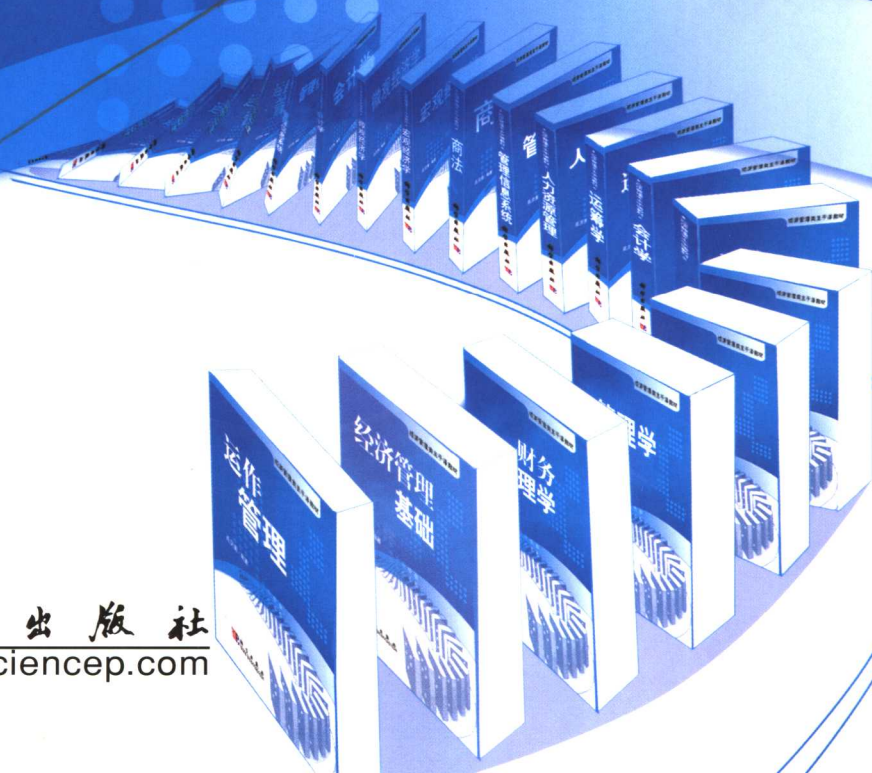


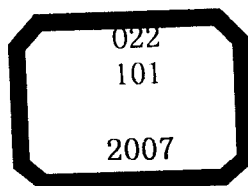
经济管理类主干课教材

运筹学

王文平/编著



 科学出版社
www.sciencep.com



经济管理类主干课教材

运 筹 学

王文平 侯合银 来向红 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以现代管理问题为导向,介绍了运筹学的基本内容与方法,其特点是:既重视相关数学模型的基本理论和数学逻辑思维训练,又重视各个模型、方法的实际应用背景分析,更强调应用计算机软件 Excel 进行管理问题的求解和计算能力的培养。主要内容包括:线性规划、图与网络优化、排队论、确定需求下的库存管理、不确定需求下的库存管理、博弈论等,每章均以辅助管理问题决策制订为目的进行编排,相关案例、例题在给出数学建模过程基础上,同时给出了 Excel 求解结果,求解过程光盘附于书后。每章附有实用、丰富的习题,并要求学生上机完成。

本书可作为高等院校管理类、理工类相关专业学生的教科书,也可作为经济管理人士的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/王文平等编著. —北京:科学出版社,2007

(经济管理类主干课教材)

ISBN 978-7-03-017837-4

I. 运… II. 王… III. 运筹学-教材 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 094348 号

策划编辑:王伟娟 / 文案编辑:贾瑞娜 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 2 月第一次印刷 印张: 26

印数: 1—4 000 字数: 497 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换<长虹>)

