



新坐标大学本科电子信息类专业系列教材  
浙江省高等教育重点建设教材

# 现代控制理论

俞立 编著

清华大学出版社

- 面向高等院校本科生，易读易懂
- 体现宽口径教学思想，满足多学科交叉的教学需要
- 强调物理概念，简化理论推导，强调理论联系实际，反映技术发展
- 整体规划教学资源体系，提供多种形式的教学辅助资料

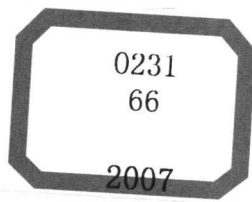
ISBN 978-7-302-14657-5



9 787302 146575 >

定价：20.00元

2007



新坐标大学本科电子信息类专业系列教材  
浙江省高等教育重点建设教材

# 现代控制理论

俞立 编著



清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书是适应自动化学科的发展,为自动化及其相关专业本科生编写的教材。本书以加强基础、突出处理问题的思维方法;培养学生分析问题和解决问题的能力为原则,详细介绍了基于状态空间模型的线性系统分析和综合方法,包括状态空间模型的建立、系统的运动分析、系统的能控性和能观性、李雅普诺夫稳定性理论、极点配置、状态观测器设计以及线性二次型最优控制。本书叙述深入浅出,理论联系实际,尽可能从实际背景的分析中提出要讨论的问题、概念和方法。在介绍系统分析和控制系统设计方法的同时,也给出了相应的 MATLAB 函数,便于读者利用 MATLAB 软件来有效求解控制系统的一些计算和仿真问题,以加深对概念和方法的理解。

本书适合于作自动化及其相关专业的高年级本科生、研究生教材,也可供相关工程技术人员学习参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

### 图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/俞立编著. —北京:清华大学出版社,2007.4

(新坐标大学本科电子信息类专业系列教材)

ISBN 978-7-302-14657-5

I. 现… II. 俞… III. 现代控制理论—高等学校—教材 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 019465 号

责任编辑:陈国新

责任校对:时翠兰

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

[c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

社总机:010-62770175 邮购热线:010-62786544

投稿咨询:010-62772015 客户服务:010-62776969

印刷者:北京密云胶印厂

装订者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:13.5 字 数:318 千字

版 次:2007 年 4 月第 1 版 印 次:2007 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:20.00 元

---

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:022417-01



# 序言

“新坐标大学本科电子信息类专业系列教材”是清华大学出版社“新坐标高等理工教材与教学资源体系创新与服务计划”的一个重要项目。进入21世纪以来,信息技术和产业迅速发展,加速了技术进步和市场的拓展,对人才的需求出现了层次化和多样化的变化,这个变化必然反映到高等学校的定位和教学要求中,也必然反映到对适用教材的需求。本项目是针对这种需求,为培养层次化和多样化的电子信息类人才提供系列教材。

“新坐标大学本科电子信息类专业系列教材”面向全国教学研究和教学主导型普通高等学校电子信息类专业的本科教学,覆盖专业基础课和专业课,体现培养知识面宽、知识结构新、适应性强、动手能力强的人才的需要。编写的基本指导思想可概括为:

1. 教材的类型、选题和大纲的确定尽可能符合教学需要,以提高适用性。教材类型初步确定为专业基础课和专业课,专业基础课拟按电子信息大类编写,以体现宽口径;专业课包括本专业和非本专业两种,以利于兼顾专业能力的培养与扩展知识面的需要。选题首先从目前没有或虽有但不符合教学要求的教材开始,逐步扩大。

2. 重视基础知识和基础知识的提炼与更新,反映技术发展的现状和趋势,让学生既有扎实的基础,又了解科学技术发展的现状。

3. 重视工程性内容的引入,理论和实际相结合,培养学生的工程概念和能力。工程教育是多方面的,从教材的角度,要充分利用计算机的普及和多媒体手段的发展,为学生建立工程概念、进行工程实验和设计训练提供条件。

