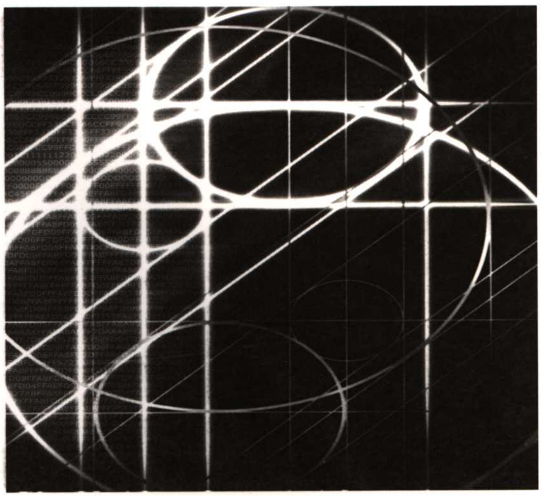
经典教材辅导用书

数学系列

吉米多维奇数学分析习题集选解（下）

黄光谷　黄川　蔡晓英　李杨　编



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学系列丛书

吉米多维奇

数学分析习题集选解（下册）

黄光谷　黄　川
蔡晓英　李　杨　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题集选解(下册)/黄光谷　等编
武汉:华中科技大学出版社,2006年12月
ISBN 7-5609-3892-2

Ⅰ.吉…
Ⅱ.①黄…　②黄…　③蔡…　④李…
Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.O17-44

吉米多维奇数学分析习题集选解(下册)　　黄光谷　等编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:周芬娜
责任校对:刘　峻
封面设计:潘　群
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:12.5　　字数:295 000
版次:2006年12月第1版　　印次:2006年12月第1次印刷　　定价:17.80元
ISBN 7-5609-3892-2/O・404

内容介绍

吉米多维奇的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性的习题集. 编者根据我国目前的教学实际情况，选编了其中约三分之一的重要习题，并作了详细解答，分上、下两册出版. 本书覆盖了该习题集各章节的主要内容，便于读者由厚到薄、由少而精地掌握该习题集内容，这对学习理科数学分析或工科高等数学(即微积分)的读者将大有裨益.

本书有很强的可读性，并兼顾多方需要，适合理、工科等的本、专科各专业教、学数学分析或高等数学(微积分)的师生作为教学参考书.

前　言

苏联的吉米多维奇(Б. П、Демидович)著的《数学分析习题集》是一部著名的、很有代表性和影响力的书籍,原书曾经由苏联高等教育部审定为综合性大学及师范院校数理系的教学参考书. 该书自20世纪50年代初在我国翻译出版以来,几十年来引起了各大专院校广大师生的巨大反响,促进了我国数学分析(微积分)的教与学.

笔者从1958年至1965年间,曾陆续试解了该书中的大部分习题,收益颇丰. 这次应邀从该书4462道习题中,挑选约30%的习题,整理详解,分上、下两册出版.这些题是根据我国目前的教学实际情况并兼顾理、工科等多方面需要而选解编入的,大部分是该书中难度中等或中等偏上的习题,也选入了少数基本题垫底;至于其它一些很容易的习题,没有选入,留给读者思考或演练;对于超出我国现时数学分析教学要求和考研要求或难度很大的习题,也未选入,有兴趣的读者可以查阅参考文献[2].这就是说,本书在挑选习题时只选编了原习题集中难度中等的一部分,并参考了苏联著名数学家辛钦在参考文献[4]中推荐的习题. 这样由厚到薄、由少而精,便于读者根据实际情况,掌握主要内容.

编写本书时,并没有逢三选一地在各章节中平均选题,对重点节,选了约1/2的好题;对有些超出教学要求的节,只选入了几个,甚至只一两个题作为代表.为了便于读者阅读本书,掌握有关知识点,照录了原习题集中各节前的知识要点,并冠以"内容提要"的标

题,其中超出要求的内容加了“*”号. 解题中用到的其它知识,读者可查阅参考文献[3]或[6],这里不一一标出.

为了便于读者查阅,各题前写了两个题号,如5—320,第一个数字5是本书该节的顺序号,第二个数字530是原书《数学分析习题集》的题号.若行文中仅一个序号,如530,指的是原书《数学分析习题集》之题号. 为了符合读者的阅读习惯,将原习题集中俄文的小题号(а)、(б)、(в)、(г)、(д)等,依次改成了数字(1)、(2)、(3)、(4)、(5)或(a)、(b)、(c)等. 对于标注的式子的俄文(А)、(Б)、(В)等,改换成了读者熟悉的英文(A)、(B)、(C)等. 其余类似.

选入的题都有详解,为了避免重复,不再作详细分析. 简要分析以黑括号【 】标出,少数题在题末加“注”,力求画龙点睛,以期引起读者的注意或扩充知识面.有的题还给出了一题多解,许多题采用了与参考文献[2]不同的解法,以便活跃思路.

许多题的简单插图未另绘,留给读者思考或自绘草图,边读边想,以培养想象能力.