前 言

运筹学作为经济管理类专业主干课程之一,其目标是在现代经济管理问题背景下,培养学生形成系统优化思想、基于科学管理方法体系的逻辑思维能力和解决实际管理问题的应用能力。为此,本书基于编者长期从事运筹学教学实践过程中的经验和认识,努力克服运筹学学习中存在的两种倾向:一是过分注重数学理论的推导,而较忽视对学生(读者)如何应用书中的方法、模型解决实际管理问题能力的培养;二是仅强调实际案例和计算机软件的运用,但在整体理论体系上往往相对较浅,数学逻辑性不强。因此,本书特别注重针对现代实际管理问题特点,将数据、模型通过相关计算软件工具有机融合,实现对管理决策的科学支持。在注重数学逻辑和严密性的同时,更强调以现代管理问题为导向,实现量化分析问题的逻辑思维能力和解决实际管理问题的应用能力的协同提高。

本书编写工作分工如下:绪论、第1章至第4章、第10章:王文平,第5章、第6章、第9章、第11章:侯合银,第7章、第8章:来向红。王文平对全书做了统改和定稿。另外,作者的博士生陈娟、沈秋英等参与了部分章节资料、案例和习题的收集、编写和校对等工作,在此向她们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中不妥或错误之处,敬请广大读者批评指正。

编者

2007年1月25日

目 录

绪论	1
第 1 章 线性规划	7
1.1 线性规划概述	7
1.2 线性规划问题的数学模型	10
1.3 图解法	15
1.4 线性规划问题解的基本定理	19
1.5 单纯形法	22
1.6 利用 Excel 求解线性规划问题	34
1.7 Excel 求解综合实例	39
本章小结	43
习题	43
第 2 章 对偶理论与灵敏度分析	46
2.1 对偶问题的提出	46
2.2 线性规划的对偶理论	48
2.3 对偶单纯形法	55
2.4 灵敏度分析	57
2.5 利用 Excel 进行线性规划的灵敏度分析	66
本章小结	69
习题	70
第 3 章 运输与指派	73
3.1 运输问题的提出及建模	73
3.2 表上作业法求解	75
3.3 运输问题的 Excel 描述及求解	81
3.4 运输问题的变体	83
3.5 指派问题的提出及数学模型	91
3.6 指派问题的求解	92
3.7 指派问题的 Excel 描述及求解	96
本章小结	98
习题	98
第 4 章 线性规划的扩展	102

4.1 整数规划	103
4.2 目标规划	112
本章小结.....	117
习题.....	117
第5章 图与网络优化问题	120
5.1 图论基础	121
5.2 最小费用流问题	127
5.3 网络最大流问题	133
5.4 最短路问题	144
5.5 最小费用最大流问题	159
5.6 最小支撑树问题	173
本章小结.....	180
习题.....	181
第6章 利用网络计划技术进行项目管理	185
6.1 项目管理概述	185
6.2 网络计划技术概述	188
6.3 绘制项目的网络图	190
6.4 用网络计划技术进行项目排程	194
6.5 处理不确定工序工期	202
6.6 考虑时间-成本平衡	210
本章小结.....	222
习题.....	222
第7章 确定需求下的库存管理	226
7.1 库存问题的提出——AT公司库存问题	226
7.2 库存管理中的基本概念	229
7.3 基本经济订购批量(EOQ)模型	232
7.4 有计划缺货的EOQ模型	237
7.5 逐渐补充库存的EOQ模型	240
7.6 有数量折扣的EOQ模型	247
本章小结.....	251
习题.....	251
第8章 不确定需求下的库存管理	253
8.1 不确定需求的库存问题的提出——迪瑞报童问题	253
8.2 不确定需求库存模型的特点和库存策略	255
8.3 单时期库存模型	256

8.4 多时期库存模型	261
8.5 实践中的大型库存系统	266
本章小结	268
习题	268
第9章 排队论	270
9.1 典型排队系统及其基本特征	270
9.2 排队系统的基本要素	274
9.3 顾客相继到达间隔时间的概率分布与服务时间的概率分布	279
9.4 排队系统的符号描述与绩效测度	284
9.5 单服务台排队系统($M/M/1$)的分析	291
9.6 多服务台排队系统($M/M/c$)的分析	308
9.7 一般服务时间排队系统分析	313
本章小结	318
习题	318
第10章 决策论基础	321
10.1 决策论的基本概念	321
10.2 不确定型决策	326
10.3 风险型决策	333
10.4 决策树	340
本章小结	346
习题	346
第11章 博弈论基础	349
11.1 博弈论的基本概念	349
11.2 完全信息静态博弈分析	357
11.3 完全且完美信息动态博弈分析	375
11.4 矩阵博弈分析	386
本章小结	401
习题	402
参考文献	406