4. 将分析和设计工具与教材内容有机结合,培养学生使用工具的能力。

5. 教材的结构上要符合学生的认识规律,由浅入深,由特殊到一般。叙述上要易读易懂,适合自学。配合教材出版多种形式的教学辅助资料,包括教师手册、学生手册、习题集和习题解答、电子课件等。

本系列教材已经陆续出版了,希望能被更多的教师和学生使用,并热忱地期望将使用中发现的问题和改进的建议告诉我们,通过作者和读者之间的互动,必然会形成一批精品教材,为我国的高等教育作出贡献。欢迎对编委会的工作提出宝贵意见。

“新坐标大学本科电子信息类专业系列教材”编委会



# 前言

本书是一本现代控制理论方面的入门教材。本着加强基础、突出处理问题的思维方法、培养学生分析问题和解决问题能力的原则,本书详细介绍了基于状态空间模型的线性系统分析和综合方法。

本书共分7章,其内容概括如下:绪论部分介绍了现代控制理论的发展以及与经典控制理论的区别;第1章研究了控制系统的状态空间模型,从机理方法推导了对象的状态空间模型,阐述了控制系统传递函数模型和状态空间模型之间的关系和相互转换;第2章基于状态空间模型分析了系统运动特性;第3章分析了系统的能控性和能观性;第4章研究系统的稳定性,介绍了李雅普诺夫稳定性方法;第5章研究了控制系统的设计问题,介绍了极点配置方法,并针对极点配置存在的不足,提出了伺服系统的设计方法;针对实际系统中状态不可直接测量的现象;第6章介绍了状态观测器及其设计方法,并在此基础上进一步提出了基于状态观测器的控制系统设计方法和分离性原理;结合系统的二次型性能指标;第7章介绍了线性二次型最优控制问题及其求解方法。

本书叙述深入浅出,理论联系实际,尽可能从实际背景的分析中来引入要研究的问题、概念和方法。采用从简单到复杂、从特殊到一般的处理方式提出解决问题的思路和方法,避免繁琐的数学推导和证明,培养学生分析问题和解决问题的能力。MATLAB作为一种基本工具,用于分析、计算、设计和仿真研究,具有很好的效果。在介绍系统分析和控制系统设计方法的同时给出了相应的MATLAB函数,通过仿真例子以检验分析和设计方法的效果,便于读者加深对控制系统分析和设计方法的理解。每章后面的习题旨在检验读者对内容的掌握,特别强调了对书中所介绍的基本概念、方法和主要结果的理解。

本书是作者结合自己长期从事现代控制理论教学与科研的经验,在参阅并吸取了国内外优秀教材相关内容的基础上完成。该书出版前的讲义已在多所院校自动化专业的现代控制理论课程中作为教材使用,并不断得到修改和完善。本书的编写得到了教育部优秀

青年教师教学科研奖励计划和浙江省高校重点教材建设计划的支持,在此,作者深表谢意。

限于作者水平,书中仍会有一些错误和不妥之处,恳请广大读者和专家给予批评指正。

作者

2006年10月于杭州

lyu@zjut.edu.cn



# 目 录

绪论 .....	1
<b>第 1 章 控制系统的状态空间模型</b> .....	<b>5</b>
1.1 状态空间模型 .....	6
1.1.1 状态空间模型表达式 .....	6
1.1.2 实例 .....	10
1.2 传递函数和状态空间模型间的转换 .....	13
1.2.1 由传递函数导出状态空间模型 .....	14
1.2.2 由状态空间模型确定传递函数 .....	24
1.3 利用 MATLAB 进行系统模型间的相互转换 .....	26
1.4 状态空间模型的性质 .....	30
习题 .....	34
<b>第 2 章 系统的运动分析</b> .....	<b>38</b>
2.1 齐次状态方程的解 .....	39
2.2 状态转移矩阵 .....	42
2.2.1 状态转移矩阵的性质 .....	43
2.2.2 状态转移矩阵的计算 .....	44
2.3 非齐次状态方程的解 .....	52
2.3.1 直接法 .....	52
2.3.2 拉普拉斯变换法 .....	54
2.4 使用 MATLAB 对状态空间模型进行分析 .....	55
2.4.1 单位阶跃响应 .....	55
2.4.2 脉冲响应 .....	57
2.4.3 初始状态响应 .....	58
2.4.4 任意输入信号响应 .....	59
2.5 离散时间状态空间模型 .....	60
2.5.1 连续时间状态空间模型的离散化 .....	61
2.5.2 离散时间状态空间模型的运动分析 .....	63
习题 .....	65



