外)，A 为一常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得适合不等式

$$0<|P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A,$$

或者

$$f(x,y)\to A, (\rho = |P_0P|\to 0).$$

二元函数的极限也叫做二重极限.

根据二元函数的极限定义，所谓的二重极限存在，是指点 $P(x,y)$ 按任意方式趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都以同一个常数为极限，因此，如果点 $P(x,y)$ 以某一特殊方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使 $f(x,y)$ 无限接近于某个确定的值，我们还不能由此断定函数的极限存在。但是，反过来，如果当点 $P(x,y)$ 以不同的方式趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋近于不同的值，那么可以断定这函数的极限不存在.

例 1.3 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当点 $P(x,y)\to O(0,0)$时，函数的极限是否存在.

解 当点 $P(x,y)$沿 Ox 轴趋近于$O(0,0)$时，有

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0.$$

当点 $P(x,y)$沿 Oy 轴趋近于$O(0,0)$时，有

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=0.$$

虽然点 $P(x,y)$以上述两种方式趋近于 $O(0,0)$时，函数的极限存在并且相等，但是极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$$

并不存在，这是因为，当点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx(k\neq 0)$趋近于$O(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

显然极限值随 k 的不同而异，故极限不存在.

利用点函数的定义，上述极限定义可用与一元函数的极限完全相同的形式来描述：

设 n 元函数$f(P)$对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当

$$0<|P_0P|<\delta\text{ 时},$$

恒有

$$|f(P)-A|<\varepsilon.$$

成立，则称当 $P\to P_0$ 时，函数 $f(P)$以 A 为极限，记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

这是一种通用的书写形式，当 $n=1$ 时，就得到一元函数的极限定义；当 $n=2$ 时，就得到二元函数的极限定义；依次类推，可以得到 n 元函数极限的定义.

二元函数的极限，有以下的运算法则.

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{A}{B}$,$(B\neq 0)$.

8.1.4 二元函数的连续性

仿照一元函数连续性的定义,我们就可以得到二元函数连续性的定义.

定义 1.3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,点 $P(x,y)$ 是该邻域内的任意一点,如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续.

设 $f(x,y)$ 的定义域 D_f 是开区域或闭区域 D,如果 $f(x,y)$ 在 D 上每一点处都连续,则称 $f(x,y)$ 是域 D 上的连续函数,通常记为 $f(x,y)\in C(D)$.二元连续函数的图形是一张无孔、无缝的曲面.

一元函数的极限运算法则可以推广到多元函数的极限运算中来,根据这些法则和二元函数连续的定义,可以证明二元连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)也都是连续函数.

二元函数的复合函数也有与一元函数的复合函数相类似的性质:

如果函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,而且 $u_0=u(x_0,y_0)$、$v_0=v(x_0,y_0)$,又 $f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处连续,则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

由常数和 x,y 的基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步骤所构成的,并且能用 x、y 的一个数学式子表示的函数,叫做二元初等函数.例如:

$$z=\sin(x^2+y),z=\ln(1+x^2+y^2),$$

$$z=\frac{(x^2-y^2)e^{xy}}{2\arcsin(x+y)}.$$

都是二元初等函数.

二元初等函数在定义域内是连续函数.

类似于在闭区间上一元连续函数的性质,在有界闭域上多元连续函数具有以下性质:

性质 1 (有界性)若 D 为有界闭区域,且 $f(P)\in C(D)$,则 $f(P)$ 在 D 上有界.

性质 2 (最大值、最小值存在)若 D 为有界闭区域,且 $f(P)\in C(D)$,则 $f(P)$ 在 D 上必能取得最大值 M 和最小值 m.

性质 3 （介值定理） 若 D 为有界闭区域，且 $f(P)\in C(D)$，则 $f(P)$ 可以取到介于最大值 M 与最小值 m 之间的任意一个数值，即若有 μ 满足 $m<\mu<M$，则必存在 $P_0\in D$，使 $f(P_0)=\mu$.

习题 8-1

1. 用集合记号表示下列平面区域.

(1) 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的闭区域 D；

(2) 以点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,2)$，$C(0,1)$ 为顶点的梯形闭区域 D.

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$，求 $f(1,-2)$，$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$，$f(-y,x)$ 和 $f[x,f(x,y)]$.

3. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

4. 设 $f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x^3-2xy^2\sqrt{xy}+3xy^4}{y^3}$，求 $f(x,y)$，$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(4) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\ln(1-\sqrt{y})$；

(5) $z=\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)}$，$(a>0)$；

*(6) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

*6. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

8.2 偏导数

8.2.1 偏导数的概念

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $N(P_0,\delta)$ 内有定义，当自变量固定在 y_0，则 $z=f(x,y_0)$ 为自变量是 x 的一元函数. 若在 $N(P_0,\delta)$ 内，

自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，函数相应的增量为 $\Delta_x z$，即

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 z 对 x 的偏增量.

类似地，函数 z 对 y 的偏增量 $\Delta_y z$ 为

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0).$$

定义 2.1 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $N(P_0,\delta)$ 内有定义，且在此邻域内，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 x 的偏导数，记为 $f_x'(x_0,y_0)$，$z_x'(x_0,y_0)$ 或 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，即

$$f_x'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

同样，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数，记为 $f_y'(x_0,y_0)$，$z_y'(x_0,y_0)$ 或 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，即

$$f_y'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{2.2}$$

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 $P(x,y)$ 处都有偏导数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$. 那么，它们仍是 x,y 的二元函数，我们称它们为 $z=f(x,y)$ 的偏导函数，简称为偏导数. 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 或 z_x'，z_y'；$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$.

至于求二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数，并不需要新的方法，因为这里只有一个自变量在变化，另一个自变量是固定不变的，所以仍然是一元函数微分法问题. 在求 $f_x'(x,y)$ 时，把 y 看作常量而对 x 求导数；而求 $f_y'(x,y)$ 时，把 x 看作常量而对 y 求导数.

仿照二元函数偏导数的定义，可以把偏导数的概念推广到三元及三元以上的函数，例如，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \tag{2.3}$$

存在,就定义此极限为 $u=f(x,y,z)$在点 $P(x,y,z)$处对 x 的偏导数,记为$\frac{\partial u}{\partial x}$,$f_x'(x,y,z)$等.仿此不难得到三元函数的另外两个偏导数$\frac{\partial u}{\partial y}$,$\frac{\partial u}{\partial z}$.

例 2.1 设 $z=x\sin(xy)+e^{x+2y}$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$和$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

解 求$\frac{\partial z}{\partial x}$时,将 y 看作常量,而 z 只是 x 的一元函数,按一元函数微分法,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(xy)+xy\cos(xy)+e^{x+2y},$$

类似的有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos(xy)+2e^{x+2y}.$$

另外,把 $x=1,y=0$ 代入$\frac{\partial z}{\partial x}$的表达式,有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=e.$$

例 2.2 设 $z=x^y,(x>0,x\neq1)$,求$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}$,$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$,$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2^0=1$,$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$,$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2\ln2$.

例 2.3 已知理想气体的状态方程 $pv=RT$(R 为常量),求证:$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

证 因为

$$p=\frac{RT}{v},\quad \frac{\partial p}{\partial v}=-\frac{RT}{v^2};$$

$$V=\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial v}{\partial T}=\frac{R}{p};$$

$$T=\frac{pv}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{v}{R}.$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{v^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{v}{R}=-\frac{RT}{pv}=-1.$$

我们知道,对于一元函数来说,导数$\frac{dy}{dx}$可以看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商.而例 2.3 说明,偏导数的符号是一个不可分的整体符号.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com