绪 论

1. 运筹学发展简介

运筹学作为一门现代科学,公认起源于第二次世界大战期间。当时英、美为了对付德国的空袭,在英国波得塞(Bawdsey)雷达站设立了专门的研究机构,研究英美军队如何有效对付德国空袭,并提出一份名为“关于整个防空作战系统的运行研究”的报告,在这份报告中首次运用了“operational research”一词,在英国,运筹学的名称便由此得来。运筹学在美国称为“operations research”(缩写为 O. R.)。在我国台湾地区,运筹学译为“作业研究”,内地根据“夫运筹帷幄之中,决胜千里之外”这句古语,将其译作“运筹学”。

由于运筹学研究的广泛性和复杂性,人们至今没有形成一个统一的定义。莫斯(P. M. Morse)与金博尔(G. E. Kimball)在他们的奠基作《运筹学方法》中给运筹学下的定义是:“运筹学是在实行管理的领域,运用数学方法,对需要进行管理的问题统筹规划,作出决策的一门应用科学。”1976 年美国运筹学会的定义是:“运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人-机系统,并使之最好地运行的一门学科”。《大英百科全书》称运筹学是一门“应用于管理有组织系统的科学”,“为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”。中国大百科全书称运筹学为:用数学方法研究经济、民政和国防等部门在内外环境的约束条件下,合理分配人力、物力、财力等资源,使实际系统有效运行的技术科学,它可以用来预测发展趋势,制定行动规划或优选可行方案。其他关于运筹学的定义还有许多,但本质含义基本相同。本书根据上述定义将运筹学概括为:运筹学是一门寻求在给定资源条件下,如何设计和运行一个系统的科学决策的方法。

从 20 世纪 30 年代末算起,人类关于运筹学的系统研究仅有半个多世纪,然而追溯运筹学思想的起源却很久远。本书从运筹学思想起源开始将运筹学的发展历程分为四个阶段。

1) 运筹学思想起源与积累时期(20 世纪 30 年代以前)

这一时期,运筹学虽未形成一门独立的科学,但其思想已孕育并有所运用。这一时期的时间跨度很长,运筹学思想一直处于积累时期,发展缓慢,直至 20 世纪初才发展形成一些较成熟的理论。古代朴素的运筹思想是早期运筹学思想的典型代表。该思想在我国古代文献中有不少记载,如田忌赛马、都江堰水利工程和丁谓的皇宫修复工程等。齐王与大臣田忌赛马,双方各出上、中、下马各一匹,对局三次,三局两胜。田忌在好友、著名的军事谋略家孙臆的指导下,以下马对齐王的上马,

以上马对齐王的中马,以中马对齐王的下马,最终净胜一局。战国时期(大约公元前 250 年),川西太守李冰父子主持修建都江堰水利工程,其目标是:利用岷江上游的水资源灌溉川西平原,同时保证航运与防洪。都江堰三大工程的总体构思是运筹学思想的杰出运用:“鱼嘴”岷江分水工程将岷江水有控制地引入内江;“飞沙堰”分洪排沙工程将泥沙排入外江;“宝瓶口”引水工程将除沙后的江水引入水网干道。这三者巧妙结合,完整而严密,相得益彰。两千多年来,这项工程一直发挥着巨大的效益,是我国最成功的水利工程。北宋年间,丁谓负责修复火毁的开封皇宫,他的施工方案是:先将皇宫前的一条大街挖成一条大沟,将大沟与汴水相通。使用挖出的土就地制砖,令与汴水相连形成的河道承担繁重的运输任务;修复工程完成后,实施大沟排水,并将原废墟物回填,修复成原来的大街。丁谓将取材、生产、运输及废墟物的处理用“一沟三用”巧妙地解决了。

2) 运筹学创建时期(20 世纪 30 年代至 50 年代初)