<b>第 3 章 能控性和能观性分析</b>	68
3.1 系统的能控性	69
3.1.1 能控性定义	69
3.1.2 能控性判据	69
3.1.3 能控性的性质	75
3.1.4 输出能控性	79
3.2 系统的能观性	80
3.3 能控能观性的对偶原理	83
3.4 基于传递函数的能控能观性条件	85
习题	87
<b>第 4 章 系统的稳定性分析</b>	91
4.1 李雅普诺夫意义下的稳定性	92
4.1.1 平衡状态	93
4.1.2 李雅普诺夫意义下的稳定性	93
4.1.3 能量函数	95
4.2 李雅普诺夫稳定性定理	100
4.3 线性系统的稳定性分析	104
4.3.1 李雅普诺夫方程处理方法	105
4.3.2 线性矩阵不等式处理方法	109
4.4 李雅普诺夫稳定性方法在控制系统分析中的应用	111
4.4.1 渐近稳定线性系统时间常数的估计	111
4.4.2 参数优化问题	113
4.4.3 基于李雅普诺夫稳定性理论的控制器设计	117
4.5 离散时间系统稳定性分析	118
习题	120
<b>第 5 章 状态反馈控制器设计</b>	122
5.1 线性反馈控制系统	123
5.1.1 控制系统结构	123
5.1.2 反馈控制的一些性质	124
5.1.3 两种反馈形式的讨论	127
5.2 稳定化状态反馈控制器设计	127
5.2.1 黎卡提方程处理方法	128
5.2.2 线性矩阵不等式处理方法	129
5.3 极点配置	131
5.3.1 问题的提出	132



5.3.2	极点配置问题可解的条件和方法 .....	132
5.3.3	极点配置状态反馈控制器的设计算法 .....	136
5.3.4	爱克曼公式 .....	143
5.3.5	应用 MATLAB 求解极点配置问题 .....	146
5.4	跟踪控制器设计 .....	149
	习题 .....	157
<b>第 6 章</b>	<b>状态观测器设计 .....</b>	<b>159</b>
6.1	观测器设计 .....	159
6.2	基于观测器的控制器设计 .....	167
6.3	降阶观测器设计 .....	172
	习题 .....	181
<b>第 7 章</b>	<b>线性二次型最优控制 .....</b>	<b>184</b>
7.1	二次型最优控制 .....	184
7.2	应用 MATLAB 求解二次型最优控制问题 .....	189
7.3	离散时间系统的线性二次型最优控制 .....	194
	习题 .....	203
	<b>参考文献 .....</b>	<b>204</b>



# 绪 论

在工程和科学技术的发展过程中,自动控制始终担负着重要的角色。在航空航天和国防工业中,自动控制在飞机的自动驾驶系统、宇宙飞船系统和导弹制导系统中发挥着特别重要的作用。在现代制造业和工业生产过程中,自动控制同样起着无法替代的作用,例如对数控机床的控制,对工业过程中流量、压力、温度的控制等均离不开自动控制技术。此外,在机器人控制、城市交通控制、网络拥塞控制等方面,自动控制技术也都发挥着重要作用。自动控制技术的应用也已扩充到非工程系统,如生物系统、生物医学系统、社会经济系统等。随着自动控制技术在越来越多的领域中得到应用,自动控制不仅把人类从繁重的体力与部分脑力劳动中解放出来,而且可以完成只靠人类自身无法完成的许多精密、复杂的工作。在许多危险以及特殊的环境中,更是少不了自动化装置。