选编本书,得到出版社领导和编辑等的大力支持和指导;少部分题参考了参考文献[2]的解法,在此一并致谢!

由于我们水平有限,本书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正,以便再版时修改.

编　者

2005年8月

主 要 符 号

$\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

$\mathbf{N}^*$ 表示正整数集($\mathbf{N}$ 中去掉数 0 的集合).

$\mathbf{R}^{\pm}$ 表示正(或负)实数集.

$U(a,\delta)$表示以 a 为中心,δ 为半径的邻域.

$\mathring{U}(a,\delta)$表示去心邻域.

$\forall$ 表示“任意给定”或“任给”、“对任意的”.

$\exists$ 表示“存在”、“有”.

$\triangleq$表示“记为”、“定义为”.

$\Longrightarrow$表示“推出”、“推得”或“蕴含”.

$\Leftrightarrow$表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”.

$\complement_I B$ 表示 I 中子集 B 的余集或补集.

$f(x)\in B(I)$表示区间 I 上的全体有界函数之集.

$C(I)$表示 I 上全体连续函数之集.

$D(I)$表示 I 上全体可导函数之集.

$D^n(I)$表示 I 上全体 n 阶可导函数之集.

$R(I)$表示 I 上全体(黎曼)可积函数之集.

$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$表示函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在开区间(a,b)内可导.

目　　录

第五章　级数 …………………………………………………… (1)
§1　数项级数、同号级数收敛性的判别法 …………… (1)
内容提要……………………………………………… (1)
习题选解……………………………………………… (3)
§2　变号级数收敛性的判别法……………………… (19)
内容提要……………………………………………… (19)
习题选解……………………………………………… (20)
§3　级数的运算…………………………………………… (30)
内容提要……………………………………………… (30)
习题选解……………………………………………… (31)
§4　函数项级数…………………………………………… (33)
内容提要……………………………………………… (33)
习题选解……………………………………………… (36)
§5　幂级数………………………………………………… (61)
内容提要……………………………………………… (61)
习题选解……………………………………………… (63)
§6　傅里叶级数…………………………………………… (85)
内容提要……………………………………………… (85)
习题选解……………………………………………… (86)
§7　级数求和法…………………………………………… (91)
内容提要……………………………………………… (91)

习题选解 …………………………………………… (93)
§8 利用级数求定积分之值 …………………………… (100)
内容提要 …………………………………………… (100)
习题选解 …………………………………………… (100)
§9 司特林公式 …………………………………… (102)
内容提要 …………………………………………… (102)
习题选解 …………………………………………… (102)

第二篇 多变量函数

第六章 多变量函数的微分法 …………………………… (105)
§1 多变量函数的极限、连续性 ……………………… (105)
内容提要 …………………………………………… (105)
习题选解 …………………………………………… (106)
§2 偏导函数、多变量函数的微分 …………………… (118)
内容提要 …………………………………………… (118)
习题选解 …………………………………………… (119)
§3 隐函数的微分法 ………………………………… (141)
内容提要 …………………………………………… (141)
习题选解 …………………………………………… (143)
§4 变量代换 ……………………………………… (155)
内容提要 …………………………………………… (155)
习题选解 …………………………………………… (156)
§5 几何上的应用 …………………………………… (160)
内容提要 …………………………………………… (160)
习题选解 …………………………………………… (161)
§6 泰勒公式 ……………………………………… (173)
内容提要 …………………………………………… (173)

习题选解 …………………………………… (174)
§7　多变量函数的极值 ……………………………… (177)
内容提要 …………………………………… (177)
习题选解 …………………………………… (179)
第七章　带参数的积分…………………………………… (209)
§1　带参数的常义积分 ……………………………… (209)
内容提要 …………………………………… (209)
习题选解 …………………………………… (210)
§2　带参数的广义积分、积分的一致收敛性………… (220)
内容提要 …………………………………… (220)
习题选解 …………………………………… (221)
§3　广义积分中的变量代换、广义积分号下的微分
法及积分法 …………………………………… (229)
内容提要 …………………………………… (229)
习题选解 …………………………………… (230)
§4　欧拉积分 …………………………………… (240)
内容提要 …………………………………… (240)
习题选解 …………………………………… (241)
第八章　重积分和曲线积分…………………………… (245)
§1　二重积分 …………………………………… (245)
内容提要 …………………………………… (245)
习题选解 …………………………………… (246)
§2　面积的计算法 ……………………………… (263)
内容提要 …………………………………… (263)
习题选解 …………………………………… (264)
§3　体积的计算法 ……………………………… (268)
内容提要 …………………………………… (268)