第二次世界大战期间,运筹学成功地解决了许多重要作战问题,显示了科学的巨大威力,也为它后来的发展铺平了道路。20 世纪 30 年代末,战时研究运筹学的学者开始转向运筹学在其他领域的应用研究。如 1939 年苏联学者康托洛维奇(Л. В. Канторович)在解决工业生产组织和计划问题时,已提出了类似线性规划的模型,并给出了“解乘法”的求解方法。1948 年,美国麻省理工学院(MIT)开设了第一个非军事运筹学技术课程。1950 年,第一本运筹学杂志《运筹学季刊》(Operational Research Quarterly)正式诞生。1950 年前后,英美等国的运筹学学会相继成立。1951 年,莫斯(P. M. Morse)与金博尔(G. E. Kimball)合著的《运筹学方法》一书正式发行,加之这一时期用电子计算机求解线性规划获得成功,所有这些都标志着运筹学作为一门独立学科已基本形成。虽然此时从事运筹学研究的人数还相对较少,相应的出版物和学会也很少,但这一时期是运筹学创建和发展过程中的重要时期。

3) 运筹学成长时期(20 世纪 50 年代初至 50 年代末)

这一时期由于计算机技术的迅速发展,运筹学中的一些方法,如单纯形法、动态规划等在实际工作中得到推广应用,促进了运筹学的发展。20 世纪 50 年代末,美国多半大公司已将运筹学引入到自身的经营管理中,如制定生产计划、物资储备、资源分配以及设备更新等领域均有所应用。1956~1959 年间,法国、印度、日本以及荷兰等 10 个国家相继成立了运筹学会,期间有 6 种运筹学刊物问世。1957 年,英国召开了第一次国际运筹学会议。1959 年,英、美、法三国发起成立国际运筹学联合会(International Federation of Operations Research Societies, IFORS),以后各国运筹学会也纷纷加入其中。这些运筹学刊物和运筹学会的诞生对日后运筹学的发展起了较大的推动作用。

4) 运筹学普及和快速发展时期(20 世纪 60 年代以后)

这一阶段,运筹学的学科体系与实际应用领域得到迅速发展,尤其是形成了较完整的分支体系:运筹学成为包括数学规划、图论与网络分析、决策论、对策论、排队论、存储论等多项内容在内的综合学科。在此期间,运筹学的学术团体数目、创办期刊数目、出版物发行量以及课程开设数量均有较大增长,并出现一些地区性的学术组织,如 1976 年欧洲运筹学学会成立,1985 年亚太运筹学协会成立等,这些均在较大程度上推动了运筹学理论和应用的发展。此外,第三代电子计算机的出现促进了运筹学对大型实际问题的研究,如城市交通规划、环境污染以及国民经济计划等。随着计算机技术的不断创新,运筹学的学科体系与实际应用领域还将进一步向前发展,并为社会生产活动创造更多的经济价值。

2. 运筹学研究问题的特点

运筹学是一门应用科学,是一种通过对系统进行科学的定量分析,从而发现问题和解决问题的系统方法论。运筹学的主要研究对象是“事”,而不是“物”,因此,人们也称运筹学为事理科学。运筹学研究具有系统性、实践性、多学科交叉性以及与计算工具的发展密切相关等特点,这些特点在目前的运筹学教材中均有所介绍,本书不再赘述。这里,我们重点阐述运筹学的研究对象具有哪些特点。

1) 运筹学研究的问题具有较强的实践性和应用性

运筹学属于应用数学范畴,其中虽然涉及抽象的数学模型和方法,但这些模型和方法的运用都是针对实际问题的,或者说这些问题的建模与求解是与问题的背景密切联系在一起的。运筹学所研究的问题广泛应用于军事、经济及管理等领域,具体如服务、库存、资源分配、调度、生产排期等多个方面,运筹学的发展为这些实际问题提供了解决方案,并创造了较大的经济和社会效益,但同时,应用领域的发展也为运筹学的发展开辟了空间,并为运筹学问题的求解方案提供了检验标准。