自动控制理论经过长期的发展已逐渐形成了一些完整的理论。根据发展过程,自动控制理论分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。发展于20世纪50年代之前、以传递函数描述系统的自动控制理论称为经典控制理论,而发展于20世纪50年代末60年代初、以状态空间模型描述系统的自动控制理论称为现代控制理论。

## 经典控制理论

尽管自动控制的某些思想可以追溯到久远的古代,直到18世纪英国人瓦特(J. Watt)为控制蒸汽机速度而设计的离心调节器才可以说是自动控制领域中的第一项重大成果,由此拉开了经典控制理论发展的序幕。不过,瓦特发明的这一装置容易震荡,直到1868年,英国人麦克斯韦(J. C. Maxwell)发表了《论调速器》,对蒸汽机调速系统的动态特性进行了分析,指出控制系统的品质可用微分方程来描述及系统的稳定性可用特征方程根的位置来判断,从而解决了蒸汽机调速系

统中出现的剧烈震荡问题,并总结出了简单的系统稳定性代数判据。第一次世界大战爆发后,军事工业的需要促进了自动控制理论的发展。1922年,美国的冯诺斯基(N. Minorsky)研制出船舶操纵自动控制器,并给出了控制系统的稳定性分析。1932年,美籍瑞典科学家奈奎斯特(H. Nyquist)提出了一种利用系统频率特性图确定系统稳定性的简便方法。到了第二次世界大战,由于设计和建造飞机自动驾驶仪、雷达跟踪系统、火炮瞄准系统等军事装备的需要,自动控制理论更是取得了长足的进步。1945年,美国的伯德(H. W. Bode)发表了关于控制系统频域设计方法的经典著作《网络分析和反馈放大器设计》。1948年,美国的伊万斯(W. R. Evans)提出了根轨迹法,进一步充实了经典控制理论。同年,美国的维纳(N. Wiener)发表了名著《控制论》,标志着经典控制理论的形成。

奈奎斯特图、伯德的频域法和伊万斯的根轨迹法使得不用求解微分方程就能分析高阶系统的稳定性、动态品质和稳态性能,为分析和设计控制系统提供了工程上实用且有力的工具,从而使得经典控制理论在反馈控制系统中的应用得到迅速增长。

面对经典控制理论所取得的迅猛发展,人们产生了一种更高的希望,以期这些原理和方法能用来处理更复杂的系统。特别是当时所掌握的反馈系统理论知识可以在短期内促进对诸如生物控制机理和神经系统那样高度复杂系统的理解,同时在工业社会中为复杂的经济和社会过程提供更有效的控制方法。然而,这些想法远未成熟,经典控制理论仍存在诸多的缺陷和局限性,妨碍它直接用于更为复杂系统的分析和控制。

第一,经典控制理论只限于研究线性时不变系统。尽管有大量的研究工作试图克服这种局限性,如对于某些典型的非线性及时变反馈系统已找到了奈奎斯特判据的广义形式,但经典控制理论仍难以处理一般的非线性或时变的系统。

第二,经典控制理论限于所谓的“标量”或单回路反馈系统,即单输入单输出系统。然而,实际中的大量工程系统都是具有动态耦合的多输入多输出系统。尽管人们将经典控制理论中的传递函数推广到传递函数矩阵以处理多输入多输出系统,但由于这些方法都是基于系统的输入输出描述,它们在本质上忽略了系统结构的内在性质。因此,用经典控制理论设计这类系统难以取得令人满意的效果。

第三,经典控制理论采用试探法设计系统,根据经验选用合适的、简单的、工程上易于实现的控制器,然后检验系统的所有品质指标是否都能满足。若不满足,则给出如何来修正控制系统的建议以改善系统品质指标,直至找到满意的结果为止。虽然这种设计方法具有实用性强等优点,但往往依赖于设计人员的经验,而不能从理论上给出最佳的、系统化的设计方案。