习题选解 …………………………………………… (268)
§4 曲面面积计算法 …………………………………… (271)
内容提要 …………………………………………… (271)
习题选解 …………………………………………… (272)
§5 二重积分在力学上的应用 ………………………… (277)
内容提要 …………………………………………… (277)
习题选解 …………………………………………… (278)
§6 三重积分 …………………………………………… (282)
内容提要 …………………………………………… (282)
习题选解 …………………………………………… (284)
§7 利用三重积分计算体积 …………………………… (292)
内容提要 …………………………………………… (292)
习题选解 …………………………………………… (292)
§8 三重积分在力学上的应用 ………………………… (297)
内容提要 …………………………………………… (297)
习题选解 …………………………………………… (299)
§9 二重和三重广义积分 ……………………………… (302)
内容提要 …………………………………………… (302)
习题选解 …………………………………………… (303)
§10 多重积分…………………………………………… (307)
内容提要…………………………………………… (307)
习题选解…………………………………………… (309)
§11 曲线积分…………………………………………… (311)
内容提要…………………………………………… (311)
习题选解…………………………………………… (313)
§12 格林公式…………………………………………… (326)
内容提要…………………………………………… (326)

习题选解…………………………………………（327）
§13　曲线积分的物理应用………………………………（334）
内容提要…………………………………………（334）
习题选解…………………………………………（334）
§14　曲面积分…………………………………………（340）
内容提要…………………………………………（340）
习题选解…………………………………………（342）
§15　斯托克斯公式………………………………………（357）
内容提要…………………………………………（357）
习题选解…………………………………………（357）
§16　奥-高公式　………………………………………（361）
内容提要…………………………………………（361）
习题选解…………………………………………（361）
§17　场论初步…………………………………………（367）
内容提要…………………………………………（367）
习题选解…………………………………………（370）
参考文献……………………………………………………（384）

第五章　级　数

§1　数项级数、同号级数收敛性的判别法

内容提要

1. 一般概念

对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \qquad ①$$

若
$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad (S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n)$$
存在，则称级数①为收敛的；反之，则称级数①为发散的.

2. 柯西准则

级数①收敛的充要的条件为对于任何的 $\epsilon>0$ 都存在 $N=N(\epsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\epsilon$$

成立.

特别是，若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3. 比较判别法 I

设除级数①外，还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \qquad ②$$

若当$n \geqslant n_0$时,不等式$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$成立,则

(1) 从级数②收敛可推得级数①收敛;

(2) 从级数①发散可推得级数②发散.

特别是,当$n \to \infty$时,若$a_n \sim b_n$,则正项级数①和②同时收敛或同时发散.

4. 比较判别法 Ⅱ

设$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$[①],则

(1) 当$p>1$时级数①收敛;

(2) 当$p \leqslant 1$时级数①发散.

5. 达朗贝尔判别法

若$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,则

(1) 当$q<1$时级数①收敛;

(2) 当$q>1$时级数①发散.

6. 柯西判别法

若$a_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$及$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$,则

(1) 当$q<1$时级数①收敛;

(2) 当$q>1$时级数①发散.

7. 拉阿伯判别法

若$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$,则

(1) 当$p>1$时级数①收敛;

(2) 当$p<1$时级数①发散.

---

① 记号O^*的意义参阅第二章§6.1.

8. 高斯判别法

若$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

其中，$|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$，则

(1) 当$\lambda>1$时级数①收敛；

(2) 当$\lambda<1$时级数①发散；

(3) 当$\lambda=1$时，若$\mu>1$，则级数①收敛；若$\mu\leqslant1$，则级数①发散.

9. 柯西积分的判别法

若 $f(x)(x>0)$是非负的不增函数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$与积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

习 题 选 解

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【1—2548】 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

解 记$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

所求
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-1/2}+0=3.$$

可见题设级数收敛.

【2—2550】 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

解 因
$$S_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$
所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1/3.$$

【3—2551】 (1) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$.

解 记(1)中级数和为S_1,(2)中级数和为S_2,则有
$$\begin{aligned}S_1&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin[(n-1)\alpha+\alpha]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}q^n[\sin(n-1)\alpha\cos\alpha+\cos(n-1)\alpha\sin\alpha]\\&=q\cos\alpha S_1+q\sin\alpha(1+S_2),\end{aligned}$$
所以
$$(1-q\cos\alpha)S_1-q\sin\alpha S_2=q\sin\alpha; \qquad ①$$
同理
$$q\sin\alpha S_1+(1-q\cos\alpha)S_2=q\cos\alpha. \qquad ②$$
联立式①、②,解得
$$S_1=\frac{D_1}{D}=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},$$
$$S_2=\frac{D_2}{D}=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$
其中,D 与 D_1、D_2 分别是方程组的系数行列式与“换列”行列式.

【4—2552】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 记$a_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, $n\in\mathbf{N}^*$,则
$$a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=0-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=1-\sqrt{2}.$$

【5—2554】 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\quad\left(A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\quad(p_1=1,p_1<p_2<\cdots)\right)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证　记$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和分别为S_n与s_n，则

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}A_n=\sum_{i=1}^{p_{n+1}-1}=s_{p_{n+1}-1},$$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}s_{p_{n+1}-1}=s,$$

可见$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，且与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$有相同的和s.

反之不真. 反例：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$显然发散；但

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却显然收敛于0.

【6—2555】 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的各项是正的，而把这级数的项经过组合得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$收敛，则原来的级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.