2) 运筹学所研究的问题是量化的,并符合某些建模规范

目前,虽然人们已将定性分析引入运筹学研究,但它还不能脱离定量研究独立解决问题,而是与定量研究相结合共同解决相关问题,这就决定了运筹学所研究的问题应该是量化的,或至少是部分可量化的,否则将难以保证所建立数学模型的合理性与可靠性。从建立数学模型的要求出发,运筹学所研究的问题往往需要符合特定的建模规范,如线性规划问题应能明确问题的目标和约束条件,而博弈论问题应能明确局中人数、可选策略以及所对应的效用函数。然而,实际问题并不一定明显符合这些建模规范,因此,在建模前往往需要我们对问题进行充分分析,将已知信息转化为这些建模规范后方可求解。

3) 目前运筹学所能解决的主要是一些结构化程度较高的问题

运筹学研究问题的第二个特点决定了目前运筹学主要致力于解决一些结构化程度较高的问题。实际问题按其复杂性程度不同可分为结构化问题、半结构化问题和非结构化问题三种,所谓结构化问题,指能够通过数学模型来描述和解决的决策问题,非结构化问题指完全无法采用量化模型描述和分析的问题,介于结构化与非结构化问题之间的则称为半结构化问题。在企业管理实践中,管理层次越高,所面临问题的结构化程度越低(图1和图2),这就导致目前运筹学主要解决一些操作层的问题,而难以在战略层或管理控制层发挥更大的作用。

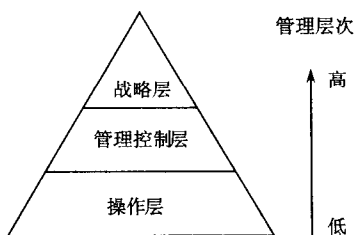


图1 管理层次图

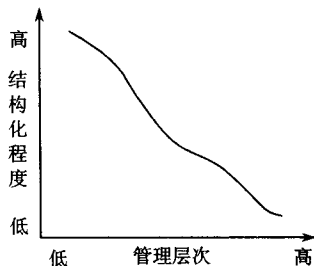


图2 问题的结构化层度与所处管理层次的关系

3. 运筹学解决问题的基本过程

运筹学解决问题的主要步骤包括:提出和描述问题、建立数学模型、求解并检验以及对求解方案进行实施,最终通过应用这些求解结果来改善现实系统的运行效率。具体过程如图3所示,下面对各个步骤分别进行介绍。

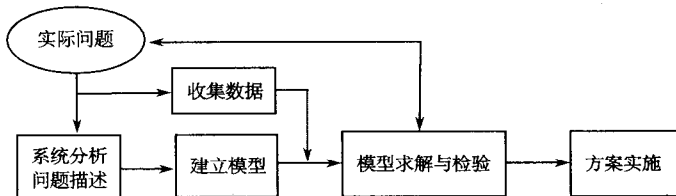


图3 运筹学解决问题的基本过程

1) 提出和描述问题

应用运筹学的主要目的是解决实际问题,而解决问题应首先提出问题,并对其进行系统的分析,这里主要是通过定性分析辨明问题中的关键要素,以便按照建模规范对问题进行描述。描述问题主要需明确以下四个要素,即决策目标是什么、决

策中的关键因素是什么、决策中相关因素的关系是什么,以及有哪些决策约束条件。

2) 建立数学模型

模型是对现实世界事物、现象、过程和系统的简化表述,或其部分属性的模仿,是对实际问题的抽象概括和严格的逻辑表达。建立模型是运筹学解决问题的关键步骤。一方面,它可使问题的描述高度规范化,便于掌握其本质规律;另一方面,建立模型后,通过收集的数据对问题进行求解,并可分析各因素与系统目标之间的关系;此外,建立系统的模型还便于利用计算机技术解决实际问题。

一个典型的运筹学模型包括四个部分:①一组需要通过求解模型确定的决策变量;②一个反映决策目标的目标函数;③一组反映系统逻辑和约束关系的约束方程;④模型中涉及的各种参数。建立运筹学模型的本质就是把问题中决策变量、参数、目标以及约束之间的关系用适当的模型表示出来。