## 现代控制理论

现代科学技术的迅速发展,特别是空间技术、导弹制导、数控技术、核能技术等的发展,使得这些系统的结构更加复杂,它们往往是动态耦合的多输入多输出、非线性以及时变的系统。同时,对控制系统性能的要求也在不断提高,很多情况下要求系统的某种性能是最优的,而且对环境的变化要有一定的适应能力等。这些新的控制对象和控制要求是经典控制理论所无法处理和满足的。

科学技术的发展不仅对控制理论提出了挑战,同时也为新理论的形成创造了条件。

在 20 世纪 50 年代蓬勃兴起的航空航天技术的推动和飞速发展的计算机技术支持下,控制理论在 1960 年前后有了重大的突破和创新。1956 年,美国的贝尔曼(R. I. Bellman)发表了《动态规划理论在控制过程中的应用》,提出了寻求最优控制的动态规划法。同年,前苏联的庞特里亚金发表了《最优过程的数学理论》,提出了极大值原理,使得最优控制理论得到极大的发展。1960 年,美籍匈牙利人卡尔曼(R. E. Kalman)系统地引入状态空间法分析系统,提出了能控性、能观性的概念和新的滤波理论。而“现代控制理论”这一名称正是 1960 年卡尔曼的文章发表后出现的。这些重要的进展和成果构成了现代控制理论的发展起点和基础。

这一时期里,在现代控制理论的推动下,世界上出现了许多惊人的科技成就:1957 年,前苏联相继发射成功洲际弹道火箭和世界第一颗人造地球卫星;1962 年,美国研制出工业机器人产品,同年前苏联连续发射两艘“东方”号飞船首次在太空实现编队飞行;1966 年,前苏联发射“月球 9 号”探测器,首次在月球表面成功软着陆;1969 年,美国“阿波罗 11 号”把宇航员 N. A. 阿姆斯特朗送上月球,中国中远程战略导弹发射成功等。

现代控制理论在系统分析与设计上利用了现代数学作为工具,由此而引起的许多分析与设计步骤涉及大量计算,同时代的数字计算机的发展为实现这些计算提供了可能。可以说,现代控制理论与控制技术是和计算机平行发展的。

现代控制理论本质上是时域法,基于状态空间模型在时域中对系统进行分析和设计。由于采用了状态方程描述系统,因此原则上可以分析多输入多输出、非线性时变系统。基于状态空间模型来对系统进行分析,主要借助于计算机解出状态方程,根据状态解可以对系统性能做出评估。由于无需经过任何变换,在时域中直接求解和分析,控制的要求和性能指标就变得非常直观。在系统的设计方法上,可以在严密的理论基础上,推导出满足一定性能指标的最优控制系统。因此,在经典控制理论中存在的困难和局限,在现代控制理论中可以迎刃而解。

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的,虽然两者在数学工具、理论基础和研究方法上有着本质区别,但在对动态系统进行分析时,两种理论可以互相补充,相辅相成,而不是互相排斥。特别是在对线性系统的研究中,越来越多经典控制理论中行之有效的办法已渗透到现代控制理论中,如零极点对系统性能影响的分析和极点配置等,从而大大丰富了现代控制理论的研究内容。

## 本书的内容和特点

本书介绍了现代控制理论中的一些基本概念和方法,主要涉及线性系统的状态空间模型描述,基于状态空间模型的系统分析与设计,包括系统的运动分析、能控性、能观性、稳定性、极点配置、观测器设计、线性二次型最优控制等基本内容。

本书具有以下特点:

1. 全书的叙述由浅入深,注重理论联系实际。
2. 叙述过程中力图贯彻“问题的提出→解决的思路→具体方法→算法设计→应用实例”这一主线,特别强调“为什么要研究这个问题”、“如何来解决这个问题”。同时,在具体问题的解决过程中,避免过多繁琐的数学公式和推导,而是采用从简单到复杂,从特殊到