3) 求解并检验

这里主要用数学方法或其他方法对第二步中建立的模型进行求解。根据问题要求,可分别求出最优解、次优解或满意解。对于复杂模型的求解可通过计算机来实现。依据决策者对解的精度要求不同,可将解分为精确解和近似解两种。然而不管是哪种解,由于模型和实际问题总是存在一定差异,都需要对其进行相应的检验。通过检验,首先检查求解步骤和程序是否有误,然后检查模型解是否反映现实问题,只有当模型较准确地反映实际问题时,运筹学求解问题才达到了理想的效果。

4) 实施求解方案

运筹学研究的最终目的是提高被研究系统的效率,因此,求解方案的实施是很重要的步骤,同时也是比较困难的一步。只有最优化的方案得到顺利实施后,前面各步骤所做的工作才算是真正有价值。在这一步,最重要的是明确将模型解运用到实际中时应考虑哪些实施方面的问题,如方案由谁实施、如何实施、实施中可能产生哪些问题以及遇到问题时如何修改等。

4. 运筹学发展展望

关于运筹学往哪个方向发展,至今未形成统一结论。美国前运筹学会主席邦特(S. Bonder)认为,运筹学应在三个领域发展:运筹学应用、运筹科学和运筹数学。其中,应重点发展前两者,并从整体上注重协调发展。运筹学发展到20世纪70年代时已形成一系列强有力的分支,数学描述相当完善,这本是件好事,但却使得有些专家只迷恋于数学模型的精巧、复杂化,使用高深的数学工具,而忽视了运筹学的原有特色——实践性和应用性,难以解决大量新的实际问题。现代运筹学面临的大量问题主要是经济、社会、生态、政治等因素交叉在一起的复杂系统,因

此,运筹学未来发展的首要趋势是与系统分析相结合,这就要求运筹学中除常用的数学方法外,还需引入系统科学的相关理论和分析方法。

切克兰特(P. B. Checkland)把传统运筹学方法称为硬系统思考,它主要适用于解决结构化程度较高的技术性问题,而对于结构不明确或有人参与的系统就难以胜任了。此时,便需要传统运筹学在思想和方法进行适当的转变,如将过分理想化的“最优解”换作“满意解”;将精确的、固定的“解”的概念拓展为可调的、动态的“解”的概念等。这种转变要求直接导致了软运筹学的诞生。软运筹学强调方法的多样性和方法间的综合,强调面向经济、管理。

另一方面,实际问题的柔性、智能化特点,要求发展能同样体现智能化、柔性的模型和方法与之相适应。这些是运筹学未来发展的另一个重要趋势。另外,随着计算机技术、人工智能理论的发展,如何将决策者的经验与数学模型相集成,用以更好地解决半结构化以至非结构化问题,也是运筹学发展的重要趋势。

综上所述,更新思想、实践为本和多学科交融是运筹学发展的必由之路。在运筹学的发展道路上,必然会出现新的思想和新的方法,而本书作为一本教材,提供的方法和知识是有限的,望感兴趣的读者能够不限于本书的范围,去学习和探索运筹学的新知识和新领域。

第1章 线性规划

美国航空业在1983~1984年经历了史无前例的行业竞争,与其他航空公司不同,联合航空公司(United Airlines)非但没有受到重创,而且还取得了很大发展。1984年,它是唯一一家能在全美国50个州提供航空服务的公司,销售收入达到62亿美元,比上年增长了6个百分点,同时由于成本增长控制在2%以下,使得运营利润提高了5.64亿美元。成本控制是航空业生存的关键,而如何进行合理的工作排程则是成本控制的重要项目。有效的工作排程不仅能够提高机场工作人员的效率,而且也是满足消费者需求的重要保障。

1982年,联合航空公司在其11个航班订票处共有4000多名机票销售代表和支持人员,在10个最大的机场约有1000名客户服务代表,他们的工作方式分为专职和兼职两种,兼职每班工作2~8小时不等,全职每班工作8小时或10小时,此外,他们的上班时间也不同。每个订票处一天24小时营业(通过电话订票),由于不同时间满足客户需求所需的工作人员数量不等,每个售票点的工作人员数量在一天24小时中变化很大,甚至每过半个小时就出现很大变化。然而,联合航空公司的制度是这样规定的,一旦某员工上了班,就会工作一个班次(根据工作方式不同2~10个小时不等),只有就餐和每隔两个小时的短暂休息时间。假定事先给定一天中每半小时间隔所需的最小雇员数,请问联合航空公司应如何以最低的成本安排员工的上班时间、上班地点和班次长度,并实时有效地满足客户需求?这就是航空公司的工作排程问题,其本质是一个线性规划问题。联合航空公司基于线性规划方法建立的计算机规划系统,使公司在薪酬和津贴成本上节省了600万美元,同时也改善了客户服务水平,并降低了员工的工作负担。

当然,线性规划的用途不仅局限于此,它是运筹学的重要组成部分,在工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和生产经营等领域有着广泛的应用,并取得了良好的经济效益。

1.1 线性规划概述

什么是线性规划?线性规划可以解决什么问题呢?从本质上看,线性规划

(linear programming)是应用数学模型对所研究问题的一种数学模型描述。线性(linear)是指模型中数学表达式的形式,规划(programming)并不是指计算机程序(computer programming),而是计划(planning)的同义词。因此,线性规划是指用线性数学模型描述的活动计划。线性规划的主题是在一定的约束条件下,找出活动的最佳组合,以便产生最大的经济和社会效益。换句话说,线性规划主要帮助管理者解决这样的问题:如何分配组织有限的资源,以最好地达到组织的目标。

如何通过线性规划来解决这类问题呢?核心内容包括:如何将实际问题转化为一个线性规划模型?如何求解线性规划模型?即线性规划的求解。线性规划的求解方法有两种,即:①图解法,只适合于解决决策变量较少的问题;②单纯形法及其改进方法。其中单纯形法是可以求解所有线性规划问题的一般算法,而基于单纯形法的改进方法(如对偶单纯形法等)在解决某些特殊问题时,能获得比普通单纯形法更好的计算效果。单纯形法现已形成一些实用的商业软件(如 Excel 规划求解、Lindo 等),通过操作这些软件可以便捷地利用单纯形法求解线性规划问题。

本章将首先通过案例引入线性规划的概念,建立线性规划的一般模型。然后,通过图解法引出线性规划的相关基本概念,论述一系列基本定理。最后,本章重点论述了单纯形法,并介绍如何利用 Excel 求解线性规划问题。

两个经典的线性规划问题

为了对线性规划问题有一个感性的认识,并对线性规划在管理决策活动中所起到的作用有深入的理解,本节给出线性规划在实际中的两个经典应用。

【例 1.1】开米公司广告组合问题

开米(Kamei)是一家生产新型家用清洁产品的公司。由于家用清洁产品市场的高度竞争性,公司为了增加市场份额已连续奋斗多年。现管理层决定集中在一种喷雾去污剂和一种新型液体洗涤剂这两种产品上,实行一次大规模的广告宣传活动。

这一广告活动将采用电视、印刷媒体同时进行。一种新型液体洗涤剂开发成功后,要在全国家电视台做液体洗涤剂广告来帮助推出这一新产品。印刷媒体广告将全部用来促销这两种产品。管理部门已经设定了广告活动的最低目标:①喷雾去污剂必须再增加 4% 的市场份额;②新型液体洗涤剂必须在洗涤剂市场中获得 18% 的份额。表 1-1 显示了在各种媒体上做一单位广告(一单位是指开米公司通常采用的一个广告标准批量),相应的产品市场份额的估计增加额。表中最底行显示了在每一种媒体上做广告的单位成本。

管理部门的任务是决定在每种媒体上投放多少单位广告,才能在达到预定市场份额目标的前提下,使总的广告宣传费用最低。

表 1-1 广告宣传效果与成本表

产品	电视	印刷媒体	需要最小的增加量
去污剂	0%	2%	4%
液体洗涤剂	3%	2%	18%
单位成本	\$1 500 000	\$2 000 000	

管理部门为此专门成立了科学管理小组,科学管理小组将问题抽象为一个线性规划模型。设 $x_i (i=1,2)$ 分别表示开米公司在电视、印刷媒体这两种媒体上各自投放的广告单位数, x_1 和 x_2 均为整数。由于公司最低要求喷雾去污剂必须再增加 4% 的市场份额,因而 $x_i (i=1,2)$ 应该满足