一般的处理思想,从一些特殊的、简单的例子入手导出问题的解,进而推广到一般的情况。在传授知识的同时,努力培养学生分析问题和解决问题的能力。

3. 在介绍系统分析和设计算法的同时,给出了相关的 MATLAB 函数,便于学生应用 MATLAB 软件解决控制系统的分析和设计问题,通过仿真直观了解分析结果和设计效果,有助于加深对现代控制理论中一些基本概念和方法的理解。

4. 每章后的习题不仅有计算题,而且还有叙述题,旨在让读者加深了解所讨论的问题、基本概念、解决方法、相关性质等,特别需要把握的是问题的提出和解决的思路,以逐步提高分析问题和解决问题的能力。

5. 本书叙述详尽,在文字上尽可能做到通俗易懂,便于自学。



## 控制系统的状态空间模型

要对一个被控对象进行有效的控制,首先需要了解和认识被控对象,而了解和认识被控对象的一种有效方法就是建立被控对象的数学模型。建立一个合理的被控对象数学模型是对被控对象实现有效控制的基础和前提。

控制系统的数学模型是用于描述系统动态行为的数学表达式。在经典控制理论中,采用传递函数作为描述系统的数学模型,建立起系统输入量和输出量之间的关系。这种输入输出关系描述的只是系统的外部特性,并不能完全反映系统内部的动态特征。此外,传递函数描述只考虑零初始条件,难以反映系统非零初始条件对系统性能的影响。

现代控制理论是建立在状态空间基础上的控制系统分析和设计理论。系统的内部特征用状态变量来刻画,系统的动态特性由状态变量的一阶微分方程组来描述。一阶微分方程组不仅能更有效地求解,从而确定在任一时刻由状态变量描述的系统内部特征,而且还可以方便地了解初始条件所产生的影响。系统的状态空间模型描述了系统的输入、输出与内部状态之间的关系,揭示了系统内部状态的运动规律,反映了控制系统动态特性的全部信息。因此,状态空间方法弥补了经典控制理论的一些不足。

状态空间方法不仅适用于单输入单输出系统,也适用于多输入多输出系统,应用的对象可以是线性的或非线性的,也可以是定常的或时变的。因此,状态空间方法适用范围更广,且数学模型由于采用了矩阵和向量的形式,不仅使得格式简单统一,而且可以方便地利用计算机进行处理和求解,显示了其极大的优越性。

本章主要介绍系统的状态空间模型及其建立方法。具体内容包  
括状态空间模型的机理建模方法,系统的传递函数和状态空间模型之间的相互转换, MATLAB 的相关函数,状态空间模型的分析及相关性质。

## 1.1 状态空间模型

### 1.1.1 状态空间模型表达式

现实世界中的许多对象和系统,不管它们是机械的、电气的、热力的,还是经济学的、生物学的,都有它们各自演化的规律。人们可以通过描述系统内部某些变化规律的物理定律、化学平衡方程等来确定某些变量与其他一些变量变化率之间的关系,如牛顿第二定律中力或力矩与速度变化率的关系;线圈的感应电压与电流的变化率成正比;导管中流经收缩口的液体流速决定于其前后的压力差;容器中反应物的浓度往往决定了化学反应的速率。进而得到刻画系统动态行为的数学模型。这种通过分析系统内在机理来建立系统数学模型的方法称为机理建模方法。但是,限于一些学科的发展水平,人们对一些对象的内在机理还缺乏足够的认识,难以建立起刻画其变化规律的定量关系。因此,还需要通过其他的手段和方法来确定描述其动态特性的数学模型。

在这一小节中,将通过分析一个实际例子的内在机理来建立其数学模型,进而介绍状态空间的一些概念,给出状态空间模型的表达式。

**例 1.1.1** 考虑如图 1.1.1 所示的 RLC 电路,其中电压  $u(t)$  为电路的输入量,电容上的电压  $u_c(t)$  为电路的输出量, $R$ 、 $L$  和  $C$  分别为电路的电阻、电感和电容。由电路理论可知,在给定输入电压  $u(t)$  后,回路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  是相互影响的,它们满足以下关系:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \\ C \frac{du_c(t)}{dt} = i(t) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

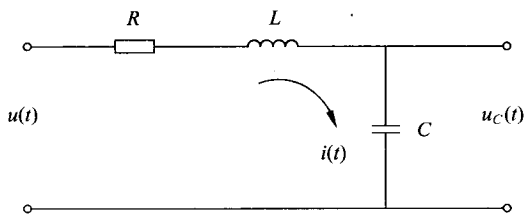


图 1.1.1 RLC 电路

进一步,由式(1.1.1)可以得到以下的一阶线性微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_c(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{du_c(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \end{aligned}$$

又可以将上式写成如下更为紧凑的向量矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{u}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.1.2a)$$



由微分方程理论可知：只要知道回路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  在  $t_0$  时刻的初始值  $i(t_0)$  和  $u_c(t_0)$ ，以及电路在  $t \geq t_0$  时的电压  $u(t)$ ，就可以从微分方程(1.1.2a)确定任意时刻  $t (\geq t_0)$  处电路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  的值。

$i(t)$  和  $u_c(t)$  描述了电路随电压  $u(t)$  变化的状况，这样一组量在任一时刻的值完全刻画了电路在该时刻的特征，故称其为该电路的状态变量，该状态变量中的每一个变量称为该电路的状态分量。

系统的状态变量就是可以完整描述系统运动状况的数目最少的一组变量。这里所说的“完整”是指系统所有可能的状况都能表示出来。对于图 1.1.1 所示的 RLC 电路， $i(t)$  和  $u_c(t)$  就可以构成系统的状态变量。再增加一个变量，例如电流  $i(t)$  的变化率  $di/dt$ ，对完整地确定电路的运动情况来说是多余的；若去掉一个变量，例如  $i(t)$ ，仅仅用  $u_c(t)$  又不能完整地确定系统的全部运动状态。状态变量在某一时刻的值称为系统在该时刻的状态。

将构成状态变量的一组变量写成列向量的形式，所得到的向量称为是状态向量。例如  $[i(t) \quad u_c(t)]^T$  是 RLC 电路的状态向量。由状态向量所有可能取值的全体构成的集合称为状态空间。因此，状态向量在某一时刻的值只是状态空间中的一个点。如 RLC 电路以  $i(t)$  和  $u_c(t)$  为状态变量的状态空间是  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ ，如图 1.1.2 所示。

系统在任意时刻的状态可以用状态空间中的一个点来表示。例如  $t_1$  时刻的状态对应于状态空间中的点  $M(i(t_1), u_c(t_1))$ 。随着时间的变化，状态变量在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹，它形象地描述了状态随时间变化的轨迹。

若将电容上的电压  $u_c(t)$  作为电路的输出量，则该输出量可以用电路状态变量的线性组合来表示：

$$u_c(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (1.1.2b)$$

方程(1.1.2a)~方程(1.1.2b)描述了 RLC 电路的输入电压  $u(t)$ 、状态变量  $i(t)$  和  $u_c(t)$  与输出变量  $u_c(t)$  之间的关系，它们完整地描述了系统内部与外部的动态变化状况，称为 RLC 电路系统的状态空间模型，其中方程(1.1.2a)称为系统的状态方程，方程(1.1.2b)称为系统的输出方程。

如果记

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}, \quad u = u(t), \quad y = u_c(t) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1] \end{aligned}$$

则方程(1.1.2)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned}$$

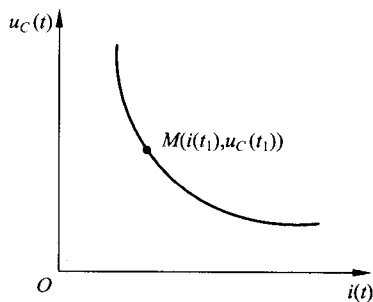


图 1.1.2 状态空间