$$0\% \times x_1 + 2\% \times x_2 \geq 4\%$$

同理,由于新型液体洗涤剂必须在洗涤剂市场中至少获得 18% 的份额, $x_i (i=1,2)$ 还应该满足

$$3\% \times x_1 + 2\% \times x_2 \geq 18\%$$

公司目标是使总的广告宣传费用最低。用 z 表示广告宣传费用,则

$$z = 1\,500\,000 \times x_1 + 2\,000\,000 \times x_2$$

开米公司广告组合问题可用数学模型完整的表示为

$$\text{目标函数} \quad \min z = 1\,500\,000 \times x_1 + 2\,000\,000 \times x_2$$

$$\text{约束条件} \quad 0\% \times x_1 + 2\% \times x_2 \geq 4\%$$

$$3\% \times x_1 + 2\% \times x_2 \geq 18\%$$

$$x_i \geq 0 (i=1,2), \text{且均为整数}$$

【例 1.2】热狗和热狗面包问题

Heatdog 是一家食品加工厂,制作热狗和热狗面包。他们每星期最多使用 200 磅^①自己的面粉制作热狗面包。每个热狗面包需要 0.1 磅面粉。最近他们与 Pigforland 公司签订协议,Pigforland 每星期一向公司供应 800 磅肉制品。每个热狗需要 0.25 磅的肉制品,其他所有的制作热狗和热狗面包的配料供应充足。Heatdog 有 5 名全职雇员(每星期工作 40 小时)。制作每一个热狗需要 3 分钟,一个热狗面包需要 2 分钟时间。一个热狗产生 0.2 美元的利润,一个热狗面包产生 0.1 美元的利润。表 1-2 列出了每份热狗及热狗面包的材料、工时及利润清单。

Heatdog 想知道每个星期制作多少热狗和热狗面包才能获得最大利润。

如何解决这个问题呢? Heatdog 公司为此向管理科学专家咨询,管理科学专

① 1 磅(lb)=0.453592 千克(kg)。

家将该问题抽象为一个数学模型。设 $x_i (i=1,2)$ 分别表示 Heatdog 每个星期所生产的热狗和热狗面包份数, x_1 和 x_2 均为整数。由于每个星期最多供肉制品 800 磅, 这是一个限制条件, 所以 $x_i (i=1,2)$ 应该满足

$$0.25 \times x_1 + 0 \times x_2 \leq 800$$

同样, 由于面粉用量、工时量的限制, $x_i (i=1,2)$ 还应该满足

$$0 \times x_1 + 0.1 \times x_2 \leq 200$$

$$3 \times x_1 + 2 \times x_2 \leq 12\,000$$

公司的目标是获得最大利润。如果用 z 表示利润, 则 $z = 0.2 \times x_1 + 0.1 \times x_2$ 。

整个问题可用数学模型表示为

$$\text{目标函数} \quad \max z = 0.2 \times x_1 + 0.1 \times x_2$$

$$\text{约束条件} \quad 0.25 \times x_1 + 0 \times x_2 \leq 800$$

$$0 \times x_1 + 0.1 \times x_2 \leq 200$$

$$3 \times x_1 + 2 \times x_2 \leq 12\,000$$

$$x_i \geq 0 (i=1,2), \text{且均为整数}$$

表 1-2 Heatdog 产品的材料、工时及利润清单

每一份产品材料及工时的需求量			
材料及工时	热狗	热狗面包	每星期最多用量
肉制品	0.25	0	800(磅)
面粉	0	0.1	200(磅)
工时	3	2	12 000(分钟)
每份利润	\$0.2	\$0.1	

1.2 线性规划问题的数学模型

1.2.1 线性规划问题数学模型的一般形式

不难看出, 上面两个例子同属一类优化问题, 它们具有以下共同特征:

(1) 用一组决策变量 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示问题的方案, 决策变量的取值代表一个具体方案。如例 1.1 中, 开米公司在电视和印刷媒体上各自投放的广告单位数即为一组决策变量。通常情况下, 决策变量的取值是非负的, 部分情况下, 还要求决策变量的取值为整数。

(2) 决策变量满足一定的约束条件, 用一组线性等式或线性不等式表示。如